ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **22 de março de 2006**
Tempo de prova: **2 horas**
Valor total da prova: 10 pontos.

1- (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é vetor constante. Usando a definição de derivada para funções de várias variáveis, calcule a derivada de f.

2- (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável e com derivada limitada em $\mathbb{R}^m$. Seja $(\mathbf{x}_n)$ sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^m$. Mostre que $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

3- (2.0 pontos) Dê um exemplo de uma função que converge pontualmente mas não uniformemente. *Prove* que seu exemplo funciona.

4- (2.0 pontos) Seja $f : A \to \mathbb{R}$, diferenciável em A, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$ e seja $S \subset A$ o segmento de reta unindo estes pontos. Mostre que existe $\boldsymbol{\xi} \in S$ tal que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = Df(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

5- (2.0 pontos) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t A\mathbf{x} - \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica positiva definida, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F se e somente se $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.