**ANÁLISE I – FGV**
**SÉTIMA LISTA**

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **30 de março de 2010**

*Exercício* 1. Mostre que $\|\cdot\|_{\sup,\Omega}$ (ver definição nas notas de aula) satisfaz as propriedades de norma.

*Exercício* 2. Seja a sequência de funções $(f_i)$, onde $f_i(x) = \sin(ix)/(1+ix)$. Mostre que $(f_i)$ converge pontualmente para todo $x \in [0,+\infty)$, uniformemente em $[a,+\infty)$ para $a > 0$, mas não converge uniformemente em $[0,+\infty)$.

*Exercício* 3. Ache exemplo de sequência $(f_i)$ de funções que converge uniformemente em $(0,1]$, mas não em $[0,1]$.

*Exercício* 4. Seja $\mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ o espaço das funções de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, contínuas e limitadas. Mostre que $\mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ é completo na norma do supremo $\|\cdot\|_{\sup,\Omega}$, i.e., uma sequência $(f_i)$ em $\mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ é de Cauchy (em relação à norma do *sup*) se e somente se existe $f \in \mathcal{C}_{\lim}(\Omega)$ tal que $\|f_i - f\|_{\sup,\Omega} \to 0$.

*Exercício* 5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, e $(f_n)$ sequência de funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Prove ou apresente contra-exemplo para a seguinte afirmação:

*Se $(f_n)$ converge uniformemente para $f$ em $(0,1]$, então $(f_n)$ converge uniformemente para $f$ em $[0,1]$.*

*Exercício* 6. Seja $K$ conjunto compacto, $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, e $(f_n)$ sequência de funções contínuas de $K$ em $\mathbb{R}$. Prove ou apresente contra-exemplo para a seguinte afirmação:

*Se $(f_n)$ converge pontualmente para $f$ em $K$, então $(f_n)$ converge uniformemente para $f$ em $K$.*