ÁLGEBRA LINEAR – LNCC
LISTA IV

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **12 de abril de 2002**

1- Aplique o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt usando o produto interno "usual," com os vetores

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}.$$

e obtenha uma base *ortonormal* para $\mathbb{R}^3$.

2- Seja V espaço vetorial com produto interno $< \cdot, \cdot >$, e $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Mostre que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se e somente se $< \mathbf{x}, \mathbf{z} >=< \mathbf{y}, \mathbf{z} >$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$.

3- Seja W subspaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ gerado por $(3,4)^T$. Usando o produto interno canônico, seja E a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^2$ em W. Ache a matrix de E na base canônica; descreva o complemento ortogonal de W; ache uma base ortonormal para a qual E é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

4- Seja V o espaço de polinômios de grau ≤ 3, com o produto interno

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Ache o complemento ortogonal do subspaço de polinômios constantes. Aplique o processo de Gram–Schmidt para a base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

5- Seja W subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno V. Seja E projeção ortogonal de V em W. Mostre que $< E\mathbf{x}, \mathbf{y} >=< \mathbf{x}, E\mathbf{y} >$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em V.

6- Seja W um subspaço vetorial de um espaço vetorial com produto interno V. Mostre que $W \subset (W^\perp)^\perp$. Se W tiver dimensão finita, mostre que $W = (W^\perp)^\perp$.