ANÁLISE – LNCC
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **11 de agosto de 2011**

Exercício 1. Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) K é compacto

(2) toda sequência contida em K possui subsequência convergente com limite contido em K.

Exercício 2. Seja $x_1 \in [0, +\infty)$, e seja a sequência de reais definida por

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Determine para quais valores de $x_1 \in [0, +\infty)$ a sequência (x_n) converge, e para qual valor. Demonstre suas afirmativas. (*Obs: Para toda sequência convergente* (y_n), *vale a propriedade* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} y_n}$.)

Exercício 3. Sejam (x_n) e (y_n) duas subsequências de números reais, convergentes para x e y respectivamente, onde $x < y$. Mostre que existe um número natural N tal que $x_n < y_n$ para todo n maior que N.

Exercício 4. Seja (x_k) sequência monótona em $\mathbb{R}$, e suponha que (x_k) contenha subsequência convergente. Mostre que (x_k) converge.

Exercício 5. (Bartle) Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = (2 + x_n)^{1/2}$. Mostre que x_n é monótona e limitada, e portanto converge. Ache seu limite.

Exercício 6. Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$, limitada, e seja L o conjunto de números reais x tais que existe uma subsequência de (x_k) convergindo para x. Se $L \neq \emptyset$, mostre que $\sup L = \limsup x_k$.