ANÁLISE I – FGV
SOLUÇÃO DA SEGUNDA PROVA

Prof. Alexandre Madureira
Data: **22 de março de 2006**
Tempo de prova: **2 horas**
Valor total da prova: 10 pontos.

1- (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é vetor constante. Usando a definição de derivada para funções de várias variáveis, calcule a derivada de f.

Solução: Vamos mostrar que $f'(\mathbf{x}) = A$. De fato, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ temos que $f'(\mathbf{x})$ é tal que se

$$r(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h},$$

então $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|r(\mathbf{h})\|/\|\mathbf{h}\| = 0$. Substituindo $f'(\mathbf{x}) = A$ temos

$$r(\mathbf{h}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{h}) + \mathbf{c} - (A\mathbf{x} + \mathbf{c}) - A\mathbf{h} = \mathbf{0},$$

e claramente $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|r(\mathbf{h})\|/\|\mathbf{h}\| = 0$. Pela unicidade da derivada temos que $f'(\mathbf{x}) = A$.

2- (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável e com derivada limitada em $\mathbb{R}^m$. Seja $(\mathbf{x}_n)$ sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^m$. Mostre que $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Solução (1):

Como f tem derivada limitada, seja c constante tal que $\|f'(\mathbf{x})\| < c$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dado $\epsilon > 0$, como $(\mathbf{x}_i)$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^m$, então existe N tal que

$$i, j > N \implies \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < \frac{\epsilon}{c}.$$

Pelo Teorema do valor Médio, temos para todo $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ que existe $\boldsymbol{\xi}_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)\| = \|f'(\boldsymbol{\xi}_{i,j})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\|.$$

Logo,

$$\|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)\| \le \|f'(\boldsymbol{\xi}_{i,j})\|\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \le c\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$$

e portanto

$$i, j > N \implies \|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)\| \le c\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < \epsilon,$$

e $\big(f(\mathbf{x}_i)\big)$ é sequência de Cauchy.

Solução (2):

Como $(\mathbf{x}_n)$ é de Cauchy, então converge. Seja $\mathbf{x}$ seu limite. Posto que f é diferenciável em $\mathbb{R}^n$, então é contínua em $\mathbb{R}^n$. Logo $f(\mathbf{x}_n)$ converge para $f(\mathbf{x})$ e portanto é convergente. Como toda sequência convergente é de Cauchy, temos que $f(\mathbf{x}_n)$ é de Cauchy.

3- (2.0 pontos) Dê um exemplo de uma sequência de funções que converge pontualmente mas não uniformemente. *Prove* que seu exemplo funciona.

Solução: Seja a sequência de funções(f_n), onde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$. Então, para $x \in [0,1)$ temos que $(f_n(x)) \to 0$, e $(f_n(1)) \to 1$. Portanto (f_n) converge pontualmente para uma função descontínua. Logo a convergência não pode ser uniforme, pois neste caso a função limite teria que ser contínua.

4- (2.0 pontos) Seja $f : A \to \mathbb{R}$, diferenciável em A, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$ e seja $S \subset A$ o segmento de reta unindo estes pontos. Mostre que existe $\boldsymbol{\xi} \in S$ tal que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = Df(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Solução: Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = f(t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{x})$. Então ϕ é diferenciável e pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (0,1)$ tal que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(s)$. Mas $\phi(1) = f(\mathbf{y})$, $\phi(0) = f(\mathbf{x})$, e pela regra da cadeia, $\phi'(s) = Df(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, onde $\boldsymbol{\xi} = s\mathbf{y} + (1-s)\mathbf{x} \in S$.

5- (2.0 pontos) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t A\mathbf{x} - \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica positiva definida, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F se e somente se $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Solução: Se $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F, então $F'(\mathbf{x}^*) = 0$. Mas $F'(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{x}^*)^t A - \mathbf{b}^t$, e portanto $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Por outro lado, se $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$, então $F'(\mathbf{x}^*) = 0$. Como a Hessiana é positiva definida, então $\mathbf{x}^*$ é ponto de mínimo estrito de F.