# Introdução à Análise Real em Uma Dimensão
# Pós-graduação da EPGE–FGV[1]

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica—LNCC, Brasil
*URL*: `http://www.lncc.br/~alm`
*URL*: `http://www.lncc.br/~alm/cursos/analiseI05.html`

[1] 12 de maio de 2005

PREFÁCIO. Estas notas de aula são relativas ao curso da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas (EPGE–FGV).

Neste curso pretendo apresentar alguns tópicos de análise que, espero, sejam úteis aos futuros economistas. Na verdade, o que eu espero mesmo é apresentar o rigor matemático aos alunos, e mostrar como este deve ser utilizado em conjunto com a intuição matemática. Minha experiência diz que os alunos da EPGE têm a intuição mais desenvolvida que o rigor.

Planejo discutir os seguintes tópicos:

(1) Topologia dos números reais
(2) Sequências
(3) Limite e Continuidade
(4) Derivação

A referência básica é o livro *Introduction to Real Analysis*, de Bartle e Sherbert [**2**]. Outra referência importante é o já clássico livro de análise do Elon Lima [**3**].

Finalmente gostaria de agradecer a algumas pessoas da FGV que me possibilitaram ensinar este curso. Tudo começou quando o Ricardo Cavalcanti me convidou em 2003 para ensinar metade do curso de análise II com o Samuel Pessoa. Foi uma ótima experiência, e no ano seguinte, a Cristina Terra me chamou para novamente lecionar, desta vez o curso de Análise I. Agora em 2005 tive novo convite e decidi começar a escrever estas notas de aula. Sou grato a todos pelas oportunidades.

# Conteúdo

CAPÍTULO 1

# Pré-requisitos

Neste capítulo, recordaremos definições e notações básicas sobre conjuntos e funções. Assumiremos aqui que as propriedades básicas de conjuntos são conhecidas.

## 1.1. Conjuntos e funções

Considere $A$ e $B$ dois conjuntos. Uma função é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$, um elemento $f(x) \in B$. Chamamos o conjunto $A$ de *domínio* da função$f$ e o denotamos por $D(F)$. Chamamos o conjunto $B$ de *contradomínio* da função$f$. Escrevemos $f : A \to B$, ou ainda

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Se $E \subset A$, chamamos de *imagem de $E$* o conjunto

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Similarmente, se $H \subset B$, chamamos de *imagem inversa de $H$* o conjunto

$$f^{-1}(H) = \{x : f(x) \in H\}.$$

Se $f(A) = B$ dizemos que $f$ é *sobrejetiva* (ou simplesmente *sobre*). Dizemos que $f$ é *injetiva* (ou *um a um* ou 1-1) quando, dados $a$, $a' \in D(f)$, se $f(a) = f(a')$ então $a = a'$. Numa forma mais compacta, escrevemos que para todo $a$, $a' \in D(f)$ temos

$$f(a) = f(a') \implies a = a',$$

onde "$\implies$" significa *implica que*.

Se $f$ é injetiva e sobre, a chamamos de *bijeção*.

Dizemos que $g : B \to A$ é *função inversa* de $f$ se

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A, \qquad f(g(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B.$$

Quando existir, denotamos a inversa de $f$ por $f^{-1}$.

Observação. Note que a definição de *imagem inversa* independe de existir ou não a função inversa. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não tem inversa. Entretanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

## 1.2. Conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis

Um conjunto $B$ é *finito* se é vazio ou se existe uma bijeção entre $B$ e $\{1, 2, \cdots, N\}$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Se $B$ é finito ou se existe uma bijeção entre $B$ e $\mathbb{N}$, dizemos que $B$ é *enumerável*.

Exemplo 1.1. $\{2, 3, 4, 5\}$ é finito, e portanto enumerável.

Exemplo 1.2. $P = \{2, 4, 6, \cdots\}$ é enumerável pois $\phi : \mathbb{N} \to P$ definida por $\phi(n) = 2n$ é uma bijeção entre $P$ e $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.3. O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável pois

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\},$$

e $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $\phi(i) = (-1)^{i+1}[i/2]$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A função $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é tal que $[x]$ é a parte inteira de $x$, i.e., o maior inteiro menor ou igual a $x$.

Exemplo 1.4. $\mathbb{Q}$ é enumerável pela "contagem diagonal":

$$\begin{array}{lllllll}
0 \\
1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \cdots \\
\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & -\frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{2}, & \cdots \\
\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & -\frac{3}{3}, & \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

e podemos contar pois

$$\mathbb{Q} = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{3}, \cdots\right\}.$$

Exemplo 1.5. $\mathbb{R}$ não é enumerável. Para mostrar isto, usaremos uma demonstração por contradição. Mostraremos na verdade que $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ não é enumerável. Usando a base decimal, todo elemento $x \in I$ pode ser representado por $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$, onde $a_i \in \{0, \dots, 9\}$. Assuma que $I$ é enumerável. Então existe uma enumeração $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dos elementos de $I$ tal que

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots, \\
x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots, \\
x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots, \\
&\dots,
\end{aligned}$$

onde $a_{ij} \in \{0, \dots, 9\}$. Seja agora $y = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$ onde

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ii} \in \{1, \dots, 9\} \\ 1 & \text{se } a_{ii} = 0. \end{cases}$$

Logo $y \in I$ mas $y \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto contradidiz a afirmação que $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma enumeração dos elementos de $I$. Portanto, $I$ não é enumerável.

Exercício 1.1. Mostre que uma função tem inversa se e somente se ela é uma bijeção.

Exercício 1.2. Sejam $A$ e $B$ conjuntos enumeráveis. Mostre que o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável. Conclua assim que $\mathbb{Z}$ enumerável implica em $\mathbb{Q}$ enumerável.

Exercício 1.3. Mostre por indução que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.4. Mostre por indução que se $x > -1$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta é a desigualdade de Bernoulli.

CAPÍTULO 2

# Topologia dos números reais

Neste capítulo, falaremos sobre números reais. Assumiremos aqui que os números reais são bem definidos e "existem", sem entrar em detalhes sobre a construção deste corpo. A idéia é apenas apresentar propriedades que os reais satisfazem. A seguir, falaremos sobre abertos e fechados nos reais.

## 2.1. Os números Reais

**2.1.1. Valor absoluto.** Para um número real $a$, o valor absoluto (ou módulo) de $a$ é dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Exemplo 2.1. Por definição $|5| = 5$, e $|-5| = -(-5) = 5$.

Lema 2.1.1. Algumas propriedades dos números reais:

(1) $|-a| = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(2) $|ab| = |a||b|$ para todo $a$, $b \in \mathbb{R}$.
(3) Dados $a$, $k \in \mathbb{R}$ temos que $|a| \leq k$ se e somente se $-k \leq a \leq k$.
(4) $-|a| \leq a \leq |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (1) Se $a = 0$, então $|0| = 0 = |-0|$. Se $a > 0$, então $-a < 0$ e logo $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|-a| = -a = |a|$.
(2) Exercício.
(3) Exercício.
(4) Tome $k = |a|$ no ítem (3) do lema. Então $|a| \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|$.

□

Lema 2.1.2 (Desigualdade Triangular). Para todo $a$, $b \in \mathbb{R}$ temos

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demonstração. Sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$. Logo, $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$. Pelo ítem (3) do Lema 2.1.1 temos que $|a + b| \leq |a| + |b|$, como queríamos demonstrar. □

**2.1.2. Noções de vizinhança.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\}$. Uma *vizinhança* de $a$ é qualquer conjunto contendo $V_\epsilon(a)$ para algum $\epsilon > 0$.

Exemplo 2.2. Seja $U = \{x : 0 < x < 1\}$. Se $a \in U$, e $\epsilon < \min\{a, 1 - a\}$, então $V_\epsilon(a) \subset U$. Logo $U$ é vizinhança de $a$.

Exemplo 2.3. Seja $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Então $I$ *não* é vizinhança de 0 pois para todo $\epsilon > 0$ temos $V_\epsilon(a) \not\subset I$. Entretanto, $I$ é vizinhança de 0.5 por exemplo.

### 2.1.3. Propriedades dos Reais.

DEFINIÇÃO 2.1.3. *Considere um conjunto $S \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é* cota superior *de $S$ se $s \leq u$ para todo $s \in S$. Analogamente, dizemos que $v \in \mathbb{R}$ é* cota inferior *de $S$ se $v \leq s$ para todo $s \in S$. Se um conjunto tem cota superior dizemos que ele é* limitado por cima ou superiormente*. Se um conjunto tem cota inferior dizemos que ele é* limitado por baixo ou inferiormente*. Se um conjunto tem cota superior e inferior, dizemos que ele é limitado.*

EXEMPLO 2.4. O conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ é limitado superiormente mas não inferiormente. De fato qualquer número não negativo é cota superior de $\mathbb{R}^-$, pois se $b \geq 0$, então $x \in \mathbb{R}^-$ implica que $x < 0 \leq b$. Por outro lado, nenhum número $a \in \mathbb{R}$ pode ser cota inferior pois sempre existe $y \in \mathbb{R}^-$ tal que $y < a$. Concluímos portanto que $\mathbb{R}^-$ não é limitado.

EXEMPLO 2.5. Usando argumentos como acima, vemos que $\mathbb{R}$ não é limitado nem superiormente nem inferiormente.

EXEMPLO 2.6. Seja $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Então qualquer número $b \geq 1$ é cota superior de $I$, e todo número $a \leq 0$ é cota inferior de $I$. De fato, nestes casos teríamos $a \leq x \leq b$ para todo $x \in I$. Logo, por definição, $I$ é limitado.

DEFINIÇÃO 2.1.4. *Se um conjunto $S$ é limitado por cima, chamamos de* supremo de $S$ *ou simplesmente* $\sup S$ *a menor de suas cotas superiores. Analogamente, se um conjunto $S$ é limitado por baixo, chamamos de* ínfimo de $S$ *ou simplesmente* $\inf S$ *a maior de suas cotas inferiores.*

Logo, se $u = \sup S$, então

(1) $s \leq u$ para todo $s \in S$.
(2) Se existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq v$ para todo $s \in S$, então $u \leq v$.

OBSERVAÇÃO. Segue-se da definição a unicidade do supremo e do ínfimo (se estes existirem).

LEMA 2.1.5. Seja $S \neq \emptyset$, e $u$ cota superior de $S$. Então $u = \sup S$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existir $s_\epsilon \in S$ tal que $u - \epsilon < s_\epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Longrightarrow$) Seja $u = \sup S$ e $\epsilon > 0$. Como $u - \epsilon < u$, então $u - \epsilon$ não é cota superior de $S$. Logo, existe um elemento $s_\epsilon \in S$ tal que $s_\epsilon > u - \epsilon$.

($\Longleftarrow$) Seja $u$ cota superior de $S$. Assuma que para todo $\epsilon$ existe $s_\epsilon \in S$ tal que $u - \epsilon < s_\epsilon$. Vamos então mostrar que $u = \sup S$.

Seja $v$ cota superior de $S$ com $v \neq u$. Se $v < u$, definimos $\epsilon = u - v$ e então $\epsilon > 0$ e existe $s_\epsilon \in S$ tal que $s_\epsilon >> u - \epsilon = v$. Isto é uma contradição com o fato de $v$ ser cota superior. Logo temos obrigatoriamente $v > u$, e $u$ é a menor das cotas superiores, i.e., $u = \sup S$. $\square$

EXEMPLO 2.7. $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ tem $1 = \sup I$ e $0 = \inf I$. Note que $\sup I \in I$ e $\inf I \in I$.

EXEMPLO 2.8. $U = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ tem $1 = \sup U$ e $0 = \inf U$. Note que neste caso $\sup I \notin U$ e $\inf I \notin U$.

**Propriedade do $\mathbb{R}$:** Todo conjunto não vazio em $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem um supremo em $\mathbb{R}$.

Observação. Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$: Se $x$, $y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Da mesma forma, existe $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

## 2.2. Intervalos e Pontos de Acumulação

Notação para intervalos:

(1) Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
(2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
(3) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
(4) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
(5) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
(6) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
(7) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
(8) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
(9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma sequência de intervalos $I_n$ é encaixantes se*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

Exemplo 2.9. Se $I_n = [0, 1/n]$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Exemplo 2.10. Se $I_n = (0, 1/n)$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Teorema 2.2.2. *[Teorema dos intervalos encaixantes] Para $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma sequência de intervalos fechados limitados e não vazios e encaixantes. Então existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Além disto, se $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, então $\xi$ é o único elemento da interseção.*

Demonstração. Temos $b_1 \geq a_n$ para todo $n$ pois $I_n \subset I_1$. Seja $\xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo $\xi \geq a_n$ para todo $n$. Queremos mostrar agora que $\xi \leq b_n$ para todo $n$. Suponha o contrário, i.e., que existe $b_k < \xi$ para algum $k$. Logo $b_k < a_m$ para algum $m$. Seja $p = \max\{k, m\}$. Então $a_p \geq a_m > b_k \geq b_p$ e temos $[a_p, b_p] = \emptyset$, uma contradição. Logo $a_n \leq \xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assumindo agora que $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, definimos $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então $\eta \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\eta \geq \xi$. Como $0 \leq \eta - \xi \leq b_n - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\eta = \xi$ pois $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. $\square$

Definição 2.2.3. *Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de* acumulação *de $S \subset \mathbb{R}$ se toda vizinhança $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ contém pelo menos um ponto de $S$ diferente de $x$.*

Exemplo 2.11. Se $S = (0, 1)$, então todo ponto em $[0, 1]$ é ponto de acumulação de $S$.

Exemplo 2.12. O conjunto $\mathbb{N}$ não tem ponto de acumulação.

Exemplo 2.13. O único ponto de acumulação de $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é o 0.

Exemplo 2.14. $S = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tem como pontos de acumulação o conjunto $S = [0, 1]$.

Exemplo 2.15. Seja $S \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e $u = \sup S$. Se $u \notin S$, então $u$ é ponto de acumulação de $S$, pois para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $x \in (u - \epsilon, u + \epsilon)$.

Teorema 2.2.4. *[Bolzano–Weiertrass] Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito e limitado tem pelo menos um ponto de acumulação.*

A seguir damos uma idéia da demonstração, antes de proceder formalmente. Os passos são os seguintes:

(1) $S \subset I_1 := [a, b]$ para algum $a$, $b \in \mathbb{R}$, pois $S$ é limitado.
(2) Seja $I_2$ um dos conjuntos $[a, (a + b)/2]$ ou $[(a + b)/2, b]$, tal que $I_2$ contenha infinitos pontos de $S$. Note que $I_2 \subset I_1$.
(3) Divida $I_2$ em duas partes e defina $I_3$ como sendo uma das partes tal que que contenha infinitos pontos de $S$. Por definição, $I_3 \subset I_2$.
(4) Prossiga assim definindo $I_4, \dots, I_n$ tais que $I_n \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$, e que $I_n$ contenha infinitos pontos de $S$.
(5) Usando Teorema dos intervalos encaixantes, seja $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.
(6) Mostre que $x$ é ponto de acumulação.

Demonstração. (do Teorema 2.2.4). Como $S$ é limitado, existe $I_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $S \subset I_1$. Note que $[a, (a+b)/2]/2$ ou $[(a+b)/2, b]$ ou contém infinitos pontos de $S$, e chame de $I_2$ tal intervalo. Da mesma forma, decomponha $I_2$ em dois subintervalos, e denomine por $I_3$ um dos subintervalos tal que $I_3 \cap S$ contenha infinitos pontos. Assim procedendo, obtemos uma sequência encaixante $I_n \subset \cdots \subset I_2 \subset I_1$. Pelo Teorema dos intervalos encaixantes, existe $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Temos agora que mostrar que $x$ é ponto de acumulação. Note que o comprimento de $I_n = (b - a)/2^{n-1}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $V = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Seja $n$ tal que $(b - a)/2^{n-1} < \epsilon$. Então $I_n \subset V$. Logo $V$ contém infinitos pontos de $S$, e $x$ é ponto de acumulação. □

## 2.3. Abertos e Fechados em $\mathbb{R}$

Definição 2.3.1. *Um conjunto $G \subset \mathbb{R}$ é* aberto *em $\mathbb{R}$ se para todo $x \in G$, existe uma vizinhança $V$ de $x$ com $V \subset G$. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado em $\mathbb{R}$ se seu complemento $\mathcal{C}(F) = \mathbb{R} \backslash F$ é aberto.*

Para mostrar que um conjunto $G$ é aberto em $\mathbb{R}$, basta mostrar que para todo $x \in G$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset G$. Para mostrar que $F$ é fechado, basta mostrar que para todo $x \notin F$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap F = \emptyset$.

Exemplo 2.16. $\mathbb{R}$ é aberto nos reais pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $(x - 1, x + 1) \in \mathbb{R}$. Note que tomamos $\epsilon = 1$.

Exemplo 2.17. O conjunto $(0, 1)$ é aberto em $\mathbb{R}$. De fato para qualquer $x \in (0, 1)$, seja $\epsilon = \min\{x/2, (1 - x)/2\}$. Então $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (0, 1)$.

Exemplo 2.18. $[0, 1]$ é fechado em $\mathbb{R}$ pois $\mathcal{C}([0, 1]) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ é aberto.

Exemplo 2.19. $(0, 1]$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.20. $\emptyset$ é aberto por "vacuidade".

Exemplo 2.21. $\emptyset$ é fechado pois seu complementar $\mathcal{C}(\emptyset) = \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$.

LEMA 2.3.2. Duas propriedades fundamentais de conjuntos abertos são

(1) A união arbitrária de abertos é aberta.
(2) A interseção finita de abertos é aberta.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Seja $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família arbitrária de abertos, e seja $G = \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ e $x \in G$. Então $x \in G_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Como $G_{\lambda_0}$ é aberto, então existe uma vizinhança $V$ de $x$ tal que $V \subset G_{\lambda_0}$. Logo $V \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = G$ e então $G$ é aberto.

(2) Sejam $G_1$, $G_2$ abertos e $G = G_1 \cap G_2$. Seja $x \in G$. Logo $x \in G_1$ e $x \in G_2$. Como $G_1$ é aberto, seja $\epsilon_1$ tal que $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subset G_1$. Da mesma forma, sendo $G_2$ aberto, seja $\epsilon_2$ tal que $(x - \epsilon_2, x + \epsilon_2) \subset G_2$. Definindo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, temos $\epsilon > 0$ e $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset G_1 \cap G_2 = G$. Logo $G$ é aberto. O caso geral, para um número finito de conjuntos segue por indução.

□

COROLÁRIO 2.3.3. Como consequência do resultado acima temos:

(1) A interseção arbitrária de fechados é fechada.
(2) A união finita de fechados é fechada.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Seja $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de fechados em $\mathbb{R}$, e seja $F = \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Então $\mathcal{C}(F) = \cup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}(F_\lambda)$ é uma união de abertos. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e por definição, $F$ é fechado.

(2) Se $F_1, \dots, F_n$ são fechados em $\mathbb{R}$ e $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, então $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_1) \cap \cdots \cap \mathcal{C}(F_n)$. Como a interseção finita de abertos é aberta, e $\mathcal{C}(F_i)$ são abertos, então $\mathcal{C}(F)$ é aberto. Logo $F$ é fechado.

□

EXEMPLO 2.22. $I_n = (0, 1 - 1/n)$ é aberto e $\cup_{n=1}^\infty I_n = (0, 1)$ também é aberto.

EXEMPLO 2.23. $G_n = (0, 1 + 1/n)$ é aberto, ao contrário de $\cap_{n=1}^\infty G_n = (0, 1]$.

EXEMPLO 2.24. $F_n = (1/n, 1)$ é fechado, mas $\cup_{n=1}^\infty F_n = (0, 1]$ não é.

Uma caracterização útil de fechados utiliza o conceito de pontos de acumalação, como o resultado a seguir indica.

TEOREMA 2.3.4. *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.*

DEMONSTRAÇÃO. ($\Longrightarrow$) Seja $F$ um fechado em $\mathbb{R}$, e $x$ ponto de acumulaçãode $F$. Temos que mostrar que $x \in F$. De fato, se $x \notin F$, então $x \in \mathcal{C}(F)$. Mas como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, então existe $\epsilon$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \mathcal{C}(F)$. Logo $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap F = \emptyset$ e $x$ não é ponto de acumulação, uma contradição. Portanto $x \in F$.

($\Longleftarrow$)Assumimos agora que $F$ contém todos os seus pontos de acumulação. Considere então um ponto $y \in \mathcal{C}(F)$. Então $y$ não é ponto de acumulaçãode $F$, e existe $\epsilon > 0$ tal que $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset \mathcal{C}(F)$. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e concluímos que $F$ é fechado. □

Uma caracterização para conjuntos abertos envolve o uso de ponto de fronteira. Dizemos que um ponto $x \in G$ é *ponto de fronteira* se toda vizinhança de $x$ contém pontos em $G$ e no conjunto complementar de $G$. Temos então o seguinte resultado.

TEOREMA 2.3.5. *Seja $G \subset \mathbb{R}$. Mostre que $G$ é aberto se e somente se $G$ não contém nenhum de seus pontos de fronteira.*

DEMONSTRAÇÃO. ( $\Longrightarrow$ ) Assuma $G$ aberto e $x \in G$. Então existe aberto $U \subset G$. Então $x$ não é ponto de fronteira.

( $\Longleftarrow$ ) Assuma que $G$ não contém nenhum de seus pontos de fronteira. Se $G$ é vazio, então é aberto. Assuma então que $G$ é não vazio. Seja $x \in G$. Como $G$ não contém pontos de fronteira, existe vizinhança $U$ de $x$ em $G$ tal que $U \subset G$. Logo $G$ é aberto. ☐

## 2.4. Conjuntos Compactos

Um importante conceito em análise é o de *conjuntos compactos*. Em espaços de dimensão finita, estes conjuntos são na verdade conjuntos fechados limitados, e a noção de compacidade ajuda apenas nas demonstrações, tornando-as mais diretas. Entretanto, em dimensão infinita, nem todo fechado limitado é compacto, e algumas propriedades que continuam valendo para compactos, deixam de valer para fechados limitados.

Antes de definirmos compactos, precisamos introduzir a noção de cobertura aberta.

DEFINIÇÃO 2.4.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Chamamos $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de* cobertura aberta *de $A$ se para todo $\alpha$ temos $G_\alpha$ conjunto aberto, e $A \subset \cup_\alpha G_\alpha$.*

EXEMPLO 2.25. Como $(0,1) \subset \cup_{i=1}^\infty (1/i, 1)$, então $\mathcal{G} = \{(1/i,1)\}_{i=1}^\infty$ é uma cobertura aberta de $(0,1)$.

EXEMPLO 2.26. Se para $x \in \mathbb{R}$, temos $G_x = (x-1, x+1)$, então $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2.4.2. *Dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se para toda cobertura aberta de $K$ existir uma subcobertura finita de $K$ em $\mathcal{G}$. Em outras palavras, se existe cobertura aberta $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de $K$ tal que $K \subset \cup_\alpha G_\alpha$, então existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.*

Note que para mostrar que um determinado conjunto é compacto precisamos provas que para *toda* cobertura aberta existe subcobertura finita. Para mostar que não é compacto basta achar uma cobertura que não possui subcobertura finita.

EXEMPLO 2.27. Seja $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ conjunto finito em $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{G}\{G_\alpha\}$ coleção de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ tais que $K \subset \cup_\alpha G_\alpha$, i.e., $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de $K$. Para $i = 1, \dots, n$, seja $G_i \in \mathcal{G}$ tal que $x_i \in G_i$ (tal conjunto sempre existe pois $\mathcal{G}$ é cobertura de $K$). Então $G_1, \dots, G_n$ geram uma subcobertura finita de $K$. Logo $K$ é compacto, e concluímos que todo conjunto finito é compacto.

EXEMPLO 2.28. O conjunto $(0,1)$ não é compacto. De fato $(0,1) \subset \cup_{i=1}^\infty (1/i, 1)$, mas se existisse $\{G_{n_1}, \dots, G_{n_p}\}$ tal que $(0,1) \subset \cup_{i=1}^p (1/n_i, 1)$, então $(0,1) \subset (1/N^*, 1)$, onde $N^* = \max\{n_1, \dots, n_p\} > 0$, um absurdo.

TEOREMA 2.4.3 (Heine–Borel). *Um conjunto em $\mathbb{R}$ é compacto se e somente se é fechado e limitado.*

DEMONSTRAÇÃO. ( $\Longrightarrow$ ) Assuma $k \subset \mathbb{R}$ conjunto compacto, e seja $H_m = (-m, m)$. Então $K \subset_{i=1}^{\infty} H_m$. Como $K$ é compacto, a cobertura acima possui subcobertura finita e portanto existe $M$ tal que $K \subset H_M$. Logo $K$ é limitado.

Para mostrar que é também fechado, seja $x \in \mathcal{C}(K)$ e $G_n = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| > 1/n\}$. Logo $G_n$ é aberto e $\mathbb{R}\backslash\{x\} = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Mas como $x \notin K$, então $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Usando agora que $K$ é compacto, extraimos uma subcobertura finita e temos $K \subset \cup_{n=1}^{N^*} G_n = G_{N^*}$. Portanto $K \cap (x - 1/N^*, x + 1/N^*)\emptyset$ e concluímos que $(x - 1/N^*, x + 1/N^*) \subset \mathcal{C}(K)$. Logo $\mathcal{C}(K)$ é aberto e $K$ é fechado.

( $\Longleftarrow$ ) **Parte (i)** Primeiro assumimos $K = [-l, l]$, e $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ cobertura aberta de $K$. Seja

$$S = \{c \in [-l, l] : [-1, c] \text{ pode ser coberto por finitos abertos de } \mathcal{G}\}.$$

Então $S$ é não vazio, pois $l \in S$, e é limitado. Seja $s = \sup S$. Então $s \in [-l, l]$, pois se $s > l$ teríamos $l$ como cota superior de $S$ menor que o supremo, um absurdo.

Seja então $G_{\bar{\alpha}}$ elemento de $\mathcal{G}$ tal que $s \in G_{\bar{\alpha}}$. Sabemos que tal $G_{\bar{\alpha}}$ existe pois $\mathcal{G}$ é cobertura de $[-l, l]$ e $s \in [-l, l]$.

Primeiro afirmamos que $s \in S$, pois caso contrário suponha $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ subcobertura finita de $S$. Então teríamos $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}, G_{\bar{\alpha}}\}$ subcobertura finita de $[-l, s]$.

Queremos mostrar agora que $s = l$. Assumindo $s < l$, e como $G_{\bar{\alpha}}$ é aberto então existe $\epsilon$ tal que $s + \epsilon \in G_{\bar{\alpha}}$, e $s + \epsilon < l$, logo $s + \epsilon \in S$, uma contradição com a definição de supremo.

**Parte (ii)** Consideramos agora o caso geral, onde $K$ é fechado e limitado, e $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ é cobertura aberta de $K$. Como $K$ é fechado, então $\mathcal{C}(K)$é aberto, e como $K$ é limitada, então existe $l \in \mathbb{R}$ tll que $K \subset [-l, l]$. Logo $\{G_\alpha, \mathcal{C}(K)\}$ geram uma cobertura aberta de $[-l, l]$. Pela **Parte (i)**, existe uma subcobertura $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}, \mathcal{C}(K)\}$ de $[-l, l]$, e portanto também de $K$ pois $K \subset [-l, l]$. Como $K \cap \mathcal{C}(K) = \emptyset$, então $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ é uma cobertura finita de $K$. $\square$

## 2.5. Exercícios

EXERCÍCIO 2.1. Demonstre os ítens (2) e (3) no Lema 2.1.1.

EXERCÍCIO 2.2. Mostre que se $x \neq y$ são números reais, então existem vizinhanças $U$ de $x$ e $V$ de $y$ tais que $U \cap V = \emptyset$.

EXERCÍCIO 2.3. Mostre que se $U$ e $V$ são vizinhanças de $x$, então $U \cap V$ é vizinhança de $x$.

EXERCÍCIO 2.4. Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é de fronteira de $A$ se toda vizinhança de $x$ contém pontos de $A$ e de $\mathcal{C}(A)$. Mostre que $A$ é aberto se e somente não contém nenhum de seus pontos de fronteira. Mostre que $A$ é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de fronteira.

EXERCÍCIO 2.5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e as funções $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(X)$ e $g(X)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : X \to \mathbb{R}$ por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Mostre que $\sup(f+g)(X) \leq \sup f(X)+\sup g(X)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

EXERCÍCIO 2.6. Aponte na demonstração do Teorema 2.2.2 quais o(s) argumento(s) que não é (são) válido(s) se considerarmos uma sequência encaixante de intervalos abertos.

Exercício 2.7. Mostre que um ponto $x \in \mathbb{R}$ é de acumulaçãode um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se e somente se toda vizinhança de $x$ contiver infinitos pontos de $A$.

CAPÍTULO 3

# Sequências

## 3.1. Definição e resultados preliminares

Uma sequência em $\mathbb{R}$ é simplesmente uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Portanto $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ indica uma sequência de números reais, que escrevemos também como $(x_n)$, ou ainda $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Para indicar o n-ésimo valor da sequência escrevemos simplesmente $x_n$.

Exemplo 3.1. $x_n = (-1)^n$ define a sequência $(-1, 1-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.

Exemplo 3.2. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Portanto temos $(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

Podemos realizar com sequências várias das operaçõesque realizamos com números reais, como por exemplo somar, subtrair, etc. Sejam por exemplo $(x_n)$ e $(y_n)$ duas sequências em $\mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$. Então definimos

$$(x_n)+(y_n) = (x_n+y_n), \qquad (x_n)-(y_n) = (x_n-y_n), \qquad (x_n)\cdot(y_n) = (x_n y_n), \qquad c(x_n) = (cx_n).$$

Exemplo 3.3. Se $x_n = (2, 4, 6, 8, \dots)$ e $(y_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, então $x_n \cdot y_n = (2, 2, 2, \cdots)$.

A primeira pergunta que surge quando tratamos de sequências é quanto à convergência destas, isto é, se quando $n$ aumenta, os termos $x_n$ se aproximam de algum valor real. Note que para isto, não importa o que acontece com finitos termos da sequência, mas sim seu comportamento assintótico com respeito a $n$. Em outras palavras queremos determinar o comportamento das sequências no "limite".

Definição 3.1.1. *Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é* limite de uma sequência $(x_n)$, *se para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_n| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Escrevemos neste caso que $x_n \to x$, ou que $x = \lim x_n$, ou ainda*

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

*De forma resumida, $x_n \to x$ se para todo $\epsilon$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \implies |x - x_n| < \epsilon.$$

*Se uma sequência não tem limite, dizemos que ela diverge ou é divergente.*

Exemplo 3.4. Se $x_n = 1$, entao $\lim x_n = 1$. De fato, dado $\epsilon > 0$, para todo $n \geq 1$ temos $|x_n - 1| = 0 < \epsilon$.

Exemplo 3.5. $\lim(1/n) = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $N$ tal que $1/N < \epsilon$. Logo, para todo $n > N$ temos $|1/n - 0| = 1/n < 1/N < \epsilon$.

Exemplo 3.6. $(0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ não converge para 0. De fato, tome $\epsilon = 1$. Então para todo $N \in \mathbb{N}$ temos $2N > N$ e $x_{2N} = 2$. Portanto $|x_{2N} - 0| = 2 > \epsilon$.

Observe que diferentes situações ocorrem nos exemplos acima. No primeiro, a sequência é constante, e a escolha de $N$ independe de $\epsilon$. Já no exemplo seguinte, $N$ claramente depende de $\epsilon$.

A seguir, no exemplo 3.6 o objetivo é mostar que um certo valor $x$ *não* é o limite da sequência $(x_n)$. Mostramos então que existe pelo menos um certo $\epsilon > 0$ tal que para todo $N$, conseguimos achar $n > N$ tal que $|x_n - x| > \epsilon$. Note que o que fizemos foi *negar* a convergência.

Talvez a segunda pergunta mais natural em relação aos limites de sequências é quanto a unicidade destes, quando existirem. A respota é afirmativa, como mostra o resultado abaixo.

Teorema 3.1.2 (Unicidade de limite). *Uma sequência pode ter no máximo um limite.*

Demonstração. Considere que $(x_n)$ é uma sequência de reais tal que $x_n \to x$ e $x_n \to x'$, com $x \neq x'$. Sejam $\epsilon = |x - x'|/2 > 0$, e sejam $N$ e $N' \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n > N$ e $|x_n - x'| < \epsilon$ para todo $n > N'$. Logo, se $n > \max\{N, N'\}$, então

$$|x - x'| \leq |x - x_n| + |x_n - x'| < 2\epsilon = |x - x'|.$$

Como um número não pode ser estritamente menor que ele mesmo, temos uma contradição. Portanto $x = x'$ e o limite é único. □

Para mostrar convergência, podemos usar o resultado seguinte.

Teorema 3.1.3. *Seja $(x_n)$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Então as afirmativas são equivalentes.*

(1) *$(x_n)$ converge para $x$.*
(2) *Para toda vizinhança $V$ de $x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \implies x_N \in V.$$

Demonstração. Fica como exercício. □

As vezes, uma sequência se aproxima de algum valor de forma mais lenta que alguma outra sequência que converge para 0. É possível assim garantir convêrgencia, como o resultado a seguir nos mostra.

Lema 3.1.4. Seja $(a_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ convergente para 0. Se para $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ existir $c > 0$ tal que

$$|x_n - x| \leq c|a_n| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

então $x_n \to x$.

Demonstração. Como $(a_n)$ converge, dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \epsilon/c$ para todo $n > N$. Logo

$$|x_n - x| \leq c|a_n| < \epsilon \quad \text{para todo } n > N,$$

e $\lim x_n = x$. □

Corolário 3.1.5. Seja $(a_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ convergente para 0. Se para $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ existir $c > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| \leq c|a_n| \quad \text{para todo } n \geq N,$$

então $x_n \to x$.

Exemplo 3.7. Seja $x_n = (2/n)\sin(1/n)$. Enão

$$|x_n - 0| \le 2\frac{1}{n}.$$

Como $1/n \to 0$, podemos usar o lema acima para garantir que $\lim[(2/n)\sin(1/n)] = 0$.

Uma outra noção importante é o de limitação de uma sequência. Neste caso, mesmo quando a sequência não converge, podemos conseguir alguns resultados parciais, como veremos mais a seguir.

Definição 3.1.6. *Dizemos que uma sequência $(x_n)$ é limitada quando existe um número real $M$ tal que $|x_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Um primeiro resultado intuitivo é que toda sequência convergente é limitada. De fato, é razoável pensar que se a sequência converge, ela não pode ter elementos arbitrariamente grandes em valor absoluto.

Teorema 3.1.7. *Toda sequência convergente é limitada*

Demonstração. Seja $(x_n)$ sequência convergente e seja $x$ seu limite. Seja $\epsilon = 1$. Como $(x_n)$ converge, existe $N$ tal que $|x - x_n| < 1$ para todo $n > N$. Logo, usando a desigualdade triangular temos

$$|x_n| \le |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \text{para todo } n > N.$$

Falta agora limitar os $N$ primeiros termos da sequência. Seja então

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_N|, 1 + |x|\}.$$

Portanto $|x_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Outro resultado importante trata de limites de sequências que são resultados de operações entre sequências. Por exemplo, daads duas sequências convergente, o limite da soma das sequências é a soma dos limites. E assim por diante.

Lema 3.1.8. Seja $(x_n)$ e $(y_n)$ tais que $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$. Então

(1) $\lim(x_n + y_n) = x + y$.
(2) $\lim(x_n - y_n) = x - y$.
(3) $\lim(x_n y_n) = xy$.
(4) $\lim(cx_n) = cx$, para $c \in \mathbb{R}$.
(5) se $y_n \neq 0$ para todo $n$ e $y \neq 0$, então $\lim(x_n/y_n) = x/y$.

Demonstração. (1) Dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon/2$ e $|y_n - y| < \epsilon/2$ para todo $n \ge N$. Logo

$$|x_n + y_n - (x + y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon \quad \text{para todo } n \ge N.$$

(2) A demonstração é basicamente a mesma de (1), tomando-se o devido cuidado com os sinais.

(3) Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$|x_n y_n - xy| \le |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| = |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|.$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| < M$ e $|y| < M$. Tal constante $M$ existe pois como $(x_n)$ converge, ela é limitada. Agora, dado $\epsilon > 0$, seja $N$ tal que $|y_n - y| < \epsilon/(2M)$ e $|x_n - x| < \epsilon/(2M)$ para todo $n \geq N$. Logo,

$$|x_n y_n - xy| \leq M[|y_n - y| + |x_n - x|] < \epsilon,$$

para todo $n \geq N$.

Deixamos (4) e (5) como exercícios para o leitor. □

Observação. Os resultados do lema acima continuam válidos para um número finito de somas, produtos, etc.

Outros resultados importantes para tentar achar um "candidato" limite vêm a seguir. O primeiro nos diz que se temos uma sequência de números positivos, então o limite, se existir, tem que ser não negativo, podendo ser zero. A seguir, aprendemos que se temos uma sequência "sanduichadas" entre outras duas sequências convergentes que tem o mesmo limite, então a sequência do meio converge e tem também o mesmo limite.

Lema 3.1.9. Seja $(x_n)$ convergente com $\lim x_n = x$. Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0$ para todo $n > N$, então $x \geq 0$.

Demonstração. (por contradição) Assuma que $x < 0$. Seja então $\epsilon = -x/2 > 0$. Como $(x_n)$ converge para $x$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n > N$. Logo, $x_{N+1} \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, isto é, $x_{N+1} < x + \epsilon = x/2 < 0$. Obtivemos então uma contradição pois $x_{N+1}$ não é negativo. □

Corolário 3.1.10. Se $(x_n)$ e $(x_n)$ são convergentes com $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, e se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq y_n$ para todo $n > N$, então $x \geq y$.

Demonstração. Se $z_n = x_n - y_n$, então $\lim z_n = \lim x_n - \lim y_n = x - y$. O presente resultado segue então do Lema 3.1.9. □

Lema 3.1.11 (sanduíche de sequências). Sejam $(x_n)$, $(y_n)$ e $(z_n)$ sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n > N$, para algum $N \in \mathbb{N}$. Assuma ainda que $(x_n)$ e $(z_n)$ convergem com $\lim x_n = \lim z_n$. Então $(y_n)$ converge e $\lim y_n = \lim x_n = \lim z_n$.

Demonstração. Seja $a = \lim x_n = \lim z_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ e $|z_n - a| < \epsilon$ para todo $n > N$. Logo

$$-\epsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \epsilon \implies |x_n - a| < \epsilon$$

para todo $n > N$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.8. $(n)$ diverge pois não é limitada.

Exemplo 3.9. Seja $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$. Mostraremos que $(S_n)$ não é limitada, e portanto divergente. Note que

$$\begin{aligned}
x_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{n} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{n} + \cdots + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{4} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{8} + \cdots + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Logo $(S_n)$ não é limitada, e portanto diverge.

Outra forma de ver que a sequência acima diverge é por indução. Quero mostrar que $S_{2^n} \geq 1 + n/2$. Note que $S_2 = 1 + 1/2$. Assumindo que $S_{2^{n-1}} \geq 1 + (n-1)/2$ temos

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{(n-1)}{2} + \frac{1}{2} > 1 + \frac{n}{2},$$

como queríamos demonstrar. Mais uma vez a conclusão é que $(S_n)$ não é limitada, logo diverge.

Exemplo 3.10. $\lim_{n\to\infty}\big((2n+1)/n\big) = 2$. De fato,

$$\frac{2n+1}{n} = (2) + (\frac{1}{n}).$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2) = 2$ e $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, nós obtemos o resultado.

Exemplo 3.11. $\lim_{n\to\infty}\big(2n/(n^2+1)\big) = 0$, pois

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2/n}{1+1/n^2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2/n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2) = 1 \neq 0$, podemos aplicar o resultado sobre quociente de sequências.

Exemplo 3.12. A sequência

$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

converge. Primeiro note que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}. \tag{3.1.1}$$

Para $n = 1$ o resultado (3.1.1) é trivial. Assuma (3.1.1) vedadeiro para $n = k$. Temos então que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k^2+k}{2} + k + 1 = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2},$$

e portanto fórmula (3.1.1) é verdadeira. Temos então que

$$x_n = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2n}\right).$$

Logo $(x_n)$ é soma de duas sequências convergentes, $(1/2)$ e $(1/2)(1/n)$ e
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.13. Seja $(x_n)$ sequência convergente em $\mathbb{R}$,e seja $x \in \mathbb{R}$ seu limite. Então a sequência definida por
$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$
converge e tem $x$ como seu limite.

Sem perda de generalidade, supomos que $(x_n)$ converge para zero. Para o caso geral quando $(x_n)$ converge para $x$ basta tratar a sequência $(x_n - x)$.

Seja $S_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$. Como $(x_n)$ converge, então é limitada. Seja $M$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $N^*$ tal que $M/N^* < \epsilon$ e $\sup\{|x_n| : n \geq N^*\} < \epsilon$. Então, temos $S_n = \check{S}_n + \hat{S}_n$, onde
$$\check{S}_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{N^*}), \qquad \hat{S}_n = \frac{1}{n}(x_{N^*} + x_{N^*+1} + \cdots + x_n).$$
Então $(S_n)$ é a soma de duas sequências convergentes. De fato para $n > (N^*)^2$, temos $|\check{S}_n| \leq N^* M/n \leq M/N^* < \epsilon$. Além disso, $|\hat{S}_n| < \epsilon(n - N^*)/n < \epsilon$. Portanto $(S_n)$ converge.

Exemplo 3.14. $\lim_{n\to\infty}\big((\sin n)/n\big) = 0$ pois como $-1 \leq \sin n \leq 1$, então
$$-1/n \leq (\sin n)/n \leq 1/n,$$
e o resultado segue do lema 3.1.11.

Outro resultado importante refere-se à convergencia do valor absoluto de sequências: se uma sequência converge, entao a sequência de valores absolutos também converge. A reciproca *não* é verdadeira. Basta considerar como contra-exemplo a sequência $\big((-1)^n\big)$. Neste caso a sequência diverge mas a sequência de seus valores absolutos converge.

Lema 3.1.12. Seja $(x_n)$ convergente. Então $(|x_n|)$ também o é.

Demonstração. Exercício. ☐

Lema 3.1.13 (teste da razão). Seja $(x_n)$ sequência de números positivos tal que $(x_{n+1}/x_n)$ converge e $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) < 1$. Então $(x_n)$ converge e $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

Demonstração. Seja $L = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n)$. Então, por hipótese, $L < 1$. Seja $r$ tal que $L < r < 1$. Portanto dado $\epsilon = r - L > 0$, existe $N$ tal que $x_{n+1}/x_n < L + \epsilon = r$ para todo $n \geq N$. Logo,
$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < x_{n-2} r^3 < \cdots < x_N r^{n-N+1} \quad \text{para todo } n \geq N.$$
Se $c = x_N r^{-N}$. , então $0 < x_{n+1} < c r^{n+1}$. O resultado segue do Corolário 3.1.5, pois como $r < 1$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. ☐

Corolário 3.1.14. Seja $(x_n)$ tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$
existe e $L > 1$. Então para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $N^* \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq N^* \implies |x_n| > C.$$

Demonstração. basta considerar o teste da razão para $y_n = 1/x_n$. Neste caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}} = \frac{1}{L} < 1.$$

Logo $(y_n)$ converge para zero, e para todo $C \in \mathbb{R}^+$ existe $N^*$ tal que

$$n \geq N^* \implies |y_n| < \frac{1}{C}.$$

Portanto para $n \geq N^*$ temos $|x_n| > C$ e $(x_n)$ não é limitada e não converge.

□

Exemplo 3.15. Seja $(x_n) = n/2^n$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pelo teste da razão temos $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$

Exemplo 3.16. Note que para $x_n = 1/n$, temos $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$ e $(x_n)$ converge. Entretanto, para $x_n = n$, temos $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$ mas $(x_n)$ *não convergente*. Portanto o teste não é conclusivo quando o limite da razão entre os termos é um.

## 3.2. Limite superior e inferior

Uma noção importante tratando-se de sequências é a de limites superiores ($\limsup$) e inferiores ($\liminf$), que nos dá informações sobre sequências limitadas mesmo quando estas não são convergentes.

Seja $(x_n)$ sequência limitada de reais, e defina

$$V = \{v \in \mathbb{R} : \text{existem finitos } n \in \mathbb{N} \text{ tais que } x_n > v\}.$$

Definimos então

$$\limsup x_n = \inf V.$$

De forma análoga, se

$$W = \{v \in \mathbb{R} : \text{existem finitos } n \in \mathbb{N} \text{ tais que } x_n < v\},$$

definimos

$$\liminf x_n = \sup W.$$

Lema 3.2.1. Seja $(x_n)$ sequência de reais limitada. Então $(x_n)$ converge para $x$ se e somente se $\limsup x_n = \liminf x_n = x$.

Exemplo 3.17. Seja $(x_n) = (-1)^n$. Então $\liminf x_n = -1$ e $\limsup x_n = 1$.

Exemplo 3.18. Seja

$$(z_n) = \left((-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Então $\liminf z_n = -1$ e $\limsup z_n = 1$.

## 3.3. Sequências Monótonas

Um classe muito especial de seqiencias ]'e a de sequancias monótonas. Uma sequência monótona é tal que seus valores não "oscilam", i.e., eles ou nunca diminuem ou nunca aumentam. Pode-se ver que a definicao de sequência monótona é restritas a uma dimensao.

DEFINIÇÃO 3.3.1. *Dizemos que uma sequência* $(x_n)$ *é* não decrescente *se* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \dots$, *e que uma sequência* $(x_n)$ *é* não crescente *se* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \dots$. *Finalmente, uma sequência é* monótona *se for crescente ou decrescente.*

EXEMPLO 3.19. $(1, 2, 3, 4, \dots)$ e $(1, 2, 3, 3, 3, 3, \dots)$ são crescentes.

EXEMPLO 3.20. $(1/n)$ é decrescente.

EXEMPLO 3.21. $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ não é monótona.

TEOREMA 3.3.2. *Uma sequência monótona é convergente se e somente se é limitada.*
*Além disso, se* $(x_n)$ *é não decrescente, então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Da mesma forma, se* $(x_n)$ *é não crescente, então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEMONSTRAÇÃO. ( $\Longrightarrow$ ) Já vimos que toda sequência convergente é limitada.
( $\Longleftarrow$ ) Assuma $(x_n)$ não decrescente e limitada. Seja $x = \sup x_n : n \in \mathbb{N}$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N$ tal que $x - \epsilon < x_N \leq x < x + \epsilon$, pois $x$ é o supremo. Logo, para todo $n > N$ temos $x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x < x + \epsilon$, portanto $x_n$ converge para $x$. Se a sequência for não-crescente, a demonstração é análoga. □

TEOREMA 3.3.3. *Uma sequência de números reais* $(x_n)$, *monótona não decrescente e limitada converge para "seu supremo", i.e., converge para* $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (que existe pois a sequência é limitada). Então pela definição de supremo, para todo $\epsilon > 0$, existe $N^* \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N^*} \in (x - \epsilon, x)$. Logo como a sequência é monótona não decrescente, temos

$$n > N^* \implies x_n > x_{N^*} > x - \epsilon.$$

Mas para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n \leq x$ por definição de supremo. Logo

$$n > N^* \implies x_n > x_{N^*} > x - \epsilon \quad \text{e } x_n < x + \epsilon \implies x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

□

EXEMPLO 3.22. $(a^n)$ diverge se $a > 1$ pois é ilimitada.

EXEMPLO 3.23. $(a^n)$ converge se $0 < a \leq 1$ pois é monótona decrescente e limitada. Além disso, $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$, pois $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

EXEMPLO 3.24. (Bartle?) Seja $y_1 = 1$ e $y_{n+1} = (1 + y_n)/3$. Mostraremos que $(y_n)$ é convergente e achamos seu limite. Note que $y_2 = 2/3 < 1 = y_1$. Vamos mostrar por indução que $0 < y_{n+1} < y_n$. Esta afirmativa vale para $n = 1$. Assuma verdadeira para $n = k - 1$, isto é $0 < y_k < y_{k-1}$. Então para $n = k$ temos

$$y_{k+1} = (1 + y_k)/3 < (1 + y_{k-1})/3 = y_k,$$

e como $y_k > 0$, então $y_{k+1} > 0$, como queríamos. Portanto a sequência é monótona não crescente e limitada inferiormente por zero. Portanto converge. Seja $y$ seu limite. Então

$$y = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + y_n)/3 = (1 + y)/3.$$

Logo $y = 1/2$.

Exemplo 3.25. Seja $y_1 = 1$, e $y_{n+1} = (2y_n + 3)/4$. Note que $y_2 = 5/4 > y_1$. Para mostrar que $y_{n+1} > y_n$ em geral, usamos indução. Note que para $n = 1$ o resultado vale. Assuma agora que valha também para $n = k$ para algum $k$, i.e., $y_{k+1} > y_k$. Então

$$y_{k+2} = \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) > \frac{1}{4}(2y_k + 3) = y_{k+1}.$$

Logo, por indução, $y_{n+1} > y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $(y_n)$ é não decrescente. Para mostrar que é limitada, note que $|y_1| < 2$. Mais uma vez usamos indução a fim de provar que em geral $|y_n| < 2$. Assuma que $|y_k| < 2$. Logo,

$$|y_{k+1}| = |\frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3)| < \frac{1}{4}(2|y_{k+1}| + 3) < \frac{7}{4} < 2.$$

Por indução, segue-se que $|y_n| < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(y_n)$ é monótona e limitada, então é convergente. Seja $y = \lim_{n\to\infty}(y_n)$. Então

$$y = \lim_{n\to\infty}(y_n) = \lim_{n\to\infty}((2y_n + 3)/4) = ((2y + 3)/4).$$

resolvendo a equação algébrica acima, temos $y = 3/2$.

Exemplo 3.26. Assuma $0 < a < b$, e defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Seja

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$

para $n \in \mathbb{N}$. Então $(a_n)$ e $(b_n)$ convergem para o mesmo limite.

Vamos mostrar por indução que

$$a_{i+1} > a_i, \quad a_i < b_i, \quad b_{i+1} < b_i \qquad \text{para } i = 0, 1, \dots. \tag{3.3.1}$$

Para $i = 0$ temos $a_0 = a < b = b_0$. Logo, usando que $y > x$ implica em $\sqrt{y} > \sqrt{x}$, e que $a_0$ e $b_0$ são positivos, temos $a_1 = \sqrt{a_0 b_0} > a_0$. Além disso, $b_1 = (a_0 + b_0)/2 < b_0$ pois $a_0 < b_0$. Portanto (3.3.1) vale para $i = 0$. Assuma que valha também para $i = n$. Então $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > a_n$. Além disso, $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 < b_n$ e $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 > a_n$ pois $a_n < b_n$ por hipótese. Então $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} < \sqrt{b_{n+1} b_n} < b_{n+1}$. Logo (3.3.1) vale também para $i = n + 1$. Portanto temos que $(a_n)$ é monótona não decrescente e limitada superiormente, enquanto $(b_n)$ é monótona não crescente e limitada superiormente. Ambas então convergem e sejam $A$ e $B$ seus limites. Neste caso teremos

$$A = \sqrt{AB}, \quad B = \frac{1}{2}(A + B).$$

e portanto $A = B$.

## 3.4. Subsequências e Teorema de Bolzano–Weierstrass

Seja $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ e $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \dots$ sequência de números naturais. Então dizemos que $(x_{n_k})$ é uma *subsequência* de $(x_n)$.

Exemplo 3.27. Se $(x_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, então $(1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots)$ e $(x_{2^n})$ são subsequências de $(x_n)$.

Um primeiro resultado relacionado com subsequências nos diz que se uma sequência converge para um determinado limite, entao todas as subsequências convergem e têm o mesmo limite.

Lema 3.4.1. Se uma sequência $(x_n)$ converge para $x$, então todas as subsequências de $(x_n)$ são convergentes e têm o mesmo imite $x$.

Demonstração. Seja $(x_n)$ subsequência convergente, e seja $x = \lim_{x\to\infty}(x_n)$. Dado $\epsilon > 0$, seja $N$ tal que

$$|x - x_n| < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N. \tag{3.4.1}$$

Seja $(x_{n_k})$ subsequência de $(x_n)$ e seja $N_k \in \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ tal que $N_k \geq N$. Então, se $n_k > N_k$, temos por (3.4.1) que

$$|x - x_{n_k}| < \epsilon,$$

pois $N_k \geq N$. Logo $(x_{n_k})$ converge para $x$. □

Exemplo 3.28. $\big((-1)^n\big)$ diverge pois se convergisse para algum $x \in \mathbb{R}$, suas subsequências convirgiriam este mesmo valor. Mas

$$\lim_{n\to\infty}\big((-1)^{2n}\big) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\big((-1)^{2n+1}\big) = -1.$$

Exemplo 3.29. $(a^n)$ é não crescente e limitada para $0 < a < 1$. Logo é convergente. Seja $l = \lim_{n\to\infty}(a^n)$. Então

$$l = \lim_{n\to\infty}(a^{2n}) = \lim_{n\to\infty}(a^n) \lim_{n\to\infty}(a^n) = l^2.$$

Logo $l = 0$ ou $l = 1$. Como a sequência é não crescente e limitada superiormente por $a < 1$, então $l = 1$ não pode ser limite. Logo $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$.

Lema 3.4.2 (Critério de divergência). Seja $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) $(x_n)$ não converge para $x \in \mathbb{R}$.
(2) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$, com $n_k > N$ e $|x - x_{n_k}| \geq \epsilon$.
(3) Existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ tal que $|x - x_{n_k}| > \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Se $(x_n)$ não converge para $x$ então existe $\epsilon > 0$ tal que é é impossível achar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_n| < \epsilon$ para todo $n > N$. Logo, para todo $N$, existe $n_k > N$ tal que $|x - x_{n_k}| > \epsilon$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Seja $\epsilon$ como em (2). Para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $n_k > k$ tal que $|x - x_{n_k}| \geq \epsilon$. Portanto s subsequência $(x_{n_k})$ satisfaz a propiedade em (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1): Se $(x_n)$ convergisse para $x$ teríamos $(x_{n_k})$ convergindo para $x$, o que contraria a hipótese inicial. Logo $(x_n)$ não converge para $x$. □

No exemplo abaixo temos uma aplicação imediata do Lema 3.4.2.

Exemplo 3.30. Seja $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ tal que toda subsequência de $(x_n)$ contém uma subsequência convergente para $x$. Então $(x_n)$ converge para $x$.

Por contradição suponha que $(x_n)$ não convirja para $x$. Portanto existe uma subsequência $(x_{n_k})$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$|x - x_{n_k}| > \epsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.4.2}$$

Mas então, por hipótese, $(x_{n_k})$ tem uma subsequência convergindo para $x$, uma contradição com (3.4.2).

Finalmente mostramos um importante resultado que nos garante convergencia de alguma subsequência mesmo quando a sequência original não converge. É o análogo para sequências do Teorema de Bolzano–Weierstrass 2.2.4.

Teorema 3.4.3. *[Bolzano–Weierstrass para sequências] Toda sequência limitada de numeros reais tem pelo menos uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}$ e $s = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então $S$ é finito ou não. Se $S$ for finito, então existe pelo menos um elemento $s \in S$ tal que $s = x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \dots.$ para algum $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... em $\mathbb{N}$. Neste caso, a subsequência constante $(x_{n_k})$ é convergente.

Se $S$ for infinito, e como este conjunto é limitado por hipótese, então o teorema de Bolzano–Weierstrass 2.2.4 garante a existência de pelo menos um ponto $x$ de acumulação de $S$. Seja $U_k = (x - 1/k, x + 1/k)$. Como $x$ é ponto de acumulação, então para todo $k$ existe pelo menos um ponto em $S \cap U_k$, i.e., existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in S \cap U_k$. Então, dado $\epsilon > 0$, para $1/\bar{k} < \epsilon$ temos

$$|x - x_{n_k}| < \frac{1}{k} < \frac{1}{\bar{k}} < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq \bar{k}.$$

Logo, a subsequência $(x_{n_k})$ é convergente. $\square$

Exemplo 3.31. Suponha que $(x_n)$ é uma sequência limitada de nûmeros reais *distintos*, e que o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem exatamente um ponto de acumulação. Então $(x_n)$ é convergente. De fato, seja $x$ o ponto de acumulação da sequência. Por absurdo, assuma que $(x_n)$ não converge para $x$. Então existe $\epsilon > 0$ e uma subsequencia $(x_{n_k})$ tal que

$$|x_{n_k} - x| > \epsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Mas então o conjunto $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito pois os $x_{n_k}$ são distintos e portanto pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass ele tem pelo menos um ponto de acumulação, que é diferente de $x$, uma contradição com $x$ ser o único ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

## 3.5. Sequências de Cauchy

Um conceito importante tratando-se de sequências é o de sequências de Cauchy. Formalmente, dizemos que uma sequência $(x_n)$ é *de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \epsilon \quad \text{para todo } m, n \geq N.$$

Usando os lemas a seguir, mostraremos que uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.

Lema 3.5.1. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja $(x_n)$ sequência convergente, e $x$ o seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_n| < \epsilon/2$ para todo $n \geq N$. Portanto,

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \epsilon \quad \text{se } m, n \geq N.$$

Logo $(x_n)$ é de Cauchy. □

Lema 3.5.2. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja $(x_n)$ sequência de Cauchy. Então, considerando $\epsilon = 1$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_N - x_m| < 1$ para todo $n > N$. Logo, para $n > N$ temos

$$|x_m| \leq |x_m - X_N| + |X_N| < 1 + |X_N|.$$

Definindo $C = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |X_N|\}$, temos imediatamente que $|x_i| \leq C$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto a sequência é limitada. □

Finalmente podemos enunciar a equivalencia entre convergência e o critério de Cauchy.

Teorema 3.5.3 (Critério de convergência de Cauchy). *Uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.*

Demonstração. Já vimos no Lema 3.5.1 que se uma sequência é convergente, ela é de Cauchy.

Assuma agora que $(x_n)$ é sequência de Cauchy. Pelo Lema 3.5.2, a sequência é limitada, e pelo Teorema de Bozano–Weierstrass 3.4.3, existe uma subsequência $(x_{n_k})$ convergente. Seja $x = \lim_{n_k \to \infty}(x_{n_k})$. Quero mostrar que $x = \lim_{n \to \infty}(x_n)$. Seja $\epsilon > 0$. Como $(x_n)$ é de Cauchy, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } m, n \geq N. \tag{3.5.1}$$

Como $(x_{n_k})$ é convergente, então existe $k \in \{n_1, n_2, \dots\}$ tal que $k > N$, e

$$|x - x_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $k > N$ temos também de 3.5.1 que $|x_n - x_k| \leq \epsilon/2$ para todo $n \geq N$. Finalmente, para todo $n \geq N$ temos

$$|x - x_n| \leq |x - x_k| + |x_k - x_n| < \epsilon.$$

Concluímos que $(x_n)$ converge. □

Exemplo 3.32. Considere $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$ para $n \geq 3$. Então mostraremos que $(x_n)$ converge pois é de Cauchy. Mostramos primeiro que

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^n - 1}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5.2}$$

Note que (3.5.2) é válido para $n = 1$. Supondo também válida para $n = k$, i.e., que

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^k - 1}, \tag{3.5.3}$$

temos

$$|x_{k+1} - x_{k+2}| = |x_{k+1} - \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k)| = |\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)| = \frac{1}{2^k - 1},$$

onde usamos (3.5.3) na última igualdade. Concluímos por indução que (3.5.2) é válida.

Tendo (3.5.2) demonstrado, basta agora, dado $\epsilon$, tomar $N$ tal que $2^{N-2}\epsilon > 1$. Neste caso, se $n \geq m \geq N$, tem-se

$$(3.5.4) \quad |x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + |x_{n-2} - x_{n-3}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m|$$
$$= \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-4}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{1}{2^{n-m-1}} + \frac{1}{2^{n-m-2}} + \frac{1}{2^{n-m-3}} + \cdots + 1\right)$$
$$= \frac{1}{2^{m-1}}\frac{1 - 1/2^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{m-2}} < \epsilon,$$

Exemplo 3.33. Em geral, se $(x_n)$ é tal que $|x_{n+1} - x_n| < c_n$, onde $S_n = \sum_{i=1}^n c_i$ é convergente, então $(x_n)$ é convergente. De fato, mostramos abaixo que a sequência é de Cauchy, e portanto converge. Note que para $n > m$, temos

$$(3.5.5) \quad |x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \leq c_{n-1} + c_{n-2} + \cdots + c_m = S_{n-1} - S_{m-1}.$$

Como $S_n$ converge, então é de Cauchy. Logo dado $\epsilon > 0$, existe $N^* \in \mathbb{N}$ tal que $n > m > N^*$ implica que $|S_{n-1} - S_{m-1}| < \epsilon$. Logo, por (3.5.5) temos que $n > m > N^*$ implica que $|x_n - x_m| < \epsilon$ e $(x_n)$ é de Cauchy.

## 3.6. Sequências Contráteis

Dizemos que uma sequência é *contrátil* se existem número real $\lambda < 1$ e um inteiro $N \geq 0$ tais que

$$|x_{n+N+2} - x_{n+N+1}| \leq \lambda |x_{n+N+1} - x_{N+n}|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.6.1. *Toda sequência contrátil é convergente*

Seja $(x_n)$ sequência contrátil com constante $\lambda < 1$. Sem perda de generalidade, assumimos nesta demonstração que $N = 0$, isto é

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in N$. Então,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^2 |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^n |x_2 - x_1|.$$

Logo, para $n \geq m$ temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m|$$
$$\leq \big(\lambda^{n-2} + \lambda^{n-3} + \cdots + \lambda^{m-1}\big)|x_2 - x_1| = \lambda^{m-1}\big(\lambda^{n-m-1} + \lambda^{n-m-2} + \cdots + 1\big)|x_2 - x_1|$$
$$= \lambda^{m-1}\frac{\lambda^{n-m} - 1}{\lambda - 1}|x_2 - x_1| \leq \frac{\lambda^{m-1}}{1 - \lambda}|x_2 - x_1|.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ se $N \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\frac{\lambda^{N-1}}{1 - \lambda}|x_2 - x_1| < \epsilon,$$

então $|x_n - x_m| < \epsilon$ para todo $m \geq N$, $n \geq N$. Portanto a sequência é de Cauchy e é convergente

Exemplo 3.34. Seja a sequência definida por

$$x_0 = a > 0, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Queremos mostrar que $(x_n)$ é contrátil, e portanto convergente.

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1+1/x$. Então a sequência é definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, e temos portanto que $x^* = (1+\sqrt{5})/2$ é a única solução em $\mathbb{R}^+$ para a equação $x = f(x)$. Usaremos mais tarde o fato de que $x > x^*$ implica em $x^2 > x + 1$. Note ainda que $f$ é tal que

$$x > y \implies f(x) < f(y), \tag{3.6.1}$$

e que se $x$, $y \in \mathbb{R}^+$ e $c < \min\{x, y\}$, então

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|y-x|}{c^2}. \tag{3.6.2}$$

A fim de utilizar (3.6.2), mostraremos que $(x_n)$ é limitada inferiormente por algum número maior que um.

Temos então tres possibilidades: $a = x^*$, $a > x^*$ ou $a < x^*$. Quando $a = x^*$, a série é trivialmente convergente pois temos $x_1 = x_2 = \cdots = x^*$. Assuma então que $x_0 = a > x^*$. A análise para $a < x^*$ é similar.

Então $x_1 = f(x_0) < f(x^*) = x^*$. Por indução temos que $x_{2n-2} > x^*$ e $x_{2n-1} < x^*$. De fato, como estas desigualdades são verdadeiras para $n = 1$ e assumindo também corretas para $n = k$ temos $x_{2k} = f(x_{2k-1}) > f(x^*) = x^*$ e $x_{2k+1} = f(x_{2k}) < f(x^*) = x^*$, como queríamos demonstrar.

Temos então $x_0 = a$, $x_1 = (a+1)/a$, e

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = \frac{2a+1}{a+1} < \frac{a+a^2}{a+1} = a = x_0,$$

onde usamos que $a + 1 < a^2$. Da mesma forma, $x_3 = 1 + 1/x_2 > 1 + 1/x_0 = x_1$. Portanto temos que para $n = 1$ vale $x_{2n} < x_{2n-2}$ e $x_{2n+1} > x_{2n-1}$. Assumindo estas duas desigualdades para $n = k$ temos

$$x_{2k+2} = 1 + 1/x_{2k+1} < 1 + 1/x_{2k-1} = x_{2k}, \qquad x_{2k+3} = 1 + 1/x_{2k+2} > 1 + 1/x_{2k} = x_{2k+1},$$

como queríamos demonstrar.

Concluímos que $(x_{2n-1})$ é sequência não decrescente, e que $|x_{2n}| > x^* > x_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)$ é limitada inferiormente por $x_1$.

Aplicando agora (3.6.2), temos

$$|x_{k+1} - x_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \frac{1}{x_1^2}|x_k - x_{k-1}|.$$

Como $x_1 = 1 + 1/a > 1$, então $(x_n)$ é contrátil e portanto converge.

Para achar o valor limite, basta resolver $x = f(x)$, e temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

## 3.7. Caracterização de conjuntos fechados

.

Podemos usar a noção de sequência para caracterizar conjuntos fechados, como o resultado abaixo mostra.

TEOREMA 3.7.1. *Seja $f \subset \mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes.*
(1) *$F$ é fechado em $\mathbb{R}$.*
(2) *Se $(x_n)$ é sequência convergente, com $x_n \in F$ para todo $n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$.*

DEMONSTRAÇÃO. (1) $\Longrightarrow$ (2) (*Por contradição*) Assuma $F$ fechado em $\mathbb{R}$, e seja $(x_n)$ sequência em $F$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Suponha $x \notin F$. Como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, existe vizinhança $V$ de $x$ tal que $V \cap F = \emptyset$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n \notin V$, uma contradição com $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Portanto $x \in F$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) (*Por contradição*) Suponha que $\mathcal{C}(F)$ não seja aberto. Então existe $x \in \mathcal{C}(F)$ tal que para toda vizinhaça

$$V_{\frac{1}{n}}(x) = (x - 1/n, x + 1/n)$$

existe um ponto em $x_n \in V_{\frac{1}{n}}(x) \cap F$. Logo $(x_n)$ é uma sequência em $F$ que converge para $x$. Por hipótese, temos que $x \in F$, uma contradição com $x \in \mathcal{C}(F)$. Portanto $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e $F$ é fechado. □

## 3.8. Exercícios

EXERCÍCIO 3.1. Demonstrar o Teorema 3.1.3.

EXERCÍCIO 3.2. Seja $(x_n)$ tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

existe e $L > 1$. Mostre que para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $N^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N^* \implies |x_n| > C.$$

CAPÍTULO 4

# Limites de funções

A fim de discutirmos a noção de *continuidade de funções*, precisamos entender *limites de funções*. Seja $f : A \to \mathbb{R}$, e seja $c$ ponto de acumulação de $A$. Dizemos que $L$ é o limite de $f$ em $c$ se para toda vizinhança $V$ de $L$ existir vizinhança $U$ de $c$ tal que

$$x \in U \cup A, \quad x \neq c \implies f(x) \in V.$$

Neste caso, escrevemos $l = \lim_{x\to c} f(x)$, e dizemos que $f$ converge para $L$ no ponto $c$.

Uma observação a respeito da definição acima é que ela só faz sentido para pontos de acumulação do domínio. Note também que a noção de limite em $c$ independe do valor que $f$ assume em $c$. Na verdade, $f$ não precisa nem estar definida neste ponto. Somente quando discutirmos continuidade é que o valor em $c$ será importante, mas isto fica para o próximo capítulo.

## 4.1. Exemplos e Resultados Iniciais

Antes de começarmos a calcular limites, é interessante também ver que as seguintes definições são equivalentes, e qualquer uma delas pode ser usada no estudo de limites.

Lema 4.1.1 (Critérios equivalentes para limites). Seja $f : A \to \mathbb{R}$, e seja $c$ ponto de acumulação de $A$. Então as afirmativas são equivalentes:

(1) $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

(2) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

(3) Seja $(x_n)$ sequência em $A$ com $x_n \neq c$ para todo $n$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Então $\big(f(x_n)\big)$ converge e $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = L$.

Demonstração. (1) $\implies$ (2) Como $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ é vizinhança de $L$, então existe vizinhança $U$ de $C$ tal que para todo $x \in U \cup A$, e $x \neq c$, tem-se $f(x) \in V$. Portanto, tomando $\delta$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subset U$ temos o resultado.

(2) $\implies$ (3)Seja $\epsilon > 0$, e $(x_n)$ em $A\backslash\{c\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Por hipótese existe $\delta$ tal que

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon. \tag{4.1.1}$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - c| < \delta$ se $n \geq N$. Então, por (4.1.1) tem-se $|f(x_n) - L| < \epsilon$ e conclui-se que a sequência $\big(f(x_n)\big)$ converge para $L$.

(3) $\implies$ (1)(*por contradição*) Assuma que (3) valha, e que (1) seja falso. Logo existe vizinhança $V$ de $L$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in (c - 1/n, c + 1/n) \cap A$, com $x_n \neq c$ e $f(x_n) \notin V$. Isto é uma contradição pois por (3) teríamos que ter $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = L$. $\square$

Exemplo 4.1. Seja $f(x) = x$. Então $\lim_{x\to c} f(x) = c$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$, pois

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| = |x - c| < \delta = \epsilon.$$

Exemplo 4.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Então $f$ tem limite bem definido em $c = 0$, mas não nos demais pontos. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon$. Se $|x| < \delta$, então $|f(x)| = 0 \le |x| < \delta = \epsilon$ caso $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, e $|f(x)| = |x| < \delta = \epsilon$ caso $x \in \mathbb{Q}$. Logo $|x - 0| < \delta$ implica em $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \epsilon$. Portanto $f$ tem limite no zero.

Nos demais pontos tal limite não existe pela densidade dos racionais nos irracionais e vice-versa. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $(x_n)$ sequência em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e $(y_n)$ sequência em $\mathbb{Q}$, ambas convergentes para $x$ com $x_n \neq x$ e $y_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = x \neq 0$. Portanto $f$ não tem limite para $x \neq 0$.

Exemplo 4.3. Ache $\lim_{x\to 0} f(x)$ de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Primeiro note para $x \in \mathbb{R}^+$ que se $x \in \mathbb{Q}$, então $|f(x)| \le |x|$ pois $|\sin 1/x| \le 1$. Se $x \notin \mathbb{Q}$, então $|f(x)| = 0 \le |x|$. Em ambos os casos temos $|f(x)| \le |x|$. Então, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon$. Então se $x \in \mathbb{R}^+$ e

$$0 < |x| < \delta = \epsilon \implies |f(x) - 0| \le |x| < \epsilon.$$

Logo $f$ tem limite no zero e o limite é zero, i.e., $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Lema 4.1.2 (Unicidade do limite). Seja $f : A \to \mathbb{R}$, e seja $c$ ponto de acumulação de $A$. Então $f$ pode ter, no máximo, um limite em $c$.

Demonstração. Sejam $L_1$ e $L_2$ dois limites de $f$ em $c$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ existem $\delta_1$ e $\delta_2$ tais que

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta_1 \implies |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2},$$
$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta_2 \implies |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então tomando-se $0 < |x - c| < \delta$ implica em

$$|L_1 - L_2| \le |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Como $\epsilon$ é arbitrário, temos $L_1 = L_2$. □

Exemplo 4.4. Seja

$$\text{sgn(x)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Tomando-se as sequências $(-1/n)$ e $(1/n)$, ambas convergindo para $c = 0$ mas nunca atingindo este valor, tem-se $\big(f(-1/n)\big) = -1$ e $\big(f(1/n)\big) = 1$. Então esta função não tem limite em $c = 0$, pois se o limite existe, este tem que ser único.

Assim como no caso de sequências, podemos definir operações com funções, como soma, subtração, etc. Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, então definimos $(f+g) : A \to \mathbb{R}$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. De forma análoga definimos $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Se $g$ é tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, definimos também $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Valem então resultados como o limite da soma é a soma do limite, etc.

Lema 4.1.3. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, e seja $c$ ponto de acumulação de $A$. Suponha que existam os limites $\lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{x\to c} g(x)$. Então

(1) $\lim_{x\to c}(f + g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
(2) $\lim_{x\to c}(f - g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
(3) $\lim_{x\to c}(fg)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x)$
(4) $\lim_{x\to c}(f/g)(x) = \lim_{x\to c} f(x)/ \lim_{x\to c} g(x)$, se $g$ for tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, e $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.

Os resultados acima podem ser estendidos para um número finito de operações.

Demonstração. Demonstraremos apenas (1). As demais demonstrações são similares.

Seja $(x_n)$ sequência em $A$ com $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Então $(f+g)(x_n) = f(x_n)+g(x_n)$ converge pois é soma de sequências convergentes e $\lim_{n\to\infty}\big((f+g)(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) + \lim_{n\to\infty}\big(g(x_n)\big)$. □

Exemplo 4.5. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\lim_{x\to c} x^n = (\lim_{x\to c} x)^n = c^n$.

Exemplo 4.6. Se $c > 0$, então $\lim_{x\to c} 1/x = 1/(\lim_{x\to c} x) = 1/c$.

Uma outra propriedade de funções que têm limite em um ponto é a de limitação local, i.e., a função é limitada numa vizinhança do ponto. Observe que uma função localmente limitada não necessariamente é globalmente limitada, como veremos mais a seguir.

Definição 4.1.4. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $c$ ponto de acumulação de $A$ ou $c \in A$. Dizemos que $f$ é* limitada numa vizinhança de *$c$ se existem vizinhança $V$ de $c$ e constante $M$ tais que*

$$x \in V \cap A \implies |f(x)| \leq M.$$

*Dizemos também que $f$ é localmente limitada em $c$.*

Para mostrar que se $f : A \to \mathbb{R}$ tem limite num ponto de acumulação $c$ de $A$ então $f$ é localmente limitada em $c$, basta primeiro tomar $\epsilon = 1$. Dado $L = \lim_{x\to c} f(x)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < 1.$$

Neste caso, temos $|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + L$. Se $c \notin A$ defina $M = 1 + |L|$. Se $c \notin A$ defina $M = \max\{|f(c)|, 1 + |L|\}$. Em qualquer dos casos temos que

$$x \in A, \quad |x - c| < \delta \implies |f(x)| < M.$$

Da discussão acima concluímos imediatamente que $f(x) = 1/x$ é localmente limitada em todo ponto $c \neq 0$. Além disso concluímos que $f$ não tem limite em $c = 0$ pois não é limitada localmente em torno deste ponto.

Alguns resultados que valem para sequências podem ser estendidos para limites de funções. Por exemplo, do Lema 3.1.11 tiramos o seguinte resultado. Sua demonstração úm simples exercício.

LEMA 4.1.5 (limite de sanduíches). Sejam $f$, $g$ e $h$ funções de $A$ em $\mathbb{R}$, e seja $c$ ponto de acumulação de $A$. Suponha que para todo $x \in A$ com $x \neq c$ tivermos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Então $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

LEMA 4.1.6. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, e seja $c$ ponto de acumulação de $A$. Suponha que para todo $x \in A$ com $x \neq c$ tivermos $a \leq g(x) \leq b$, e que existe o limite de $f$ em $c$. Então $a \leq \lim_{x\to c} f(x) \leq b$.

## 4.2. Limites laterais, infinitos e no infinito

Assim como na seção anterior, assumimos que $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Seja agora $c$ ponto de acumulação de $A \cap (c, +\infty)$. Dizemos que $L$ é limite à direita de $f$ em $c$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad 0 < x - c < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso escrevemos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$.

Definição similar vale para limite à esquerda (e escrevemos $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$).

É possível mostrar que se $c$ ṕonto de acumulação tanto de $A \cap (c, +\infty)$ como de $A \cap (-\infty, c)$, então

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L. \tag{4.2.1}$$

EXEMPLO 4.7. Seja $f(x) = \mathrm{sgn(x)}$, como no exemplo 4.4. Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, então não existe limite de $f$ no zero.

Outra definição importante é a de *limite infinito*. Dizemos que $f$ tende a $+\infty$ em $c$ se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > \alpha.$$

Escrevemos então que $\lim_{x\to c} = +\infty$.

Definição similar vale para $f$ tende a $-\infty$ em $c$.

EXEMPLO 4.8. $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$. De fato, dado $\alpha > 0$, tomando $\delta = 1/\sqrt{\alpha}$ temos

$$0 < |x| < \delta \implies x^2 < \delta^2 = \frac{1}{\alpha} \implies \frac{1}{x^2} > \alpha.$$

EXEMPLO 4.9. Seja $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Então $g$ não tende a $-\infty$ ou a $+\infty$ no zero pois $g(x) < 0$ se $x < 0$ e $g(x) > 0$ se $x > 0$.

Finalmente definimos limites "no infinito". Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é limite de $f$ quando $x \to +\infty$ se para todo $\epsilon$ existe $k > a$ tal que

$$x > k \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Analogamente podemos definir limite de $f$ quando $x \to -\infty$.

EXEMPLO 4.10. $\lim_{x\to -\infty} 1/x = \lim_{x\to +\infty} 1/x = 0$.

EXEMPLO 4.11. Nem sempre existe limite "no infinito. Tome por exemplo $\sin(x)$.

## 4.3. Exercícios

Exercício 4.1. Demonstre o Lema 4.1.5.

Exercício 4.2. Demonstre o Lema 4.1.6.

Exercício 4.3. Demonstre a equivalência 4.2.1.

CAPÍTULO 5

# Continuidade e Funções Contínuas

A partir das definições de limites de funções do capítulo anterior, fica mais fácil definir continuidade e estudar suas propriedades.

## 5.1. Introdução e exemplos

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Seja $c \in A$. Dizemos que $f$ é *contínua em* $c$ se para toda vizinhança $V$ de $f(c)$ existir vizinhança $U$ de de $c$ tal que

$$x \in A \cap U \implies f(x) \in V.$$

Finalmente, dizemos que $f$ é contínua em $B \subset A$ se $f$ for contínua em todos os pontos de $B$.

Observação. Se $c$ for ponto de acumulação de $A$, então

$$f \text{ é contínua em } c \iff f(c) = \lim_{x \to c} f(x).$$

Se $c$ não é ponto de acumulação de $A$, então existe vizinhança $U$ de $c$ tal que $A \cap U = \{c\}$. Logo para todo vizinhança $V$ de $f(c)$, temos que

$$x \in A \cap U \implies x = c \implies f(x) = f(c) \in V$$

Logo $f$ é necessariamente contínua em $c$. Isto é, *toda função é sempre contínua em pontos que não são de acumulação.*

Observação. Note algumas diferenças na definição de limite de função e continuidade num ponto $c$. Para definir limite, a função não precisava nem estar definida em $c$, e se estivesse, o valor assumido não tinha importância. Mas fazia parte da definição que $c$ fosse ponto de acumulação do domínio da função. Na definição de limite, a função tem que estar definida em $c$, mas este ponto não necessariamente é de acumulação.

Lema 5.1.1. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : \to \mathbb{R}$. Seja $c \in A$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) $f$ é contínua em $c$.
(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

(3) Se $(x_n)$ é tal que $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, então $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Outro resultado útil é o seguinte *critério de descontinuidade:* assumindo as hipóteses do Lema 5.1.1, temos que $f$ não é contínua em $c$ se e somente se existe sequência $(x_n)$ em $A$ convergindo para $c$ mas $\big(f(x_n)\big)$ não convergindo para $f(c)$.

Exemplo 5.1. $g(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$. De fato, para todo $c \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x\to c} g(x) = c = g(c)$.

Exemplo 5.2. A função sgn(x) (ver exemplo 4.4) não é contínua no zero, já que não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

Exemplo 5.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é descontínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Para mostrar isto, assuma $x \in \mathbb{Q}$, e uma sequência $(x_n)$ em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ convergindo para $x$. Neste caso, $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 0 \neq 1 = f(x)$. Da mesma forma, se $x \notin \mathbb{Q}$, tomamos uma sequência $(x_n)$ em $\mathbb{Q}$ convergindo para $x$, e temos $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 1 \neq 0 = f(x)$.

As vezes, é possível estender uma função de forma contínua. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, e $c \notin A$ ponto de acumulação de $A$. Se existir $\lim_{x\to c} f(x)$, então definimos $f(c)$ como sendo este limite, e $f$ será contínua em $c$.

Exemplo 5.4. Considere a função similar ao problema 4.2, mas desta vez definida apenas para reais positivos:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e podemos estender $f$ continuamente no zero definindo

$$g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então temos $g$ contínua no zero (e somente no zero).

Exemplo 5.5. É claro que nem sempre tal extensão contínua é possível. Por exemplo no caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, não se pode definir $f(0)$ tal que $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ seja contínua.

**5.1.1. Composição de funções.** Em geral, se $f$ e $g$ são contínuas, então $f+g$, $f-g$, $fg$ também o são. Da mesma forma, se $h(x) \neq 0$ para todo $x$ do domínio, então $f/h$ é contínua. O próximo resultado garante que a *composição* de funções contínuas também é contínua.

Teorema 5.1.2. *Sejam $A$, $B \subset \mathbb{R}$, e $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$. Assuma $f$ contínua em $c \in A$ e $g$ contínua em $f(c) \in B$. Enão a composição $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em $c$.*

Demonstração. Seja $b = f(c)$ e $W$ vizinhança de $g(b)$. Como $g$ é contínua em $b$, então existe vizinhança $V$ de $b$ tal que

$$y \in V \cap B \implies g(y) \in W.$$

Como $f$ é contínua em $c$, então existe vizzinhança $U$ de $c$ tal que

$$x \in U \cap A \implies f(x) \in V.$$

Logo
$$x \in U \cap A \implies f(x) \in V \implies g(f(x)) \in W.$$
Portanto $g \circ f$ é contínua em $c$. ☐

Exemplo 5.6. A função $g(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. Realmente, como
$$|g(x) - g(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$
se $(x_n)$ converge para $x$ então
$$|g(x_n) - g(x)| \leq |x_n - x| \implies \lim_{n\to\infty} \big(g(x_n)\big) = g(x).$$

Portanto, se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em $c \in A$, entao $h(x) = |f(x)|$ também o é, pois $h = g \circ f$ é composição de funções contínuas.

## 5.2. Funções Contínuas em Conjuntos Compactos

Um resultado com várias aplicações vem a seguir e garante que a compacidade é uma propriedade preservada por funções contínuas.

Teorema 5.2.1 (Preservação de compacidade). *Se $k \subset \mathbb{R}$ é compacto, e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ coleção de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $f(K) \subset \cup_\alpha G_\alpha$. Logo $K \subset \cup_\alpha f^{-1}(G_\alpha)$. Por $f$ ser contínua, para todo $\alpha$ existe $H_\alpha$ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(G_\alpha) = H_\alpha \cap K$. Portanto $\{H_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de $K$. Como $K$ é compacto, então existe $\{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}\}$ cobertura finita. Logo,
$$K \subset \cup_{i=1}^n H_{\alpha_i} = \cup_{i=1}^n H_{\alpha_i} \cap K = \cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}),$$
e então $f(K) \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Portanto, achamos uma subcobertura finita para $f(K)$, e concluímos que $f(K)$ é compacto. ☐

Uma aplicação imediata do resultado acima é a existência de máximos e mínimos de funções contínuas definidas em compactos. Em particular, estas funções são limitadas.

Definição 5.2.2. *Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada em $A$ se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$.*

Exemplo 5.7. $\sin x$ é limitada em $\mathbb{R}$ pois $|\sin x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.8. $1/x$ não é limitada em $\mathbb{R}^+$. Entretanto $1/x$ é limitada em $(1/2, +\infty)$ pois $|1/x| \leq 2$ para todo $x$ neste intervalo.

O Teorema 5.2.1 garante que imagens de compactos são conjuntos compactos, portanto pelo Teorema de Heine–Borel 2.4.3 fechados e limitados. O resultado abaixo é consequência imediata deste fato.

Teorema 5.2.3. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto, e $f : A \to \mathbb{R}$ contínua em $K$. Então $f$ é limitada em $K$.*

Uma demonstração alternativa do Teorema 5.2.3 que dispensa o uso de noções de compacidade vem a seguir.

Demonstração. (alternativa do Teorema 5.2.3; *por contradição*) Assuma $K$ fechado e limitado e $f$ não limitada. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $f(x_n) > n$. Como $A$ é fechado e limitado, então, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, $(x_n)$ possui subsequência $(x_{n_k})$ convergente. Seja $x = \lim_{n_k \to \infty} x_{n_k}$. Como $A$ é fechado, então $x \in A$. Mas como $f$ é contínua, então $f$ tem limite em $x$, e portanto é localmente limitada, uma contradição com a construção de $(x_n)$. □

Outra noção importante é o de máximos e mínimos. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ tem valor máximo em $A$ se existe $x^* \in A$ tal que $f(x^*)$ é cota superior de $f(A)$. De forma análoga dizemos que $f$ tem valor mínimo em $A$ se existe $x_* \in A$ tal que $f(x_*)$ é cota inferior de $f(A)$. Chamamos $x^*$ de ponto de valor máximo e $x_*$ de ponto de valor mínimo.

Observação. Se uma função $f$ como acima definida assume seus valores máximo e mínimo em $A$, então $f$ é limitada em $A$.

Exemplo 5.9. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(1 - x^2)$ não é limitada em $(-1, 1)$, mas é limitada em $[-1/2, 1/2]$ por exemplo.

Exemplo 5.10. $f(x) = x$ é contínua e limitada em $(-1, 1)$, mas não assume valor máximo nem mínimo em $(-1, 1)$. Entretanto $f$ assume seus valores máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

Exemplo 5.11. $h(x) = 1/(1+x^2)$ é limitada em $\mathbb{R}$, assume seu valor máximo em $x^* = 0$, mas não assume seu valor mínimo. Isto porque $\inf h(\mathbb{R}) = 0 \neq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação. Note que pontos de máximo e mínimo não são únicos em geral. Por exemplo, $f(x) = x^2$ tem $-1$ e $1$ como seus dois pontos de máximo em $[-1, 1]$

O resultado a seguir mais uma vez é consequência do Teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.4 (Pontos Extremos). *Seja $K \subset \mathbb{R}$ conjunto fechado e limitado, e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua em $K$. Então $f$ tem pelo menos um ponto de máximo e um de mínimo em $K$.*

Demonstração. Como $K$ é compacto, então o Teorema 5.2.1 garante que $f(K)$ também é compacto. Logo $f(K)$ é limitado e portanto tem supremo, e $f(K)$ é fechado, e portanto o supremo pertence a $f(K)$. Logo existe $x^* \in K$ tal que $f(x^*) = \sup f(K)$.

Mesmo tipo de argumanto assegura que existe ponto de mínimo. □

A seguinte demonstração dispense o uso direto de compacidade.

Demonstração. (alternativa do Teorema 5.2.4) Demonstraremos somente que $f$ assume um valor máximo. O caso de valor mínimo é análogo. Como $A$ é fechado limitado, então $f(A)$ é limitado. Seja $s^* = \sup f(A)$. Seja $x_n$ tal que $f(x_n) > s^* - 1/n$. Mas pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, $A$ limitado implica em existência de uma subsequência $(x_{n_k})$ convergente. Seja $x^*$ o limite de tal subsequência. Como $A$ é fechado, então $x^* \in A$. Como $f$ é contínua, então $f(x^*) = \lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k})$. Finalmente, usamos que

$$s^* - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq s^*,$$

e pelo Lema do sanduíche de sequências 3.1.11, temos que $f(x^*) = \lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = s^*$. □

Outro resultado de grande importância é o Teorema do Valor Intermediário que garante a preservação de intervalos por funções contínua.

TEOREMA 5.2.5 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A = \{x \in [a,b] : f(x) < d\}$. Logo $A$ é não vazio pois $a \in A$. Definindo $c = \sup A$, seja $x_n \in A$ tal que $c - 1/n < x_n < c$. Então $(x_n)$ converge para $c$ e por continuidade de $f$, temos $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Como $f(x_n) < d$, então $f(c) \le d$.

Assuma por um instante que $f(c) < d$. Mas $f$ é contínua, e então para $\epsilon = d - f(c)$ existe $\delta > 0$ tal que $c + \delta < b$ e

$$x \in (c, c+\delta) \implies f(x) < f(c) + \epsilon = d.$$

Logo $c + \delta/2 > c$ e $c + \delta/2 \in A$, uma contradição pois $c = \sup A$. Portanto $f(c) = d$. □

COROLÁRIO 5.2.6 (Teorema do ponto fixo em uma dimensão). Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ contínua. Então $f$ tem um ponto fixo, i.e., existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

DEMONSTRAÇÃO. seja $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $d(x) = f(x) - x$. Portanto $d$ é contínua. Nosso objetivo é achar raiz para $d$ em $[0,1]$. Se $d(0) = 0$ ou $d(1) = 0$, então nada mais há a fazer. Suponha que nem 0 nem 1 sejam raízes de $d$. Logo $d(0) = f(0) > 0$ e $d(1) = f(1) - 1 < 0$ pois $f(x) \in [0,1]$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário 5.2.5, temos que existe $x \in (0,1)$ tal que $d(x) = 0$, como queríamos demonstrar. □

Concluímos esta parte com uma importante consequencia dos resultados anteriores.

TEOREMA 5.2.7. *Seja $I$ intervalo fechado limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ função contínua. Então $f(I)$ é intervalo fechado limitdado.*

## 5.3. Funções Uniformemente Contínuas

Considere $g(x) = 1/x$, para $x \in (0,1)$. Seja $c \in (0,1)$. Então

$$g(c) - g(x) = \frac{1}{c} - \frac{1}{x} = \frac{x-c}{cx}.$$

Para mostrarmos que $g$ é contínua em $c$. seja $\epsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\epsilon < 1$, e portanto $\epsilon c < 1$. Seja $\delta = c^2\epsilon/2$. Então

$$|x - c| < \delta \implies c < x + \delta = x + \frac{c^2\epsilon}{2} < x + \frac{c}{2} \implies \frac{c}{2} < x.$$

Logo

$$|x - c| < \delta \implies |g(c) - g(x)| = \frac{|x-c|}{cx} < \frac{\delta}{cx} = \frac{c^2\epsilon}{2cx} = \frac{c\epsilon}{2x} < \epsilon$$

onde usamos que $c/2 < x$ na última desigualdade. Mostramos então, usando $\epsilon$s e $\delta$s que $1/x$ é contínua em todo ponto diferente de zero. O objetivo principal do cálculo acima é ressaltar que a escolha de $\delta$ não é uniforme em relação ao ponto $c$, i.e., $\delta$ depende de $c$.

Em outros casos, a escolha de $\delta$ independe do ponto em questão. Por exemplo, para $f(x) = x$, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Dizemos que esta função é uniformemente contínua.

Definição 5.3.1. *Seja* $A \in \mathbb{R}$ *e* $f\, A \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* $f$ *é* uniformemente contínua *em* $A$ *se para todo* $\epsilon > 0$, *existir* $\delta$ *tal que*

$$\{x, c\} \subset A, \quad |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Lema 5.3.2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : \to \mathbb{R}$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) $f$ não é uniformemente contínua em $A$.
(2) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existem pontos $x \in A$ e $c \in A$ tais que $|x - c| < \delta$ mas $|f(x) - f(c)| > \epsilon$.
(3) Existe $\epsilon > 0$ e duas sequencias $(x_n)$ e $(y_n)$ em $A$ tais que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O resultado acima pode ser usado por exemplo para mostrar que $f(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^+$. Considere as sequencias $(1/n)$ e $\big(1/(n+1)\big)$. Então $\lim_{n\to\infty}\big(1/n - 1/(n+1)\big) = 0$ mas $f(1/n) - f\big(1/(n+1)\big) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O (supreendente?) resultado abaixo garante que *todas* as funções contínuas em conjuntos fechados limitados são uniformemente contínuas.

Teorema 5.3.3 (Continuidade Uniforme). *Seja* $K \subset \mathbb{R}$ *conjunto compacto, e* $f : K \to \mathbb{R}$ *contínua em* $K$. *Então* $f$ *é uniformemente contínua em* $A$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Entao, para todo $x \in K$, existe $\delta(x) > 0$ tal que $y \in K$ e $|y - x| < \delta(x)$ então $|f(y) - f(x)| < \epsilon/2$. Seja a cobertura aberta de $K$ gerada por $\{(x - \delta(x), x + \delta(x)\}_{x\in K}$. Como $K$ é compacto, então existe $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $\{(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura de $K$. Seja $\delta = (1/2)\min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)\}$. Sejam então $x$, $y \in K$ tais que $|x - y| < \delta$. Então existe índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in (x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)$, i.e., $|x - x_j| < \delta(x_j)$ e $|f(x) - f(x_j)| < \epsilon/2$. Da mesma forma, $|y - x_j| \le |y - x| + |x - x_j| < \delta + \delta(x_j) \le \delta(x_j)$, e então $|f(y) - f(x_j)| < \epsilon/2$. Concluímos então que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \epsilon,$$

e portanto $f$ é uniformemente contínua. □

Demonstração. (alternativa do Teorema 5.3.3; *por contradição*) Suponha que $f$ não seja uniformemente contínua. Como $K$ é compacto, então é fechado e limitado. Então, pelo Lema 5.3.2, existe $\epsilon > 0$ e existem sequencias $(x_n)$ e $(y_n)$ em $K$ tais que $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Como $K$ é fechado, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, existe subsequencia $(x_{n_k})$ convergente. Seja $z = \lim_{n_k\to\infty}(x_{n_k})$. Como $K$ é fechado, então $z \in K$. Note que $(y_{n_k})$ também converge para $z$ pois

$$(y_{n_k} - z) = (y_{n_k} - x_{n_k}) + (x_{n_k} - z).$$

Como $f$ é contínua em $z$, então $f(z) = \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})$, e $f(z) = \lim_{n_k\to\infty} f(y_{n_k})$, uma contradição com $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Logo $f$ é uniformemente contínua. □

## 5.4. Funções de Lipschitz

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f$ é de Lipschitz se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$$

para todo $x$, $y \in A$.

TEOREMA 5.4.1. *Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, e $f$ é de Lipschitz, então $f$ é uniformemente contínua em $A$*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

para todo $x$, $y \in A$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/k$. Então se $x$, $y \in A$ e $|x - y| < \delta$, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\delta = \epsilon.$$

o que mostra que $f$ é uniformemente contínua em $A$. □

Nem toda função uniformemente contínua é de Lipschitz, como o exemplo abaixo mostra.

EXEMPLO 5.12. Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$. Como $[0, 1]$ é compacto, e $g$ é contínua, então $g$ é uniformemente contínua em $[0, 1]$. Entretanto note que se $g$ fosse de Lipschitz, nós teríamos a existência de $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{x} = |g(x) - g(0)| \leq k|x - 0| = kx \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k \quad \text{para todo } x > 0,$$

um absurdo. Logo $g$ não é de Lipschitz apesar de ser uniformemente contínua em seu domínio.

## 5.5. Exercícios

EXERCÍCIO 5.1. Determine os pontos de continuidade da função $[x]$, que retorna para cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a $x$. Por exemplo, $[2] = 2$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$.

EXERCÍCIO 5.2. Sejam $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ é aberto em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 5.3. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ função contínua. Mostre então que para todo $V \subset \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ existe $U \subset \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $U \cap A = f^{-1}(V)$.

EXERCÍCIO 5.4. Mostre usando argumentos de compacidade que se $K$ é compacto e $S \subset K$ é infinito, então $S$ possui pontos de acumulação (não necessariamente contidos em $S$).

EXERCÍCIO 5.5. Para cada um dos conjuntos abaixo, ache se for possível uma cobertura aberta que não contenha subcobertura finita.

(1) $\mathbb{R}$.
(2) $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$.
(3) $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$.

EXERCÍCIO 5.6. Dê exemplos de

(1) Um conjunto $F$ fechado em $\mathbb{R}$ e uma função $f : F \to \mathbb{R}$ contínua tais que $f(F)$ não seja compacto.
(2) Um conjunto $A$ aberto em $\mathbb{R}$ e uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(A)$ não seja aberto em $\mathbb{R}$.
(3) Um conjunto $D \subset \mathbb{R}$, um conjunto $A$ aberto em $\mathbb{R}$ e uma função contínua $f : D \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(A)$ não seja aberto em $\mathbb{R}$.

Exercício 5.7. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é uniformemente contínua. Dê um exemplo de duas funções uniformemente contínuas tal que o produto não seja uniformemente contínuo. Prove que a função de seu exemplo não é uniformemente contínua.

Exercício 5.8. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Mostre que se $(x_n)$ é sequência de Cauchy em $A$, então $f(x_n)$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

CAPÍTULO 6

# Diferenciação

Neste capítulo vemos a noção de diferenciabilidade e suas aplicações.

## 6.1. Definições e Exemplos

Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I$ é um intervalo em $\mathbb{R}$. Dizemos que $f$ é diferenciável em $c \in I$ se existe um número real $L$ onde dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \epsilon.$$

Chamamos $L$ de derivada de $f$ em $c$, e escrevemos $L = f'(c)$.

Note que se $f$ é diferenciável em $c$, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Se $f$ é diferenciável em todo ponto de $I$ dizemos que $f$ é diferenciável em $I$. Neste caso note que a derivada $f'$ é uma função de $I$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.1. Se $f(x) = x^2$, então para $c \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x + c)(x - c)}{x - c} = \lim_{x \to c}(x + c) = 2c.$$

Teorema 6.1.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I$ é um intervalo em $\mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in I$, então $f$ é continua em $c$.*

Demonstração. Seja $L = f'(c)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies L - \epsilon < \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right| < L + \epsilon.$$

Seja $\bar{\delta} = \min\{\delta, \epsilon/(L + \epsilon)\}$. Então

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \bar{\delta} \implies |f(x) - f(c)| = \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right||x - c| \leq (L + \epsilon)\delta \leq \epsilon.$$

Logo $f$ é continua em $c$. □

Observação. Pelo teorema acima, diferenciabilidade implica em continuidade. O inverso entretanto não é verdade em geral. Seja por exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = |x|$. Então $f$ é continua em $\mathbb{R}$ mas não é diferenciável em zero pois para $x \neq 0$ temos

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo o limite quando $x \to 0$ não existe.

## 6.2. Propriedades da Derivada

Seja $f$ e $g$ funções de $I \to \mathbb{R}$, onde $I$ é um intervalo em $\mathbb{R}$, ambas diferenciáveis em $c \in I$. Então

(1) $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, se $x \neq c$, então

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(c)}{x - c} = \alpha \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

(2) $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

(3) Se $p = fg$, então se $x \neq c$,

$$\begin{aligned}\frac{p(x) - p(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.\end{aligned}$$

Logo existe $\lim_{x \to c} (p(x) - p(c))/(x - c)$ e

$$\begin{aligned}p'(c) = \lim_{x \to c} \frac{p(x) - p(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \left[ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) \right] + \lim_{x \to c} \left[ f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\ = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).\end{aligned}$$

(4) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então seja $h(x) = f(x)/g(x)$. Logo se $x \neq c$,

$$\begin{aligned}&\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{x - c} = \frac{f(x)g(c) - f(c)g(x)}{(x - c)g(x)g(c)} \\ &= \frac{f(x)g(c) - f(c)g(c)}{(x - c)g(x)g(c)} + \frac{f(c)g(c) - f(c)g(x)}{(x - c)g(x)g(c)} = \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)} \frac{1}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)g(c)} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.\end{aligned}$$

Logo existe $\lim_{x \to c} (h(x) - h(c))/(x - c)$ e

$$h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = f'(c) \frac{1}{g'(c)} - \frac{f(c)}{g^2(x)} g'(c).$$

Exemplo 6.2. Pela regra acima temos que se $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então $f$ é diferenciável e $f'(c) = nx^{n-1}$.

Observe que $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in I$ com $f'(c) = L$ se e somente se existir uma função $r$ tal que

$$f(x) = f(c) + (x - c)L + r(x - c), \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

De forma equivalente escrevemos $h = x - c$ e

$$f(c + h) = f(c) + hL + r(h) \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Teorema 6.2.1 (Regra da Cadeia). *Sejam $I$ e $J$ intervalos em $\mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$, onde $f(J) \subset I$. Se $f$ é diferenciável em $c \in J$ e $g$ é diferenciável em $f(c)$, ent ao $g \circ f$ é diferencável em $c$ e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Demonstração. Seja $d = f(c)$. Note que para $h$ tal que $c+h \in J$ e $k$ tal que $d+k \in I$, temos

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + r(h) \quad \text{com } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$
$$g(d+k) = g(d) + kg'(d) + p(k) \quad \text{com } \lim_{k\to 0} \frac{p(k)}{k} = 0.$$

Definindo $k = f(c+h) - f(c) = hf'(c) + r(h)$, temos

$$\begin{aligned} g\circ f(c+h) &= g(f(c+h)) = g(d+k) = g(d) + kg'(d) + p(k) \\ &= g(d) + (hf'(c) + r(h))g'(d) + p(f(c+h) - f(c)) = g(d) + hf'(c)g'(d) + q(h) \end{aligned}$$

onde $q(h) = r(h)g'(d) + p(f(c+h) - f(c))$. Finalmente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{q(h)}{h} = g'(d) \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{p(f(c+h) - f(c))}{h}.$$

Se $f(c+h) = f(c)$ numa vizinhança de $c$, então $p(f(c+h) - f(c)) = 0$. Caso contrário,

$$\lim_{h\to 0} \frac{p(f(c+h) - f(c))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{p(f(c+h) - f(c))}{f(c+h) - f(c)} \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0.$$

De qualquer forma concluímos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{p(f(c+h) - f(c))}{h} = 0.$$

□

Exemplo 6.3. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Logo, para $x \neq 0$ temos $f'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x$. Em $x = 0$ usamos a definição:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Logo $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas $f'$ não é contínua no zero.

Teorema 6.2.2 (Derivada da Função Inversa). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e invertível com inversa $g : J \to \mathbb{R}$ contínua, e $J = f(I)$. Se $f$ é diferenciável em $c \in I$, então $g$ é diferencável em $d = f(c)$ se e somente se $f'(c) \neq 0$. Neste caso,*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Demonstração. Tendo que $g$ é continua. Al'em disso, se $y \in J\backslash\{d\}$, então $g(y) \neq c$. Logo, se $f'(c) \neq 0$,

$$\lim_{y\to d} \frac{g(y) - g(d)}{y - d} = \lim_{y\to d} \frac{g(y) - c}{f(g(y)) - f(c)} = \lim_{y\to d} \left( \frac{f(g(y)) - f(c)}{g(y) - c} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(c)}.$$

Logo $g$ é diferenciável em $d$ e $g'(d) = 1/f'(c)$. Analogamente, se $g$ é diferenciável em $d$, então usando a regra da cadeia e que $g(f(x)) = x$, temos

$$g'(f(c))f'(c) = 1,$$

e então $f'(c) \neq 0$. $\square$

Exemplo 6.4. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então $f$ tem inversa $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, e $g(y) = \sqrt[n]{y}$. Para $y > 0$ temos então

$$g'(y) = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Note que $g$ não é diferenciável no zero pois $f'(0) = 0$.

## 6.3. Aplicações

Uma primeira e importante aplicação diz respeito a pontos extremos locais. Dizemos que uma função$f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tem um *máximo local* em $c \in I$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I \implies f(x) \leq f(c).$$

Definição análoga serve para mínimo local. Chamamos um ponto de máximo ou mínimo local de ponto extremo local.

O resultado a seguir descreve condição necessária para um ponto ser extremo local.

Teorema 6.3.1 (Ponto extremo interior). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, e $c \in I$ ponto extremo local. Se $f$ é diferenciável em $c$, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assuma $c$ ponto de máximo local. Então, se $f'(c) > 0$ temos

$$0 < f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

numa vizinhança de $c$. Logo, para $x > c$ tem-se $f(x) > f(c)$, contradição pois $c$ é ponto de máximo local. De forma semelhante não podemos ter $f'(c) < 0$. Logo $f'(c) = 0$. $\square$

A seguir apresentamos um resultado com importantes por si e por suas consequências. É o *Teorema do Valor Médio*, que vemos a seguir na sua versão mais simples, o *Teorema de Rolle*.

Teorema 6.3.2 (Teorema de Rolle). *Seja $a < b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e diferenciável em $[a, b]$. Assuma ainda que $f(a) = f(b) = 0$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se $f$ é identicamente nula em $[a, b]$, então o resultado é verdadeiro. Caso contrário, então $f$ assume algum valor positivo ou negativo em $(a, b)$. Sem perda de generalidade, suponha que $f$ assuma algum valor positivo. Como $[a, b]$ é compacto, então $f$ atinge seu máximo em algum $c \in (a, b)$. Mas pelo Teorema do Ponto extremo interior 6.3.1, $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 6.3.3 (Teorema do Valor Médio). *Seja $a < b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e diferenciável em $[a, b]$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração. Seja

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Então $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Como $f$ é diferenciável em $[a, b]$, então $\phi$ também o é no mesmo intervalo. Logo, pelo Teorem de Rolle 6.3.2 existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Portanto

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Uma primeira aplicação do Teorema do Valor Médio garante que se uma função definida num intervalo tem derivada identicamente igual a zero, então a função é constante.

Lema 6.3.4. Assuma que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja contínua em $[a, b]$, onde $a < b$, e diferenciável em $(a, b)$. Se $f'(x) = 0$ para todo $x$, então $f$ é constante em $[a, b]$.

Demonstração. Seja $a < x < b$. Pelo Teorema do Valor Médio 6.3.3, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(x) = f(a)$. Como $x$ é arbitrário, temos $f$ constante em $(a, b)$. Mas continuidade temos $f$ constqante em $[a, b]$. □

Observe que pelo resultado acima, se $f$, $g$ são funções diferenciáveis que tem a mesma derivada, então $f$ e $g$ diferem por uma constante.

A aplicação seguinte do Teorema do Valor Médio garante condições necessárias e suficientes para uma função ser crescente num intervalo.

Lema 6.3.5. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em $I$. Então

(1) $f$ é crescente em $I$ se e somente se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
(2) $f$ é decrescente em $I$ se e somente se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Assuma $f$ crescente.
$(\implies)$ Para $x$, $c \in I$,

$$x < c \text{ ou } x > c \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Portanto

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$(\implies)$ Assuma $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Sejam $x_1 < x_2$ com $x_1 < x_2 \in I$. Usando o teorema do valor médio 6.3.3, existe $c \in (x_1, x_2)$. □

Observação. É possível modificar a demonstração acima e mostrar que $f'(x) > 0$ implica em $f$ estritamente crescente. Entretanto, mesmo funções que tem derivada nula em alguns pontos podem ser estritamente crescentes, como por exemplo $f(x) = x^3$.

Observação. Não é verdade que se $f'(c) > 0$ para algum ponto $c$ no domínio da $f$ implique em $f$ crescente numa vizinhança de $c$. Como exemplo considere

$$g(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é diferenciável em zero com $g'(0) = 1$, mas não é crescente e, nenhuma vizinhança do zero.

Outra aplicação do Teorema do Valor Médio segue no exemplo abaixo.

Exemplo 6.5. Seja $f(x) = \exp(x)$. Então $f'(x) = \exp(x)$. Queremos mostrar que

$$\exp(x) > 1 + x \text{ para todo} x \neq 0. \tag{6.3.1}$$

Seja $x > 0$. Então aplicando o Teorema do Valor Médio em $[0, x]$ temos que existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\exp(x) - \exp(0) = \exp(c)(x - 0).$$

Como $c > 0$, então $\exp(c) > \exp(0) = 1$. Logo

$$\exp(x) > 1 + x.$$

Para $x < 0$, os argumentos são semelhantes e portanto a desigualdade (6.3.1) vale.

## 6.4. Teorema de Taylor e Aplicações

Uma ferramenta poderosa em análise com várias consequências é o Teorema de Taylor, que é na verdade também uma aplicação do Teorema do Valor Médio.

A expansão de Taylor aproxima localmente uma função que pode ser complicada por um polinômio. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ onde $I \subset \mathbb{R}$ tenha $n \geq 0$ derivadas num ponto $x_0 \in I$. Defina

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

onde usamos a notaçãoque $g^{(k)}(c)$ indica a k-ésima deriva de $g$ num ponto $c$.

Note que com a definição acima, temos $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, \ldots, n$. Chamamos $P_n$ de polinômio de Taylor de ordem $n$ para $f$ em $x_0$, e o resultado abaixo diz o quão boa é a aproximação de uma função por seu polinômio de Taylor.

Teorema 6.4.1. *Seja $n \geq 0$ e $I = [a, b]$, com $a < b$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ $n$ vezes diferenciável em $I$ com $f^{(n)}$ contínua em $I$ e tal $f^{(n+1)}$ exista em $(a, b)$. Se $x_0$, $x \in I$ então existe $\xi \in (x_0, x) \cap (x, x_0)$ tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Demonstração. Sejam $x_0$, $x \in I$. Sem perda de generalidade, assuma $x > x_0$. Defina $J = [x_0, x]$ e seja $F : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n)}(t).$$

Logo
$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$
Definindo $G:\ J \to \mathbb{R}$ por
$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0),$$
temos $G(x_0) = G(x) = 0$. Pelo Teorema de Rolle 6.3.2 existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que
$$0 = G'(\xi) = F'(\xi) + (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0).$$
Portanto
$$F(x_0) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-\xi)^n} F'(\xi) = \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-\xi)^n}\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$
$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$
□

Uma primeira aplicação refere-se à caracterização de extremos locais.

Teorema 6.4.2. *Seja $a < b \in \mathbb{R}$ e $I = [a, b]$. Sejam $x_0 \in (a, b)$ e $k \geq 2$ número inteiro. Supondo que $f', \dots, f^{(k)}$ existam, que sejam contínuas em $I$, e que $f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ mas $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, temos que*

(1) *Se $k$ é par e $f^{(k)}(x_0) > 0$, então $f$ tem mínimo local em $x_0$.*
(2) *Se $k$ é par e $f^{(k)}(x_0) < 0$, então $f$ tem máximo local em $x_0$.*
(3) *Se $k$ é ímpar, então $x_0$ não é máximo nem mínimo local.*

Demonstração. Pelo Teorema de Taylor, para $x \in I$ existe $\xi$ entre $x_0$ e $x$ tal que
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(k-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{(k-1)}}{(k-1)!}$$
$$+ f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$
Assumindo agora que $f^{(k)}(x_0) > 0$, como $f^{(k)}$ é contínua então existe $\delta > 0$ tal que $f^{(k)}(x) > 0$ para todo $x \in U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se $x \in U$, então $\xi \in U$ e então $f^{(\xi)}(x) > 0$. Se $n$ é par, então para $x \neq x_0$ temos
$$f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!} > 0.$$
Logo
$$x \in U \backslash \{x_0\} \implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ é mínimo local},$$
e portanto (1) está demonstrado.

Para demonstrar (2) o argumento é semelhante.

Finalmente, se $k$ é ímpar, então $(x - x_0)/k!$ é positivo para $x > x_0$ e negativo para $x < x_0$. Logo $f(x) > f(x_0)$ ou $f(x) < f(x_0)$ dependendo do sinal de $x - x_0$. Logo a proposição (3) é verdadeira. □

Uma segunda aplicação diz respeito à funções convexas. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em $I$ se para todo $t \in [0,1]$ e $x_1,\, x_2 \in I$ temos

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Graficamente, uma função é convexa se o gráfico de $f$ entre $x_1$ e $x_2$ está abaixo da reta que une os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Teorema 6.4.3. *Seja $I$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$. Então $f$ é convexa se e somente se $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. ( $\Longleftarrow$ )Assuma que $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$. Sejam $x_1 < x_2 \in I$ e $0 < t < 1$. Definindo $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$, pelo Teorema de Taylor existe $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ e $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ tais que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2, \\ f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2. \end{aligned}$$

Como $f''(\xi_1) \ge 0$ e $f''(\xi_2) \ge 0$, então

$$\begin{aligned} &(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \\ &\quad = f(x_0) + [(1-t)x_1 + tx_2 - x_0]f'(x_0) + \frac{(1-t)}{2}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{t}{2}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2 \\ &\qquad\qquad = f(x_0) + \frac{(1-t)}{2}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{t}{2}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2 \ge f(x_0). \end{aligned}$$

Logo $f$ é convexa.

( $\Longrightarrow$ ) Sejam $x_1 < x < x_2 \in I$. Então $x = (1-t)x_1 + tx_2$ para $t = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$. Logo, se $f$ é convexa,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{(1-t)f(x_1) + tf(x_2) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

e

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \ge \frac{f(x_2) - [(1-t)f(x_1) + tf(x_2)]}{(1-t)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Portanto,

$$x_1 < x < x_2 \implies \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

e

$$x_1 < x_2 \implies f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2).$$

Logo $f'$ é função crescente em $I$ e então $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$. $\square$

## 6.5. Exercícios

EXERCÍCIO 6.1. Assuma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $c \in \mathbb{R}$ e $f(c) = 0$. Mostre então que $g(x) = |f(x)|$ é diferenciável em $c$ se e somente se $f'(c) = 0$.

EXERCÍCIO 6.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo relativo de $f$. Mostre que é único.

EXERCÍCIO 6.3. Dê exemplo de uma função uniformemente contínua em $[0, 1]$ que seja diferenciável em $(0, 1)$ mas cuja derivada não seja limitada em $(0, 1)$. Mostre porque o seu exemplo funciona.

EXERCÍCIO 6.4. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se $f'$ é positiva em $I$, i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então $f$ é estritamente crescente.

EXERCÍCIO 6.5. Mostre que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável com derivada limitada em $I$, então $f$ é de Lipschitz.

CAPÍTULO 7

# Sequência de Funções

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Dizemos então que $(f_n)$ define uma sequência de funções. Note que cada $x \in A$ define a sequência $(f_n(x))$ de reais.

## 7.1. Convergência Pontual

Definição 7.1.1. *Seja $(f_n)$ uma sequência de funções, onde $f_n : A \to \mathbb{R}$, e $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $(f_n)$ converge pontualmente para uma função $f : A_0 \to \mathbb{R}$ em $A_0 \subset A$ se para todo $x_0 \in A_0$, a sequência $(f_n(x))$ converge para $f(x)$.*

Exemplo 7.1. Sejam $f_n(x) = x/n$ e $f(x) = 0$. Então $f_n$ converge pontualmente para $f$ em $\mathbb{R}$, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x/n = 0$.

Exemplo 7.2. Sejam $g_n(x) = x^n$. Então

(1) Se $x \in (-1, 1)$, então $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.
(2) Se $x = 1$, então $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.
(3) Se $x = -1$, então $g_n(x) = (-1)^n = 1$ não converge.
(4) Se $|x| > 1$, então $g_n(x)$ não é limitada e portanto não converge.

Logo $(g_n)$ converge pontualmente para $g$ em $(-1, 1]$, onde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Note que

$$0 = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to+\infty} g_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} g_n(x) = 1.$$

Note que a definição de convergência pontual pode ser escrita da seguinte forma.

Definição 7.1.2. *Uma sequência de funções $(f_n)$ onde $f_n : A \to \mathbb{R}$, e $A \subset \mathbb{R}$ converge pontualmente para uma função $f : A_0 \to \mathbb{R}$ em $A_0 \subset A$ se para dado $\epsilon > 0$ e $x \in A_0$, existe $N_0(x, \epsilon)$ tal que*

$$n > N_0(x, \epsilon) \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

O que fica claro na definição acima é que a "escolha de $N_0$" *depende* do ponto $x$ em consideração. Considere o exemplo 7.1, e seja $\epsilon = 1/10$. Então, para $x = 1$ e $N_0(x, \epsilon) = 10$, temos

$$n > N_0(x, \epsilon) = 10 \implies |f_n(x) - f(x)| = |1/n| < \epsilon.$$

Mas para $x = 100$, a escolha anterior de $N_0 = 10$ já não é suficiente e temos que escolher $N_0(x, \epsilon) \geq 100$.

## 7.2. Convergência Uniforme

DEFINIÇÃO 7.2.1. *Dados $A \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência de funções $(f_n)$, converge uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$, se dado $\epsilon > 0$ existe $N_0(\epsilon)$ tal que*

$$n > N_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in A.$$

Observe que convergencia uniforme implica em convergencia pontual, mas que a afirmação recíproca não vale. Uma forma prática de se mostrar que uma sequência de funções não converge uniformemente é utilizando o resultado abaixo.

TEOREMA 7.2.2. *Seja $f_n : A \to \mathbb{R}$ onde $A \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência de funções $(f_n)$ não converge uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$ se e somente se para algum $\epsilon > 0$ existir uma subsequência $(f_{n_k})$ e uma sequência de pontos $(x_k)$ em $A$ tais que*

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \epsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

EXEMPLO 7.3. Sejam $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = x/n$ e $f(x) = 0$. Tome $\epsilon = 1/2$, $n_k = k$ e $x_k = k$. Então

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = 1 > \epsilon.$$

Logo não há convergencia uniforme.

Uma forma de "medir" convergência uniforme é através de uma norma, a norma do supremo, que para cada função limitada associa o valor máximo que o módulo desta assume. Formalmente temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 7.2.3. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$, função limitada. Definimos a norma do supremo então por*

$$\|f\|_{\sup,A} = \sup f(A).$$

Portanto, uma sequência de funções limitadas $(f_n)$, onde $A \subset \mathbb{R}$, converge para $f : A \to \mathbb{R}$, se e somente se $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\sup,A} = 0$.

EXEMPLO 7.4. Se $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é tal que $g_n(x) = x^n$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1), \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

então

$$\|g_n - g\|_{\sup,[0,1]} = \sup\bigl(\{x^n : x \in [0,1)\} \cup \{0\}\bigr) = 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $g_n$ não converge uniformemente para $g$.

EXEMPLO 7.5. Se $f_n(x) = x/n$ e $f(x) = 0$ então

$$\|f_n - f\|_{\sup,[0,1]} = \sup\{x/n : x \in [0,1]\} = 1/n.$$

Logo $f_n$ converge uniformemente para a função identicamente nula.

TEOREMA 7.2.4 (Critério de Cauhcy para convergência uniforme). *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Então $(f_n)$ converge uniformemente para uma função $f : A \to \mathbb{R}$ se e somente se dado $\epsilon > 0$, existe $N_0$ tal que*

$$m, n > N_0 \implies \|f_m - f_n\|_{\sup,A} < \epsilon.$$

Demonstração. ( $\implies$ ) Basta usar que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)|$$

para todo $x \in A$.

( $\impliedby$ )Assuma que dado $\epsilon > 0$ existe $N_0$ tal que

$$m, n > N_0 \implies \|f_m - f_n\|_{\sup,A} < \epsilon.$$

Logo,

$$m, n > N_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in A$. Mas então $(f_n(x))$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e podemos definir $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Falta agora mostrar que $\lim_{n\to+\infty} \|f_m - f\|_{\sup,A} = 0$. Dado $\epsilon > 0$, seja $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N_0 \implies \|f_m - f_n\|_{\sup,A} < \epsilon.$$

Dado $x \in A$ e seja $\bar{K} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq \bar{K} \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Note que $K$ depende somente de $\epsilon$ e $\bar{K}$ depende também de $x$. Então, seja $n \geq K$, e para cada $x \in A$, seja $m = \sup\{K, \bar{K}\}$. Logo

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

e $(f_n)$ converge uniformemente para $f$. □

Finalmente concluímos esta seção mostrando que limite uniforme de funções contínuas é também uma função contínua. Lembre-se que esta propriedade não vale em geral se a convergência é só pontual.

Teorema 7.2.5 (Troca de Limites e Continuidade). *Seja $(f_n)$ sequência de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$ contínuas em $A \subset \mathbb{R}$ convergindo uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$. Então $f$ é contínua em $A$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in A$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_{N_0}(x)| < \epsilon/3$ para todo $x \in A$. Como $f_{N_0}$ é contínua em $A$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, |x - x_0| < \delta \implies |f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)| + |f_{N_0}(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo $f$ é contínua. □

## 7.3. Equicontinuidade

Nesta seção discutiremos os conceitos de equicontinuidade e enunciaremos o Teorema de Arzelá–Ascoli. Não apresentaremos demonstrações, que podem (devem) ser conferidas em [**3**], por exemplo.

Seja $F$ conjunto de funções $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$. Chamamos o conjunto $F$ de *equicontínuo em* $x_0 \in A$, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ para todo } x \in A \text{ e } f \in F.$$

Se $F$ for equicontínuo em todos os pontos de $A$, dizemos simplesmente que $F$ é *equicontínuo*.

O conceito de equicontinuidade num ponto pode ser generalizado de forma a que a esoclha de $\delta$ não dependa mais do ponto em consideração i.e., seja uniforme. Dizemos então que $F$ é *uniformemente equicontínuo*, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, x_0 \in A, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ para todo } x,\, x_0 \in A \text{ e } f \in F.$$

De forma semelhante, chamamos $F$ de *simplesmente limitado* se para cada $x \in A$ existe $c$ tal que $|f(x)| < c$ para todo $f \in F$. Finalmente, dizemos que $F$ é *uniformemente limitado* se existe $c$ tal que $|f(x)| < c$ para cada $x \in A$ e para todo $f \in F$.

O resultado abaixo informa que se $A$ for compacto, então equicontinuidade e equicontinuidade uniforme são equivalentes. O mesmo acontece com limitação simples e uniforme.

LEMA 7.3.1. Seja $F$ conjunto de funções $f : K \to \mathbb{R}$, onde $K \subset \mathbb{R}$ é compacto. Então $F$ é equicontínuo se e somente se é uniformemente equicontínuo. Além disto, $F$ é simplesmente limitado se e somente se for úniformemente limitado.

Temos então o Teorema de Arzelá–Ascoli, que de alguma forma generaliza o Teorema de Bolzano–Weierstrass para sequências de funções.

TEOREMA 7.3.2 (Teorema de Arzelá–Ascoli). *Seja $F$ conjunto de funções $f : K \to \mathbb{R}$, onde $K \subset \mathbb{R}$ é compacto. Então $F$ é equicontínuo e simplesmente limitado se e somente se toda sequência de funcoes têm subsequência que converge uniformemente.*

Como aplicação mostramos alguns detalhes do belo exemplo apresentado em [**3**].

EXEMPLO 7.6. Seja $F$ o conjunto das funções $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, contínuas e tais que $f(-1) = f(1) = 1$. Considere $A(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. É possível mostrar que não existe $\bar{f} \in F$ tal que $A(\bar{f}) = \min_{f \in F} A(f)$. Considere agora

$$F_c = \{f \in F : f \text{ é de lipschitz com constante } c\}.$$

Então $F_c$ é simplesmente limitado e equicontínuo. Seja então $\mu_c = \inf\{A(f) : f \in F_c\}$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n \in F_c$tal que

$$\mu_c \leq A(f_n) \leq \mu_c + \frac{1}{n}.$$

Pelo Teorema de Arzelá–Ascoli, $(f_n)$ possui subsequência $(f_{n_k})$ uniformemente convergente para algum $\bar{f}_c$. Pode-se mostrar que $\bar{f}_c \in F_c$, e que $A(\bar{f}_c) = \min_{f \in F_c} A(f)$. Portanto o problema de minimizar $A(\cdot)$ em $F_c$ tem solução.

## 7.4. Exercícios

EXERCÍCIO 7.1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável numa vizinhança de $x \in I$. Mostre então que existe uma constante $c$ tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para $h$ suficientemente pequeno. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando $f$ é suave.

EXERCÍCIO 7.2. Mostre que dados quaisquer $x$, $y \in \mathbb{R}$ fixados, o resto da série de Taylor da função $\cos x$ converge para zero quando $n \to +\infty$.

EXERCÍCIO 7.3. Seja a sequência de funções $(f_n)$, onde $f_n(x) = \sin(nx)/(1+nx)$. Mostre que $(f_n)$ converge pontualmente para todo $x \in \mathbb{R}$, uniformemente em $[a, +\infty)$ para $a > 0$, mas não converge uniformemente em $[0, +\infty)$.

EXERCÍCIO 7.4. Seja $I \subset \mathbb{R}$ e $f_n : I \to \mathbb{R}$ sejam funções uniformemente contínuas. Mostre que $(f_n)$ converge uniformemente para $f$, então $f$ é uniformemente contínua.

EXERCÍCIO 7.5. Ache exemplo de sequência $(f_n)$ de funcoes que converge uniformemente em $(0, 1]$, mas não em $[0, 1]$.

# Bibliography

[1] Robert Bartle, The elements of Real Analysis, *Wiley International Edition*, 1976.
[2] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert Introduction to Real Analysis, *Wiley International Edition*, 1976.
[3] Elon L. Lima Curso de Análise, Volume I, *Projeto Euclides*, 1982.