

ANÁLISE – LNCC
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **13 de setembro de 2011**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável em \mathbb{R} e tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é injetiva.

Exercício 2. Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se f' é positiva em I , i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.

Exercício 3. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f .

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que a derivada direcional de f em $(0, 0)$ com respeito a $\mathbf{u} = (a, b)$ existe e que

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = \frac{b^2}{a}, \quad \text{se } a \neq 0.$$

Mostre que f não é contínua e portanto não é diferenciável no $(0, 0)$.

Exercício 5. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua em B , diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B . Mostre que f tem ponto crítico no interior de B .

Exercício 6 (Mínimos Quadrados). Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$.

Mostre que a , b e c satisfazem as equações

$$a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i.$$