ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira

Data: **25 de abril de 2003**

Tempo de prova: **2 horas**

Valor total da prova: 10 pontos + 2 pontos de bônus.

1- (2.0 pontos) Determine a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por todos os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad x_1 + 2x_2 = 0, \quad \text{e } x_3 - 15x_4 = 0.$$

Solução: A solução do sistema pertence ao núcleo de A (que denotamos por $N(A)$), onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz já está na sua forma escalonada, e vemos que $\text{posto}(A) = 2$. Logo $\dim\big(N(A)\big) = 4 - \text{posto}(A) = 2$.

2- (2.0 pontos) Seja A uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que A é invertível se e somente se as colunas de A são linearmente independentes.

Solução: ($\Longrightarrow$) A matriz A invertível implica que existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Sejam $\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_n$ as colunas de A. Suponha agora que existam escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n = 0.$$

Se $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^t$, então $A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Logo, $\boldsymbol{\alpha} = BA\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ e então as colunas de A são LI.

($\Longleftarrow$) Suponha agora as colunas de A são LI. Então

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{N(A)} = \{\mathbf{0}\},$$

onde $N(A)$ é o núcleo de A. Logo $\dim R(A) = n$ (onde $R(A)$ é o espaço coluna de A), e a sequência de problemas

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i \qquad i = 1, \cdots, n,$$

tem solução. Definindo B como a matriz que tem como colunas os $\mathbf{x}_i$, teremos $AB = I$.

Para acharmos uma inversa "à esquerda", basta notar que $\dim R(A^t) = n$. Logo, para $i = 1, \cdots, n$, existe $\mathbf{y}_i$ tais que

$$A^t\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i,$$

e se $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiver $\mathbf{y}_i^t$ como iésima linha, temos que $CA = I$.

Finalmente, $B = CAB = C$, e então A é invertível.

3- (2.0 pontos) Seja A uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Assuma que para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenha pelo menos uma solução. Mostre então que a única solução para $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ é $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Solução: Suponha que $A^t\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e que $\mathbf{x}$ resolva $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Então

$$\mathbf{y}^t\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^t\mathbf{y} = \mathbf{x}^tA^t\mathbf{y} = 0.$$

Logo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

4- (2.0 pontos) Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e assuma que nenhum dos dois seja o vetor nulo. Se *não existe* um número c tal que $\mathbf{y} = c\,\mathbf{x}$, mostre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$ e que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos subspaços gerados por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Solução: Suponha que $\alpha_1 \neq 0$ e que $\alpha_1\mathbf{y} + \alpha_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Então $\mathbf{y} = -(\alpha_2/\alpha_1)\mathbf{x}$, o que contradiz uma hipótese do problema. Logo $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implica que $\alpha_2 = 0$. Logo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são LI. Como $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é LI e $\mathbb{R}^2$ tem dimensão dois, então $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Seja agora $X = \operatorname{span}\{\mathbf{x}\}$ e $Y = \operatorname{span}\{\mathbf{y}\}$. Então $\mathbb{R}^2$ é gerado por $X + Y$ já que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Suponha agora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ e $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$, com $\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$. Logo existem a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1 = a\mathbf{x}, \qquad x_2 = b\mathbf{x}, \qquad y_1 = c\mathbf{y}, \qquad y_2 = d\mathbf{y}.$$

Então $a\mathbf{x} + c\mathbf{y} = b\mathbf{x} + d\mathbf{y}$, e

$$(a - b)\mathbf{x} + (c - d)\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Como $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ são LI, temos $a = b$ e $c = d$. Logo $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$ e temos $\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$.

5- (2.0 pontos) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno $(\cdot,\cdot)$. Sejam $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ um conjunto de elementos de V, com norma 1 e mutualmente perpendiculares, i.e,

$$\begin{cases} (\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)=0 & \text{se } i\neq j,\\ \|\mathbf{v}_i\|^2=(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i)=1. \end{cases}$$

Assuma que para todo $v\in V$, temos

$$(\mathbf{v},\mathbf{v})=\sum_{i=1}^n(\mathbf{v},\mathbf{v}_i)$$

Mostre que $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ é uma base de V.

Solução: Como $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ são ortogonais, eles são LIs. Assuma agora que estes vetores não gerem V. Então existe $\mathbf{v}\in V$, com $\mathbf{v}$ não nulo tal que $\mathbf{v}\notin\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$. Usando o processo de Gram-Schmidt se necessário, podemos achar $\hat{\mathbf{v}}$ não nulo tal que $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n,\hat{\mathbf{v}}\}$ sejam *todos* ortogonais. Mas então

$$(\hat{\mathbf{v}},\hat{\mathbf{v}})=\sum_{i=1}^n(\hat{\mathbf{v}},\mathbf{v}_i)=0,$$

um absurdo pois $\hat{\mathbf{v}}$ é não nulo. Logo $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ geram V. Concluimos que $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ é base.

6- (2.0 pontos) Seja V um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)$, e seja $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ uma base de V. Sejam $c_1,\cdots,c_n$ números reais. Mostre que existe *exatamente* um vetor $\boldsymbol{\alpha}$ em V tal que

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=c_i,\qquad \text{para } i=1,\cdots,n.$$

Solução: Temos que mostrar que existem únicos $a_1,\cdots,a_n$, tais que $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$ satisfaça

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=c_i,\qquad \text{para } i=1,\cdots,n.$$

Note que isto é equivalente a

$$\begin{gathered} a_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)=c_1,\\ \cdots\cdots\\ a_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)=c_n, \end{gathered}$$

ou

$$E\mathbf{a}=\mathbf{c}, \tag{1}$$

onde $E_{i,j} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$, $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)^t$, e $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^t$. Basta então mostrar que (1) tem solução única. Mostraremos no caso que o núcleo de E é trivial, i.e., $N(E) = \{\mathbf{0}\}$. Suponha $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^t$. Se $\mathbf{v} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, teremos $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Logo,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0,$$

i.e., $x_i = 0$ e $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como o núcleo de E é trivial e E é matriz quadrada, então o espaço coluna de E é o próprio $\mathbb{R}^n$. Concluimos finalmente que existe uma única solução para (1).