

**ANÁLISE I – FGV
PRIMEIRA LISTA**

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **25 de janeiro de 2011**

Exercício 1. Sejam os conjuntos A infinito e $B \neq \emptyset$ finito. Mostre que existe $b \in B$ tal que $f^{-1}(\{b\})$ é infinito.

Exercício 2. Porque não se pode argumentar como no exemplo 1.5 e concluir erroneamente que os racionais *não* são enumeráveis.

Exercício 3. Mostre que, para todo $N \in \mathbb{N}$, se A_1, \dots, A_N são enumeráveis, então $A_1 \times \dots \times A_N$ é enumerável. (dica: usar o resultado do exercício 1.9).

Exercício 4. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado, então $A \subseteq [\inf S, \sup S]$.

Exercício 5. Enuncie e demonstre o resultado análogo ao Lema 2.1.3 no caso do ínfimo.

Exercício 6. Seja V espaço vetorial com norma $\|\cdot\|$ induzida por produto interno. Mostre que vale a *lei do paralelograma*, i.e., para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tem-se

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$