ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **09 de março de 2010**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) = 0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^m$.

Exercício 2. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 4 (Equivalência de normas no $\mathbb{R}^n$). Dizemos que duas normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ de uma espaço vetorial V são *equivalentes* se existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$c_1|||\mathbf{v}||| \leq \|\mathbf{v}\| \leq c_2|||\mathbf{v}|||$$

para todo $v \in V$. Mostre que no $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes.

(Dica: mostre que todas as normas são equivalentes à norma euclidiana, i.e., considere $\|\cdot\|$ como sendo a norma euclidiana. Para tal, comece mostrando que existe constante c_1 tal que $c_1|||\mathbf{v}||| \leq \|\mathbf{v}\|$ para todo $v \in V$. Para obter a desigualdade inversa, mostre que $|||\cdot|||$ define uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Conclua então usando o Teorema dos pontos extremos de forma apropriada.)

Exercício 5. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é função uniformemente contínua.

Exercício 6. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que dado $\epsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que se x, $y \in [a_{i-1}, a_i]$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Exercício 7. Suponha $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0,1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que f seja uniformemente contínua em $[0,1]$.