ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
SEGUNDA PROVA

Prof. Alexandre Madureira

Data: **5 de junho de 2003**

Tempo de prova: **2 horas**

Valor total da prova: 10 pontos (0.5 pontos de bônus).

1- (1.5 pontos) Dizemos que duas matrizes A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ são similares se existe um matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = P^{-1}BP$. Mostre que matrizes similares têm os mesmos autovalores.

Solução: Note que

$$\det(A-\lambda I) = \det(P^{-1}BP-\lambda I) = \det[P^{-1}(B-\lambda I)P] = \det(P^{-1})\det(B-\lambda I)\det(P) = \det(B-\lambda I).$$

Logo, os polinômios característicos de A e B são os mesmos, e portanto A e B têm os mesmos autovalores.

2- (1.5 pontos) Sejam A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ duas matrizes diagonalizáveis com os mesmos autovetores. Mostre que $AB = BA$.

Solução: Como A e B são diagonalizáveis e têm os mesmos autovetores, então se S é uma matriz cujas colunas são estes autovetores, temos que $\Lambda_A = S^{-1}AS$ e $\Lambda_B = S^{-1}BS$ são diagonais. Logo,

$$AB = S\Lambda_A S^{-1}S\Lambda_B S^{-1} = S\Lambda_A\Lambda_B S^{-1} = S\Lambda_B\Lambda_A S^{-1} = S\Lambda_B S^{-1}S\Lambda_A S^{-1} = BA.$$

3- (1.5 pontos) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica. Mostre que autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Solução: Sejam λ_1 e λ_2 dois autovalores de A, e sejam $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ e $A\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$. Então

$$\lambda_1\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TA^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TA\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{x}^T\mathbf{y},$$

e então $(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos então que $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$.

4- (1.5 pontos) Mostre que todo autovalor de matrizes unitárias têm norma 1

Solução: Seja U matriz unitária e λ um autovetor. Então

$$\|\mathbf{x}\| = \|U\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|.$$

Logo, $|\lambda| = 1$.

5- (1.5 pontos) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz positiva definida. Calcule seu posto.

Solução: O núcleo de uma matriz positiva definida contêm somente o vetor nulo, pois se $\mathbf{x}$ é não nulo e $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$, uma contradição com A ser positiva definida. Logo, como o núcleo de A tem dimensão zero, o posto de A é igual a n.

6- (1.5 pontos) Suponha que A seja matriz real simétrica 3×3 com autovalores 0, 1, 2.

(1) Quais propriedades podem ser garantidas para os autovetores, de norma um, u, v, w?
(2) descreva o núcleo e o espaço coluna de A.
(3) Sob que condições o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem pelo menos uma solução?
(4) Se existe solução para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, essa solução é única?
(5) Se u, v, w formam as colunas de uma matriz S, o que é S^{-1}? E o que é $S^{-1}AS$

7- (1.5 pontos) Dê exemplo de

(1) uma matriz diagonalizável com autovalores com multiplicidade maior que 1.
(2) uma matriz *não* diagonalizável com autovalores com multiplicidade maior que 1.
(3) uma matriz diagonalizável e não invertível.
(4) uma matriz com todos autovalores iguais a 0.
(5) matriz com mais de um autovetor, e que não tenha dois autovetores ortogonais.
(6) uma matriz positiva definida.

Solução:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(3) $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.
(4) $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Os autovalores são 1 e 2, com autovetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ (matriz identidade de dimensão 1).