ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
PRIMEIRA PROVA

Prof. Alexandre Madureira

Data: **25 de abril de 2003**

Tempo de prova: **2 horas**

Valor total da prova: 10 pontos + 2 pontos de bônus.

1- (2.0 pontos) Determine a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por todos os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad x_1 + 2x_2 = 0, \qquad \text{e } x_3 - 15x_4 = 0.$$

2- (2.0 pontos) Seja A uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que A é invertível se e somente se as colunas de A são linearmente independentes.

3- (2.0 pontos) Seja A uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Assuma que para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenha pelo menos uma solução. Mostre então que a única solução para $A^T\mathbf{y} = 0$ é $\mathbf{y} = 0$.

4- (2.0 pontos) Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e assuma que nenhum dos dois seja o vetor nulo. Se *não existe* um número c tal que $\mathbf{y} = c\,\mathbf{x}$, mostre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$ e que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos subspaços gerados por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

5- (2.0 pontos) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno $(\cdot,\cdot)$. Sejam $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de elementos de V, com norma 1 e mutualmente perpendiculares, i.e,

$$\begin{cases} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 & \text{se } i \neq j, \\ \|\mathbf{v}_i\|^2 = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 1. \end{cases}$$

Assuma que para todo $v \in V$, temos

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}, \mathbf{v}_i)$$

Mostre que $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de V.

6- (2.0 pontos) Seja V um espaço vetorial com produto interno $(\cdot, \cdot)$, e seja $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ uma base de V. Sejam $c_1, \cdots, c_n$ números reais. Mostre que existe *exatamente* um vetor $\boldsymbol{\alpha}$ em V tal que

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i) = c_i, \qquad \text{para } i = 1, \cdots, n.$$