ANÁLISE – LNCC
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **30 de agosto de 2011**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e $f(\mathbf{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ tal que f seja estritamente positiva.

Exercício 2. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 4. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que dado $\epsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que se x, $y \in [a_{i-1}, a_i]$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Exercício 5. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^m$ limitado, e $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que $\boldsymbol{f}$ é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.

Exercício 6. Suponha $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0,1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que f seja uniformemente contínua em $[0,1]$.