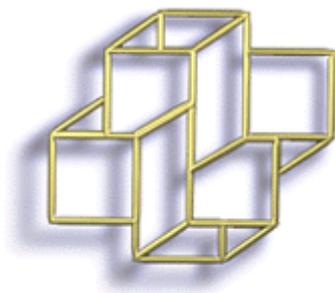

LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA



**Laboratório
Nacional de
Computação
Científica**

TEMC: INTRODUÇÃO AO MÉTODO SÍSMICO
MÓDULO: MODELAGEM COMPUTACIONAL EM GEOFÍSICA

JOSIAS JOSÉ DA SILVA, D.Sc.
josias@petrec.com.br

RAFAEL LOURENÇO ANCELME, M.Sc.
rafael@petrec.com.br

JANEIRO DE 2015

Índice

CAPÍTULO 1 - Introdução	4
1.1 Sismologia de Reflexão - Conceitos.....	6
1.1.1 Onda Sísmica.....	6
1.1.2 Ondas Compressionais	8
1.1.3 Ondas Cisalhantes	10
1.2 Sísmica de Superfície	12
1.3 Resolução	14
1.4 Impedância Acústica	15
CAPÍTULO 2 - Modelagem Computacional - Teoria	17
2.1 Equação da Onda	17
2.1.1 Método das Diferenças Finitas.....	19
2.1.2 Dispersão e Estabilidade Numérica	25
2.1.3 Bordas Não Reflexivas	26
2.1.4 Bordas Absortiva.....	30
2.1.5 Fonte	31
2.2 Geometria dos Eventos Sísmico	33
2.2.1 Definições de onda.....	35
CAPÍTULO 3 - Modelagem Computacional – Prática	37
3.1 Algoritmo Computacional 2-D em FORTRAN-90	38
3.1.1 Modelos de Velocidade	38
3.1.2 Gravando um modelo de velocidade em disco	43

3.1.3 Lendo um modelo de velocidade em disco	43
3.1.4 Fonte	45
3.1.5 Equação da onda	46
3.1.6 Bordas não Reflexivas	47
3.1.7 Bordas Absortivas.....	48
3.1.8 Atualização do Campo e Geração do Sismograma.....	50
3.1.9 Visualização dos Resultados	53
3.2 Algoritmo Computacional 3-D em FORTRAN-90	53
3.2.1 Modelo de Velocidade 3D	54
3.2.2 Modelagem tridimensional	58
Referências.....	60

Capítulo 1

Introdução

A modelagem computacional é uma ferramenta extremamente útil na exploração geofísica de reservas de óleo e gás. Um poço exploratório no mar pode custar dezenas de milhões de dólares. Por isso, a integração de várias áreas de conhecimento, como a geologia, geofísica, engenharia, etc., se torna necessária para o melhor entendimento das estruturas geológicas em subsuperfície. Uma destas áreas de conhecimento é a modelagem sísmica.

Quanto mais complexa for a área de estudo, maior é a importância do uso da simulação do levantamento sísmico. Toda a parametrização de um levantamento pode ser obtida com a utilização de dados sintéticos. O intervalo de aquisição¹, a taxa de amostragem, o número de traços necessários para o levantamento e tudo mais é fornecido para equipe sísmica através da simulação computacional.

As grandes companhias de petróleo no mundo enfrentam o desafio de encontrar reservas de hidrocarbonetos em estruturas geológicas cada vez mais complexas. Muitas técnicas de imageamento sísmico têm sido desenvolvidas com este objetivo, principalmente quando tratamos de resolução abaixo de domos salinos. São os chamados reservatórios do pré-sal. Associadas às técnicas de imageamento, a sísmica 3D tem sido usada como uma ferramenta de grande potencial à exploração de hidrocarbonetos cujo alto poder de resolução está fornecendo novos entendimentos dentro dos processos geológicos [1]. No entanto, o grande volume de dados gerados neste tipo de aquisição obriga a indústria a utilizar, não a técnica que fornece a melhor resolução, e sim a que é computacionalmente viável. Neste momento, os centros de pesquisas dentro das universidades assumem um papel de extrema importância: contribuir para

¹ O intervalo de aquisição pode estar relacionado com espaçamento entre as estações receptoras (geofones ou hidrofones) ou espaçamento entre as fontes (intervalo de tiro).

o desenvolvimento de tecnologias que tornem as técnicas de imageamento cada vez mais precisas e aplicáveis ao grande volume de dados gerados na exploração petrolífera.

Esta Apostila apresenta os conceitos fundamentais para a simulação da propagação de ondas sísmicas utilizando a equação completa da onda. A discretização desta equação será feita através do Método das Diferenças Finitas (MDF) com aproximações de quarta ordem para as derivadas espaciais e de segunda ordem para as temporais. O objetivo da discretização é amostrar um meio contínuo em intervalos discretos. A escolha deste método está no fato de não haver limitações quanto à complexidade do modelo de velocidade, uma vez que métodos como *Ray Tracing* ou aqueles que utilizam a equação da onda “*one way*” possuem dificuldades para mapear estruturas com alto grau de mergulho (ou inclinação) das camadas ou com muita variação lateral de velocidade. O uso da Migração Reversa no tempo utilizando a equação completa da onda nos permite imagear estruturas complexas, pois contempla todas as variações do campo de onda, tais como reflexões inter-camadas, reflexões múltiplas, refrações, difrações, etc. No entanto, o uso desta técnica, discretizada por Diferenças Finitas, exige uma malha estruturada com espaçamento entre pontos muito reduzido, para se evitar dispersão numérica e instabilidade da solução. Para a implementação computacional desta técnica torna-se quase que obrigatório o uso de cluster de computadores, quando se trata de dados 3D.

1.1 Sismologia de Reflexão - Conceitos

1.1.1 Onda Sísmica

Em nosso cotidiano estamos mais familiarizados com ondas se propagando em lagos ou oceanos do que com ondas sísmicas. Atirando-se uma pedra em um lago calmo produzem-se ondulações com certas características que são comuns a todas as ondas. Algumas destas características serão detalhadas antes de descrevermos as ondas sísmicas. As ondulações que se espalham pelo lago são ilustradas no perfil da Figura 1.1, as quais se estendem desde o ponto de impacto da pedra. A forma da superfície do lago muda do tempo t_1 para o tempo t_2 devido ao avanço das ondulações que se afastam do ponto de impacto. A distância entre duas cristas sucessivas da onda em um determinado tempo é chamada *comprimento de onda* (λ). Observa-se o avanço de uma dessas cristas da posição r_1 no tempo t_1 para a posição r_2 no tempo t_2 . Isto mostra que a velocidade da onda é dada pela expressão:

$$V = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \quad 1.1$$

A amplitude da onda (A) é o deslocamento das partículas da água acima ou abaixo da superfície não perturbada do lago. Acompanhando-se o gráfico nota-se como a amplitude na posição r_1 varia com o tempo. O intervalo de tempo necessário para um ciclo de oscilação é chamado período (T). Este é o tempo gasto pela crista da onda para avançar um comprimento de onda (λ). Desta forma, podemos relacionar período, comprimento de onda e velocidade através da fórmula:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad 1.2$$

A frequência (f) da onda é o número de oscilações que ocorrem em um determinado intervalo de tempo. É o inverso do período, ou seja:

$$f = \frac{1}{T} \quad 1.3$$

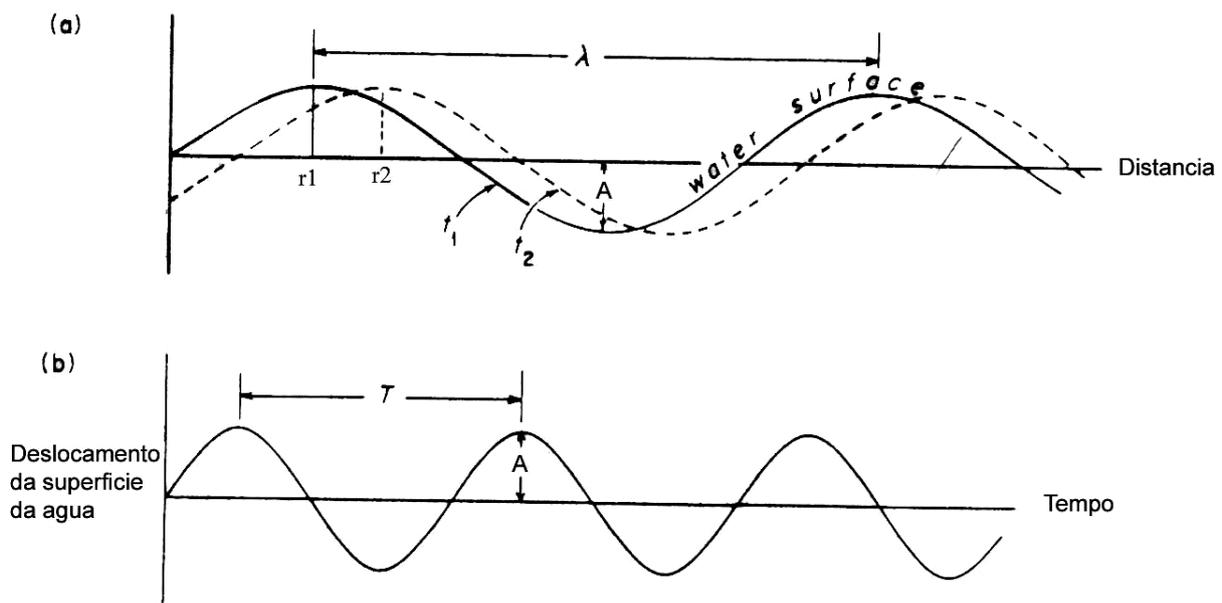


Figura 1.1: Ondas produzidas ao ser jogada uma pedra em um lago. (a) Perfil com a forma da superfície da água desde o momento do impacto no instante t_1 e posteriormente em um instante t_2 . (b) Deslocamento da superfície da água para cima e para baixo do nível inicial (adaptado de Robinson-1976) [2]

As ondas nos lagos ou oceanos têm normalmente períodos de segundos ou dezenas de segundos, e comprimento de onda de vários metros. Algumas ondas oriundas de terremotos possuem período de horas e comprimento de onda da ordem de centenas de quilômetros. Porém, em prospecção sísmica, onde se utiliza uma fonte controlada (tais como dinamites no caso terrestre e canhões de ar no caso marítimo) usualmente se trabalha com período na faixa de fração de segundo e comprimento de onda na faixa de dezenas de metros.

Estas ondas têm frequências da ordem de dezenas ou centenas de ciclos por segundo medidos em hertz (Hz). Tipos particulares de ondas de maior interesse em prospecção sísmica serão descritos nas próximas subseções.

1.1.2 Ondas Compressionais

Existem diferentes maneiras de fazer vibrações em uma amostra de rocha. Vamos considerar que as vibrações estão sendo produzidas por golpes de um martelo diretamente sobre um lado do material, conforme ilustrado na figura 1.2. No instante do impacto, as partículas deste lado serão deslocadas na direção em que o martelo está se movendo. Por um breve momento estas partículas se moverão para frente e para trás na direção do impacto do martelo. Um pouco depois irá cessar o movimento, porém outras partículas adjacentes se movem para frente e para trás na mesma direção.

Desta forma, um pulso de vibração se move através da amostra de rocha, provocando vibrações em partículas cada vez mais afastadas do ponto de impacto. Este pulso de vibração é uma onda sísmica. Ela se move através da amostra, primeiro comprimindo e depois esticando a rocha de ponto a ponto, como podemos ver na Figura 1.2. Um pulso causando este tipo de vibração é uma onda compressional, ou onda longitudinal ou simplesmente onda P.

Uma vez gerado este tipo de pulso, pode-se determinar qual o tempo t necessário para a onda compressional caminhar uma distância x através da amostra. Colocam-se transdutores em ambos os lados da amostra para se medir o instante do impacto e o instante em que o pulso alcança o lado mais distante. Com estas informações a velocidade da onda compressional V_p pode ser calculada:

$$V_p = \frac{x}{t_p} \quad 1.4$$

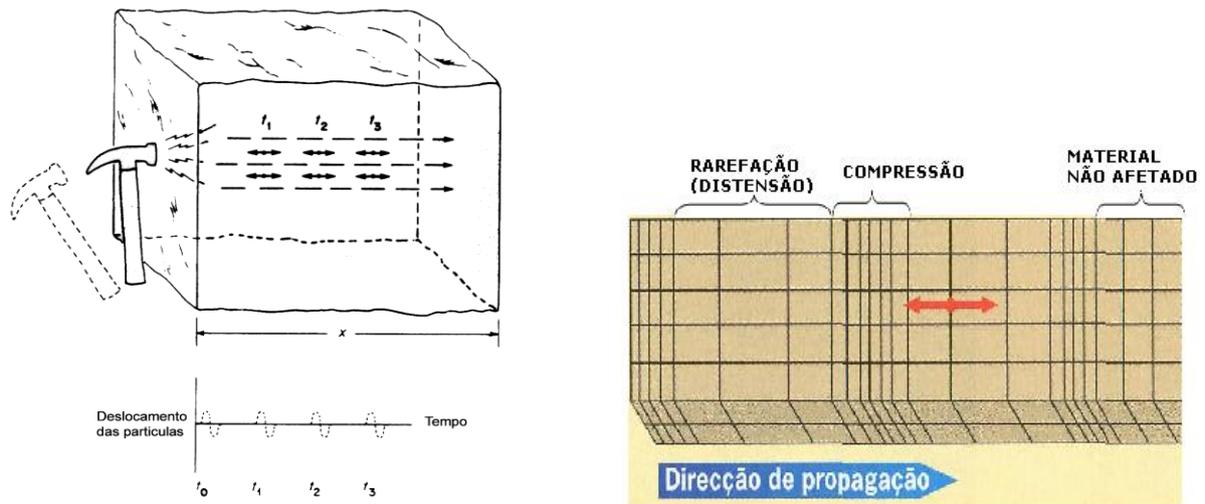


Figura 1.2: Pulso de vibração de uma onda P (também chamada de onda compressional ou longitudinal) através de uma amostra de rocha. Um único pulso é produzido por um martelo em um dos lados em um instante t_0 causando vibrações nas partículas na mesma direção de propagação [2].

Supondo que as medidas foram feitas em uma amostra com densidade e elasticidade constantes, podemos verificar que a velocidade da onda compressional depende destas propriedades da seguinte maneira:

$$V_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad 1.5$$

ou

$$V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left[\frac{1 - \sigma}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)} \right]} \quad 1.6$$

Estas equações foram levantadas com base em dados de laboratórios tabelados e utilizados pela engenharia de rocha onde k é o módulo de deformação volumétrica, também conhecido como módulo de Bulk que mede a capacidade da substância ser comprimida; μ é o módulo de cisalhamento, que mede o poder de deformação sem variação do volume (no caso de líquidos $\mu = 0$), ρ é a densidade do material atravessado; E é o *módulo de Young* que é um fator

de proporcionalidade entre a tensão aplicada ao corpo e a sua deformação; e σ é o *coeficiente de Poisson* que é dada pela razão entre a contração transversal e a extensão longitudinal quando uma barra é tensionada.

A partir das Equações 1.5 e 1.6, podemos dizer que as ondas compressionais podem se propagar através de qualquer tipo de substância: sólido, líquido ou gasoso. Isto se deve ao fato de que valores de *densidade* e do *módulo de bulk* existem para todas as substâncias.

1.1.3 Ondas Cisalhantes

Supondo agora que o martelo atinja a amostra conforme descrito na Figura 1.3. No instante do impacto, as partículas de rocha atingidas pelo martelo vibrarão para cima e para baixo na direção paralela ao lado atingido, o que significa que partículas da amostra são deslocadas perpendicularmente à direção de propagação como num chicote. Este pulso de vibração se propagará através da amostra causando vibrações nas partículas mais ao interior, na mesma direção. Após um intervalo de tempo (t_s) o pulso terá viajado uma distância (x) até o outro lado da amostra. Na Figura 1.3 as partículas vibram em uma direção transversal ou perpendicular à direção de propagação. Este tipo de vibração é chamado de *onda transversal*, *onda cisalhante* ou *onda S*. A velocidade das ondas cisalhantes na amostra pode ser descrita como:

$$V_s = \frac{x}{t_s} \quad 1.7$$

Se as propriedades elásticas da amostra forem conhecidas, podemos verificar a seguinte relação para a velocidade da onda cisalhante:

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad 1.8$$

ou

$$V_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \quad 1.9$$

Mais uma vez estas equações foram levantadas com base em dados de laboratórios tabelados e utilizados pela engenharia de rocha. Para gases e líquidos ideais sabemos que $\mu = 0$. Por este motivo vemos pela Equação 1.8 que as ondas cisalhantes não se propagam em fluidos. Este tipo de vibração transversal só acontece em sólidos.

Duas relações entre as ondas compressionais e cisalhantes podem ser obtidas se forem combinadas as Equações 1.5, 1.6, 1.8 e 1.9:

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{k}{\mu} + \frac{4}{3}} \quad 1.10$$

ou

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{1-\sigma}{\frac{1}{2}-\sigma}} \quad 1.11$$

O fato de k e μ serem números positivos indica que a relação $V_p/V_s > 1$, ou seja, as ondas compressionais sempre se propagam com maior velocidade que as ondas cisalhantes através do mesmo material. O coeficiente de Poisson está restrito à faixa: $0 < \sigma < 0,5$.

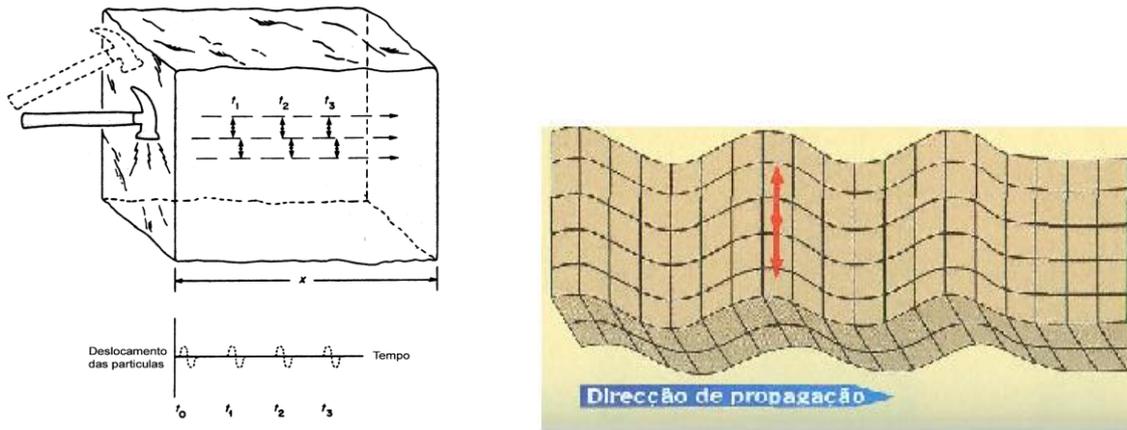


Figura 1.3: Pulso de vibração de uma onda S (também chamada de onda cisalhante ou transversal) através de uma amostra de rocha. Um único pulso é produzido por um martelo em um dos lados em um instante t causando vibrações nas partículas na direção perpendicular à direção de propagação [2].

1.2 Sísmica de Superfície

A exploração sísmica na indústria do petróleo tem como objetivo principal encontrar reservatórios de óleo e gás pelas propriedades reflexivas das rochas no interior da Terra.

A sísmica de reflexão tem sido um dos métodos geofísicos mais efetivos para imagear as estruturas geológicas utilizando fontes artificiais. Este método é baseado no princípio de que se um abalo sísmico for provocado na superfície, utilizando-se uma fonte artificial, ondas mecânicas se propagarão para o interior da Terra até que elas encontrem interfaces que delimitam camadas litológicas com diferentes impedâncias acústicas², onde são refletidas. Esta técnica baseia-se nos intervalos de tempo decorridos entre a detonação da fonte artificial e a chegada dos impulsos refletidos e refratados nas estações receptoras, assim como em suas amplitudes.

O resultado de um levantamento sísmico pode ser apresentado, após uma sequência de processamento, na forma de uma seção transversal, na qual as imagens de

² O conceito de impedância acústica será definido à seção 1.4

estruturas de subsuperfície são interpretadas. Nesta seção, normalmente, o eixo vertical representa o tempo, que aumenta no sentido de cima para baixo medido em segundos, desde o início do registro até a chegada das reflexões nos receptores. O eixo horizontal mostra a superfície do levantamento onde são posicionados os pontos de tiro e as estações receptoras.

As estações receptoras são compostas de geofones (no caso de levantamentos terrestres) que são sensores de velocidade de alta fidelidade, sensíveis às pequenas vibrações do solo com resposta de frequências até cerca de 100 Hz [3]. Estas vibrações são transformadas em impulsos elétricos que são registrados em um sismógrafo. No caso de levantamentos marítimos, são utilizados os hidrofones que são sensores piezoelétricos que respondem às variações de pressão.

O processo de levantamento dos dados começa quando a fonte sísmica emite um pulso sonoro para dentro da Terra. Normalmente, em levantamentos terrestres, usam-se explosivos ou vibradores como fonte (*vibroscis*). No caso marítimo, usam-se canhões de ar comprimido. A onda sísmica se propaga para o interior da Terra até encontrar uma camada de rocha com uma impedância acústica diferente daquela na qual esta se propaga.

Neste ponto, parte da onda retorna no sentido da superfície e parte refrata à camada subsequente até encontrar outra camada com impedância acústica diferente e assim sucessivamente. Cada vez mais a frente de onda vai se dispersando e ficando fraca. Quanto maior for a impedância da nova camada, maior será a intensidade da onda refletida. Portanto, a frente de onda se divide na interface entre duas litologias devido à variação brusca na impedância acústica. O método de reflexão sísmica é baseado na interpretação das reflexões que chegam à superfície.

Tipicamente, os pacotes de rochas sedimentares consistem de sucessivas camadas com diferentes litologias que, normalmente, possuem diferentes impedâncias acústicas. A impedância acústica depende da velocidade de propagação e da densidade da rocha.

O tempo em que o sismógrafo registra as reflexões que chegam aos geofones depende da profundidade que está localizado o objetivo do levantamento. Isto é, quanto mais profundo estiverem as camadas que se deseja imagear, maior deverá ser o tempo de registro do sinal.

As últimas reflexões que chegam são normalmente muito fracas, cerca da milésima parte do sinal que foi enviado. Os geofones devem ser bastante sensíveis para detectar estes sinais.

As ondas viajam para o interior da Terra, encontram os refletores e retornam à superfície; este tempo de propagação desde a explosão inicial até o registro do sinal na superfície é chamado de tempo duplo, pois considera o tempo de ida e volta do sinal sísmico.

Para um modelo de múltiplas camadas os raios não seguem o caminho mais curto e sim o mais rápido (Princípio de Fermat).

1.3 Resolução

A resolução envolve a habilidade de distinguir que mais de uma interface (região de contato entre as camadas) está envolvida em uma reflexão [4]. O limite de resolução é a separação mínima que duas interfaces podem ter e ainda continuarem sendo distinguíveis.

O limite geralmente aceitável na resolução vertical é o limite de resolução de Rayleigh (1/4 do comprimento de onda dominante). A relação entre comprimento de onda (λ), frequência (f) e velocidade (V) é $\lambda = V/f$. Sheriff [5] discutiu este assunto qualitativamente. A velocidade sísmica, em geral, aumenta com a profundidade devido às rochas mais antigas estarem mais compactadas. Um decréscimo no comprimento de onda ou um aumento na frequência aumentará a resolução espacial dos dados. Isso acontece porque as altas frequências, que possuem menor comprimento de onda, são mais atenuadas do que as baixas durante a propagação da onda na Terra como mostrado na Figura 1.4. Isto significa dizer que tem-se

maior resolução em camadas mais próximas à superfície que vai se perdendo a medida que a onda alcança maiores profundidades. Assim, na sismica de superfície em geral, as camadas mais rasas são mais facilmente resolvidas do que as mais profundas.

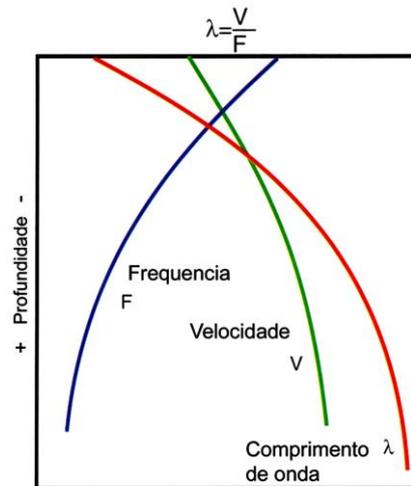


Figura 1.4: Aumento do comprimento de onda λ com a profundidade, piorando a resolução sísmica [6])

1.4 Impedância Acústica

A impedância acústica (Z) é definida pelo produto:

$$Z = \rho V \quad 1.12$$

onde ρ e V são, respectivamente, a densidade e a velocidade do meio.

A amplitude da onda refletida gerada na interface entre dois meios é proporcional ao coeficiente de reflexão (CR); em uma incidência normal, este coeficiente é dado por:

$$CR = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad 1.13$$

onde Z_1 é a impedância acústica da camada superior e Z_2 a impedância da camada inferior.

O coeficiente de reflexão pode ser positivo ou negativo dependendo se a camada de baixo tiver maior ou menor velocidade, respectivamente.

A velocidade é usualmente mais importante do que a densidade no controle da impedância acústica. Por exemplo, a variação da porosidade e/ou do fluido de preenchimento (ex: gás em um arenito) tem muito mais efeito sobre a velocidade de propagação do que sobre a densidade da rocha.

É possível estimar o contraste na impedância acústica em uma interface pela amplitude da reflexão registrada. Quanto maior a amplitude, maior a reflexão e, maior o contraste de impedância acústica.

Capítulo 2

Modelagem Computacional - Teoria

2.1 Equação da Onda

O Método das Diferenças Finitas é um dos mais utilizados entre os vários métodos de aproximação disponíveis para solução dos problemas de valores de contorno. Este método utiliza de aproximação que requer certa atenção. O método das diferenças finitas é aproximado no sentido que as derivadas no ponto são aproximadas [7]. Em outras palavras, se $U(x)$ é uma função de x , então sua primeira derivada $\partial U/\partial x$ pode ser substituída por $\Delta U/\Delta x$, onde Δx é um intervalo pequeno mas não infinitesimal. Este tipo de aproximação assinala um sentido prático da mesma forma como os dados sísmicos são coletados por receptores com intervalos razoavelmente pequenos, porém, não infinitesimais.

Na modelagem pelo método das diferenças finitas (MDF), utiliza-se uma malha regular com espaçamento tão estreito quanto mais complexa for a área a ser investigada, isto é, quanto maior for a resolução que deseja-se obter no levantamento.

Foi introduzida uma malha uniforme subdividindo-se os eixos x, y e z em espaços regulares $\Delta x, \Delta y$ e Δz , respectivamente (Figura 2.1). Com isso, as coordenadas de um ponto genérico $P(x, y, z)$ podem ser expressas de uma maneira discretizada como sendo:

$$\begin{aligned}x &= i\Delta x, & i &= 1, 2, 3, N_x; \\y &= j\Delta y, & j &= 1, 2, 3, N_y; \\z &= k\Delta z, & k &= 1, 2, 3, N_z.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Cada ponto da malha pode ser visualizado como representando o centro de uma pequena célula retangular com seus contornos compartilhados com as células vizinhas que a circundam. Desta forma definimos o modelo como sendo um conjunto de pontos discretos.

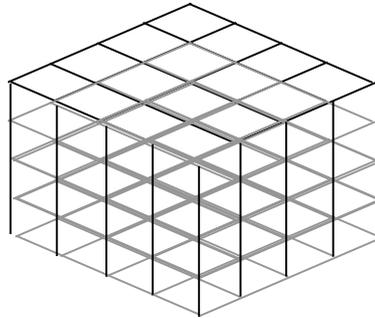


Figura 2.1: Representação de malha de distribuição em 3D

Inicialmente considera-se que o campo de onda é zero no tempo $t = 0$ s para todos os pontos da malha. Então, certa quantidade de energia controlada é introduzida em uma posição específica em intervalos uniformes Δt , que representa a fonte de sinal sísmico, e acompanha-se a evolução do campo de onda para sucessivos intervalos de tempo $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$. É conveniente expressar estes intervalos de tempo em função de $n, n+1, n+2, \dots$, onde $n = 0$ corresponde a $t = 0$. No caso acústico e com densidade constante, a propagação de energia dentro da Terra é governada pela equação da onda:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2(x, y, z)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_f), \quad (2.2)$$

onde U representa o campo de onda que varia em função de x, y, z e t , $V(x, y, z)$ é a velocidade do meio e $f(t)$ representa a fonte dependente do tempo que está localizada na posição ($r = r_f$)

Introduzindo os índices citados anteriormente i, j, k e n , teremos:

$$\left. \begin{array}{l} U(x,y,z,t) = U_{i,j,k}^n \\ f(t) = f_n \end{array} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

Desta forma, $U(x, y, z, t)$ representa o valor do campo de onda em uma posição (i, j, k) da malha em um tempo n . As condições iniciais são:

$$\left. \begin{array}{l} U_{i,j,k}^0 = 0 \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,j,k}^0 = 0 \end{array} \right\} 1 \leq i \leq N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y, \quad 1 \leq k \leq N_z$$

2.1.1 Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas (MDF) consiste em resolver as equações diferenciais, substituindo-se os termos das derivadas parciais por termos de diferenças discretos, através do truncamento da série de Taylor. Quanto maior for a ordem destes termos, maior é a precisão da aproximação, no entanto, com maior custo computacional. A Equação 2.2 será discretizada com precisão de quarta ordem para as derivadas espaciais e segunda ordem para as derivadas temporais.

Seja a função F de várias variáveis $F(x, y, z)$. As expansões em séries de Taylor das funções $F(x \pm \Delta x)$ e $F(x \pm 2\Delta x)$ podem ser representadas por:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \Delta x \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + \dots, \quad (2.4)$$

$$F(x - \Delta x) = F(x) - \Delta x \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} - \dots, \quad (2.5)$$

$$F(x + 2\Delta x) = F(x) + 2\Delta x \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + \dots, \quad (2.6)$$

$$F(x - 2\Delta x) = F(x) - 2\Delta x \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} - \dots. \quad (2.7)$$

Somando-se as Equações 2.4 e 2.5, tem-se:

$$F(x + \Delta x) + F(x - \Delta x) = 2F(x) + 2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + 2 \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + 2 \frac{(\Delta x)^6}{6!} \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \quad (2.8)$$

Simplificando-se a equação acima, temos:

$$F(x + \Delta x) + F(x - \Delta x) = 2F(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + \frac{(\Delta x)^6}{360} \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \quad (2.9)$$

Somando-se a Equação 2.6 com a 2.7, tem-se:

$$F(x + 2\Delta x) + F(x - 2\Delta x) = 2F(x) + 2 \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + 2 \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + 2 \frac{(2\Delta x)^6}{6!} \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \quad (2.10)$$

Da mesma forma, simplificando-se a equação acima, tem-se:

$$F(x + 2\Delta x) + F(x - 2\Delta x) = 2F(x) + 4(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{16}{12} (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + \frac{8}{45} (\Delta x)^6 \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \quad (2.11)$$

Para se eliminar o termo de quarta ordem da Equação 2.11, deve-se multiplicar a Equação 2.9 por 16 e subtrair da Equação 2.11, resultando em:

$$\ominus \left\{ \begin{array}{l} 16[F(x + \Delta x) + F(x - \Delta x)] = 32F(x) + 16(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{16}{12}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + \frac{16}{360}(\Delta x)^6 \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \\ [F(x + 2\Delta x) + F(x - 2\Delta x)] = 2F(x) + 4(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + \frac{16}{12}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} + \frac{8}{45}(\Delta x)^6 \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \end{array} \right.$$

$$16[F(x + \Delta x) + F(x - \Delta x)] - [F(x + 2\Delta x) + F(x - 2\Delta x)] = 30F(x) + 12(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - \frac{7}{40}(\Delta x)^6 \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6} \quad (2.12)$$

Isolando-se o termo de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{12(\Delta x)^2} [16F(x + \Delta x) + 16F(x - \Delta x) - F(x + 2\Delta x) - F(x - 2\Delta x) - 30F(x)] - \frac{7}{480}(\Delta x)^4 \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6}$$

Arrumando-se os termos da equação acima e desprezando-se o termo de quarta

ordem do intervalo da malha $\Theta^4(\Delta x)^4$, onde $\Theta^4 = -\frac{7}{480} \frac{\partial^6 F(x)}{\partial x^6}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{12(\Delta x)^2} [-F(x - 2\Delta x) + 16F(x - \Delta x) - 30F(x) + 16F(x + \Delta x) - F(x + 2\Delta x)] \quad (2.13)$$

que representa uma expressão geral com aproximação de quarta ordem para segunda derivada parcial da função $F(x, y, z)$ em função de x .

Adotando-se as notações para os eixos x , y e z , descritas em 2.1 e em 2.3, tem-se para o primeiro, segundo e terceiro termo da Equação Acústica 2.2 as seguintes expressões:

$$(U_{xx})_{i,j,k}^n = \frac{1}{12 (\Delta x)^2} [-U_{i-2,j,k}^n + 16 (U_{i-1,j,k}^n + U_{i+1,j,k}^n) - 30 U_{i,j,k}^n - U_{i+2,j,k}^n] \quad (2.14)$$

$$(U_{yy})_{i,j,k}^n = \frac{1}{12 (\Delta y)^2} [-U_{i,j,k-2}^n + 16 (U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k+1}^n) - 30 U_{i,j,k}^n - U_{i,j,k+2}^n] \quad (2.15)$$

$$(U_{zz})_{i,j,k}^n = \frac{1}{12 (\Delta z)^2} [-U_{i,j,k-2}^n + 16 (U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k+1}^n) - 30 U_{i,j,k}^n - U_{i,j,k+2}^n] \quad (2.16)$$

As Equações 2.14, 2.15 e 2.16 representam, respectivamente, as segundas derivadas parciais do campo compressional U em função de x , y e z com aproximação de quarta ordem [8] onde $i + 2$ representa dois passos de tempo futuros na direção x , $i + 1$ representa um passo de tempo futuro na direção x , i representa o passo de tempo atual na direção x , assim como $i - 2$ e $i - 1$ representam esses passos em tempos anteriores. O mesmo acontece nas direções y e z .

Realizando operações semelhantes para discretizar a equação em relação à derivada temporal, vemos que, da mesma forma, somando-se as expressões 2.4 e 2.5 os termos de ordem ímpar serão eliminados, resultando em:

$$F(t + \Delta t) + F(t - \Delta t) = 2F(t) + 2 \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} + 2 \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 F(t)}{\partial t^4} + 2 \frac{(\Delta t)^6}{6!} \frac{\partial^6 F(t)}{\partial t^6}$$

Desprezando-se os termos de sexta ordem e isolando-se a derivada de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [F(t + \Delta t) + F(t - \Delta t) - 2F(t)] - \frac{1}{12} (\Delta t)^2 \frac{\partial^4 F(t)}{\partial t^4}$$

Arrumando-se os termos da equação acima e eliminando-se o termo de segunda ordem $\Theta^2(\Delta t)^2$, onde $\Theta^2 = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 F(t)}{\partial t^4}$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [F(t - \Delta t) - 2F(t) + F(t + \Delta t)] \quad (2.17)$$

que representa uma expressão geral com aproximação de segunda ordem para segunda derivada parcial da função $F(x, y, z)$ em função de t .

A utilização de aproximações de quarta ordem permitiria o uso de um intervalo temporal maior, o que poderia reduzir o número de iterações, porém isto acarretaria um incremento no custo computacional, no que diz respeito ao uso da unidade de processamento.

Da mesma forma, utilizando-se as notações descritas em 2.1 e 2.3, a Equação 2.17 pode ser reescrita por:

$$(U_n)_{i,j,k} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [U_{i,j,k}^{n-1} - 2U_{i,j,k}^n + U_{i,j,k}^{n+1}] \quad (2.18)$$

A Equação 2.18 representa, então, uma expressão com aproximação de segunda ordem na Série de Taylor para a derivada parcial temporal, onde $n + 1$ representa o passo de tempo futuro, n o passo atual e $n - 1$ o passo de tempo anterior.

Substituindo-se as Equações 2.14, 2.15, 2.16 e 2.18 na Equação 2.2 e isolando-se o termo $U_{i,j,k}^{n+1}$ que representa o valor do campo compressional no passo de tempo futuro na posição x, y, z , tem-se a equação da onda discretizada:

$$\begin{aligned}
U_{i,j,k}^{n+1} = & -\frac{1}{12} \left\{ \left(V_{i,j,k} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [U_{i-2,j,k}^n - 16(U_{i-1,j,k}^n + U_{i+1,j,k}^n) + 30U_{i,j,k}^n + U_{i+2,j,k}^n] + \right. \\
& \left(V_{i,j,k} \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 [U_{i,j-2,k}^n - 16(U_{i,j-1,k}^n + U_{i,j+1,k}^n) + 30U_{i,j,k}^n + U_{i,j+2,k}^n] + \\
& \left. \left(V_{i,j,k} \frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 [U_{i,j,k-2}^n - 16(U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k+1}^n) + 30U_{i,j,k}^n + U_{i,j,k+2}^n] \right\} + \\
& 2U_{i,j,k}^n - U_{i,j,k}^{n-1} + f^n \delta(r - r_f)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Utilizando-se malhas regulares, isto é, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ (onde h é a espessura da malha) obteremos uma simplificação da Equação 2.19:

$$\begin{aligned}
U_{i,j,k}^{n+1} = & C_{i,j,k} [U_{i-2,j,k}^n + U_{i+2,j,k}^n + U_{i,j-2,k}^n + U_{i,j+2,k}^n + U_{i,j,k-2}^n + U_{i,j,k+2}^n \\
& - 16(U_{i-1,j,k}^n + U_{i+1,j,k}^n + U_{i,j-1,k}^n + U_{i,j+1,k}^n + U_{i,j,k-1}^n + U_{i,j,k+1}^n) + 90U_{i,j,k}^n] \\
& + 2U_{i,j,k}^n - U_{i,j,k}^{n-1} + f^n \delta(r - r_f)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Este é o operador acústico da equação da onda para três dimensões com malha uniforme (h), onde $C_{i,j,k} = - (V_{i,j,k} \cdot \Delta t/h)^2 / 12$. O valor do campo no presente, iteração n , é representado por $U_{i,j,k}^n$, no tempo anterior, iteração $n - 1$, $U_{i,j,k}^{n-1}$ e no tempo posterior, iteração $n + 1$, $U_{i,j,k}^{n+1}$.

2.1.2 Dispersão e Estabilidade Numérica

As dimensões da malha são de importância vital para o método das diferenças finitas. Considera-se que a função velocidade $v^{i,j,k}$ é discretizada dentro de um valor médio para cada cubo da malha. Esta hipótese é válida desde que os espaçamentos da malha sejam pequenos comparados com o comprimento de onda da propagação.

Uma relação entre a menor velocidade utilizada no modelo (V_{\min}) e a frequência de corte (f), limita o máximo valor do espaçamento da malha de forma a não se ter excessiva dispersão de energia [10] lembrando que neste modelo utilizamos $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$:

$$h \leq \frac{V_{\min}}{kf} \quad 2.21$$

onde k representa o número máximo de amostras por comprimento de onda correspondente à frequência máxima. O valor ótimo encontrado de maneira empírica para este número é 5.

Outro problema muito importante que deve ser considerado é a estabilidade numérica. Da mesma maneira foi desenvolvida uma relação para controle dos valores dos intervalos do tempo de amostragem para se evitar que o sistema se torne numericamente instável:

$$\Delta t \leq \frac{h}{\mu V_{m\acute{a}x}} \quad 2.22$$

onde $V_{m\acute{a}x}$ é a maior velocidade adotada no modelo e μ é uma constante definida da mesma forma que na dispersão da malha [9] O melhor valor encontrado para esta constante é 5.

2.1.3 Bordas Não Reflexivas

A modelagem numérica é uma ferramenta bastante útil quando se trata de simular o comportamento do campo de onda no interior da Terra. No entanto, um fator que limita esta aplicação é a relação entre as dimensões do modelo e o custo computacional para se gerar os resultados esperados. A Terra é heterogênea e contínua, porém nós escolhemos simular registros sísmicos com duração finita da propagação do campo de onda. Desta forma, o modelo deve ser dimensionado de maneira que a propagação da onda não encontre, nas bordas que o limita, uma interface de reflexão. Para isto utiliza-se um conceito já bastante utilizado na modelagem numérica que é a borda não reflexiva, e ainda, implementa-se uma região de atenuação numérica que chamamos de zona de amortecimento.

A borda não reflexiva é implementada através de um algoritmo introduzido por Reynolds (1978) [10]. Esta é baseada na hipótese de que os limites dos modelos estão suficientemente distantes da fonte sísmica de forma que as frentes de onda nestes pontos podem ser consideradas como ondas planas. Os operadores diferenciais parciais são fatorados e a propagação da onda se dá no sentido do sinal das Equações 2.25 e 2.26.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(x, y, z, t) = 0 \quad (2.23)$$

Fatorando-se o operador diferencial da Equação da Onda 2.23, temos³:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(x, y, z, t) = 0 \quad (2.24)$$

Se o produto dos dois termos da Equação 2.24 é zero, então cada um dos termos pode ser zero. Logo, podemos afirmar que para a onda plana propagando-se para direita do modelo, temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(x, y, z, t) = 0 \quad (2.25)$$

e, para onda plana se propagando para esquerda, temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U(x, y, z, t) = 0 \quad (2.26)$$

Baseado nas Equações 2.25 e 2.26, a condição de borda não reflexiva para a esquerda do modelo pode ser expressa por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{i,j,k}^{n+1} = 0 \quad (2.27)$$

$$(i = 1; j = 1, 2, \dots, Ny; k = 1, 2, \dots, Nz; n = 0, 1, 2, \dots);$$

³ Supondo o campo de velocidade V constante.

de forma semelhante podemos escrever os operadores do campo de onda para $n + 1$ nas bordas da direita, frente, fundo e base do modelo, respectivamente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{i,j,k}^{n+1} = 0 \quad (i = Nx; \quad j = 1,2,\dots,Ny; \quad k = 1,2,\dots,Nz; \quad n = 0,1,2\dots); \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{i,j,k}^{n+1} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,Nx; \quad j = Ny; \quad k = 1,2,\dots,Nz; \quad n = 0,1,2\dots); \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{i,j,k}^{n+1} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,Nx; \quad j = 1; \quad k = 1,2,\dots,Nz; \quad n = 0,1,2\dots); \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{i,j,k}^{n+1} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,Nx; \quad j = 1,2,\dots,Ny; \quad k = Nz; \quad n = 0,1,2\dots); \quad (2.31)$$

As Equações 2.27, 2.28, 2.29, 2.30 e 2.31 podem ser representadas de forma discretizada pelo método das diferenças finitas com aproximação de primeira ordem da seguinte forma [9]:

Para o plano lateral esquerdo:

$$U_{1,j,k}^{n+1} = U_{1,j,k}^n + A(i, j, k)(U_{2,j,k}^n - U_{1,j,k}^n) \quad (2.32)$$

$$(j = 1,2,\dots,Ny; \quad k = 1,2,\dots,Nz; \quad n = 0,1,2\dots);$$

Para o plano lateral direito:

$$U_{Nx,j,k}^{n+1} = U_{Nx,j,k}^n - A(i,j,k)(U_{Nx,j,k}^n - U_{Nx-1,j,k}^n) \quad (2.33)$$

$$(j = 1,2,\dots,Ny; k = 1,2,\dots,Nz; n = 0,1,2\dots);$$

Para o plano da frente:

$$U_{i,Ny,k}^{n+1} = U_{i,Ny,k}^n - A(i,j,k)(U_{i,Ny,k}^n - U_{i,Ny,k}^n) \quad (2.34)$$

$$(i = 1,2,\dots,Nx; k = 1,2,\dots,Nz; n = 0,1,2\dots);$$

Para o plano do fundo:

$$U_{i,1,k}^{n+1} = U_{i,1,k}^n + A(i,j,k)(U_{i,2,k}^n - U_{i,1,k}^n) \quad (2.35)$$

$$(i = 1,2,\dots,Nx; k = 1,2,\dots,Nz; n = 0,1,2\dots);$$

Para o plano da base do modelo:

$$U_{i,j,Nz}^{n+1} = U_{i,j,Nz}^n - A(i,j,k)(U_{i,j,Nz}^n - U_{i,j,Nz-1}^n) \quad (2.36)$$

$$(i = 1,2,\dots,Nx; j = 1,2,\dots,Ny; n = 0,1,2\dots);$$

onde $A(i,j,k) = V.\Delta t/h$. Desta forma, obtém-se os planos de bordas não reflexivas para todas as faces de um modelo **3D** com exceção do topo.

2.1.4 Bordas Absortivas

Visto que a utilização das bordas não reflexivas não se faz eficiente quando a fonte não está suficientemente distante das bordas, se faz necessário acrescentar ao modelo uma zona de amortecimento numérico que minimiza gradualmente a amplitude da onda sobre uma região da malha próxima das bordas, o que chamamos de método caixa de areia.

A ideia é reduzir a amplitude da onda artificialmente refletidas lenta e gradativamente através da multiplicação de um fator de absorção exponencial $W(k)$ que aumenta em direção às bordas do modelo a partir de um determinado ponto da malha (N_a), de modo que ao atingir o ultimo ponto da coluna/linha da malha a amplitude se torne nula.

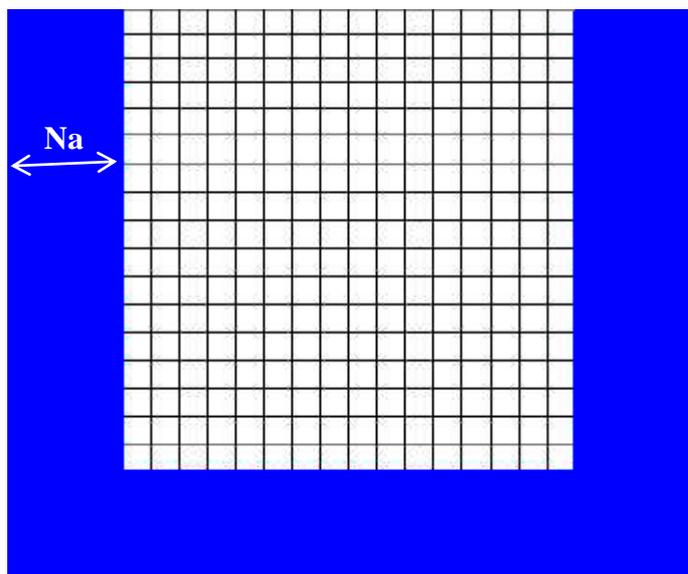


Figura 2.2: Ilustração da camada de amortecimento introduzida por CERJAN et al.(1985) [9].

Primeiramente, são definidas as áreas com largura N_a nas faces do modelo, que atuarão como regiões absorvedoras de energia. Quando o campo de onda se propagar em direção às bordas e atingir a região especificada, o termo atenuador amortecerá esse campo de onda, reduzindo sua amplitude.

Para o lado esquerdo do modelo temos $0 \leq k \leq N_a$, onde N_a é um número que representa a quantidade de pontos para dentro da malha.

A função peso apresentada por Cerjan [9] utilizada neste trabalho foi:

$$W(k) = \exp[-fat(N_a - k)^2] \quad (2.37)$$

onde:

- w é o fator multiplicativo para atenuar o campo de pressão;
- fat é o fator de amortecimento - o valor utilizado é de 0,0025 (SILVA, 2006) [11];
- N_a é o número de pontos da malha para a camada de amortecimento; e
- k é o número do nó da malha para o lado esquerdo e corresponde a x .

O índice k pode ser alterado para se ajustar ao lado do modelo a que se aplica. Os pesos são aplicados a todos os nós da malha dentro da região delimitada por N_a (SILVA, 2002)[12].

2.1.5 Fonte

Para se gerar sinais sísmicos é necessário uma função fonte. Nesta seção será desenvolvido o conceito de limite de frequência aplicado a uma função que simula o sinal gerado em uma fonte sísmica. Uma fonte sísmica real usa a energia gerada por fontes de impulsos ou vibratória. No levantamento terrestre esta energia é comumente gerada por dinamites ou por caminhões vibradores que transmitem à Terra pulsos nas direções verticais e horizontais. No caso marítimo, usam-se geralmente canhões de ar comprimido. O método utilizado nesta apostila para simulação de uma exploração sísmica será uma fonte impulsiva gerada através da segunda derivada da gaussiana [9].

$$f(t) = [1 - 2\pi(\pi f_c t)^2] e^{-\pi(\pi f_c t)^2} \quad 2.37$$

Propositalmente, para que haja somente valores positivos da variável t , podemos discretizar a função acima fazendo $t = (n - 1)\Delta t - TF$, onde n é o passo de tempo do programa, Δt é o incremento temporal e TF é o período da função Gaussiana dada pela equação:

$$TF = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_{corte}} \quad 2.38$$

A equação que controla a frequência de corte é:

$$f_{corte} = 3\sqrt{\pi} f_c \quad 2.39$$

onde f_c é a frequência central da fonte.

A Figura 2.2 mostra um exemplo da função fonte no domínio do tempo para uma frequência de corte de 60 Hz.

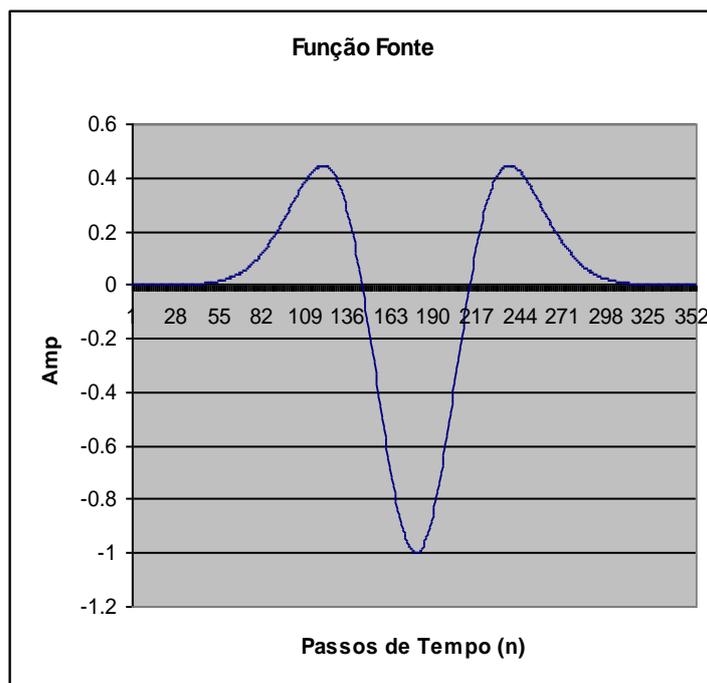


Figura 2.2: Função derivada segunda da gaussiana utilizada como fonte impulsiva para uma frequência de 60 Hz.

2.2 Geometria dos Eventos Sísmicos

Durante a propagação de um campo de onda pode-se identificar quatro tipos diferentes de eventos: onda direta, difratada, refletida e refratada. Estes eventos podem ser identificados tanto nos snapshots da propagação quanto no sismograma registrado em superfície.

A Figura 2.3 apresenta *snapshots*⁴ da propagação de um pulso a partir da superfície de um modelo de velocidade 2-D com um degrau entre as camadas. Este degrau foi propositalmente criado para facilitar o entendimento da geração de uma onda que difrata em um determinado ponto. Note que é possível se identificar com clareza todos os eventos citados acima.

⁴ Snapshots são amostras instantâneas da propagação da onda.



Figura 2.3: Snapshots da propagação de uma frente de onda em um modelo de duas camadas com degrau. Observar presença das ondas direta, refletida, refratada e difratada.

A Figura 2.4 mostra o sismograma registrado na superfície do modelo. Neste caso, de um modelo simples, é possível identificar todos os eventos sísmicos.

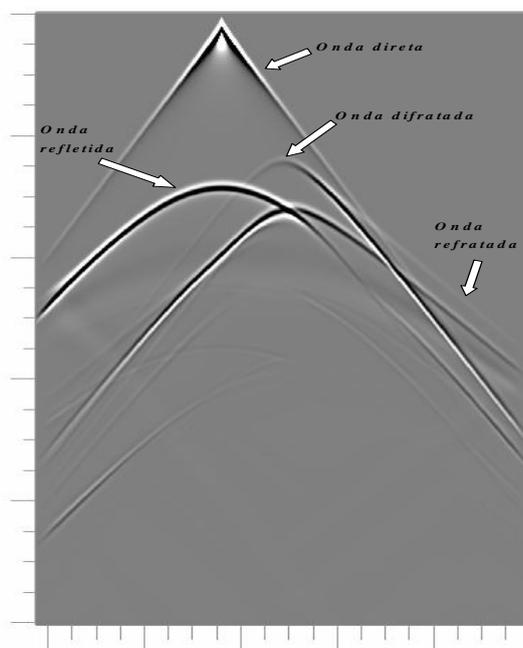


Figura 2.4: Sismograma mostrando os eventos sísmicos como a onda direta, refletida, refratada e difratada.

2.2.1 Definições de onda:

- **Onda Direta:** é a aquela que se direciona diretamente para os receptores a partir do momento do disparo da fonte. Esta é uma onda que caminha na superfície do modelo com velocidade de propagação da primeira camada. Na Figura 2.5 ela pode ser identificada pela cor amarela;
- **Onda Refletida:** é a onda que ao se propagar para o interior do modelo retorna para a superfície após incidir sobre outra camada com diferente impedância. Pela Lei de Snell pode-se afirmar que a onda refletida retorna com ângulo igual ao de ângulo da onda incidente. Na Figura 2.5 este evento pode ser identificado pela cor azul;
- **Onda Refratada:** esta é uma parte da onda primária que é transmitida para a camada subjacente. O ângulo da onda refratada em relação a normal ao plano de incidência é maior quanto maior for a diferença de impedância entre as duas camadas. A partir de um determinado ângulo crítico (i_c) ocorre a propagação desta onda somente ao longo da interface entre os dois meios com velocidade da segunda camada. Esta propagação dará origem a novas frentes de onda que irão ser registradas pelos receptores na superfície. Na Figura 2.5 esta onda é identificada pela cor branca.
- **Onda Difrata:** esta é uma onda gerada a partir do momento em que a frente de onda atinge pontos difratores dentro do modelo. Estes pontos podem ser, dentre outros, quinas, dentes ou superfícies pouco suavizadas, nos contornos das geometrias do modelo.

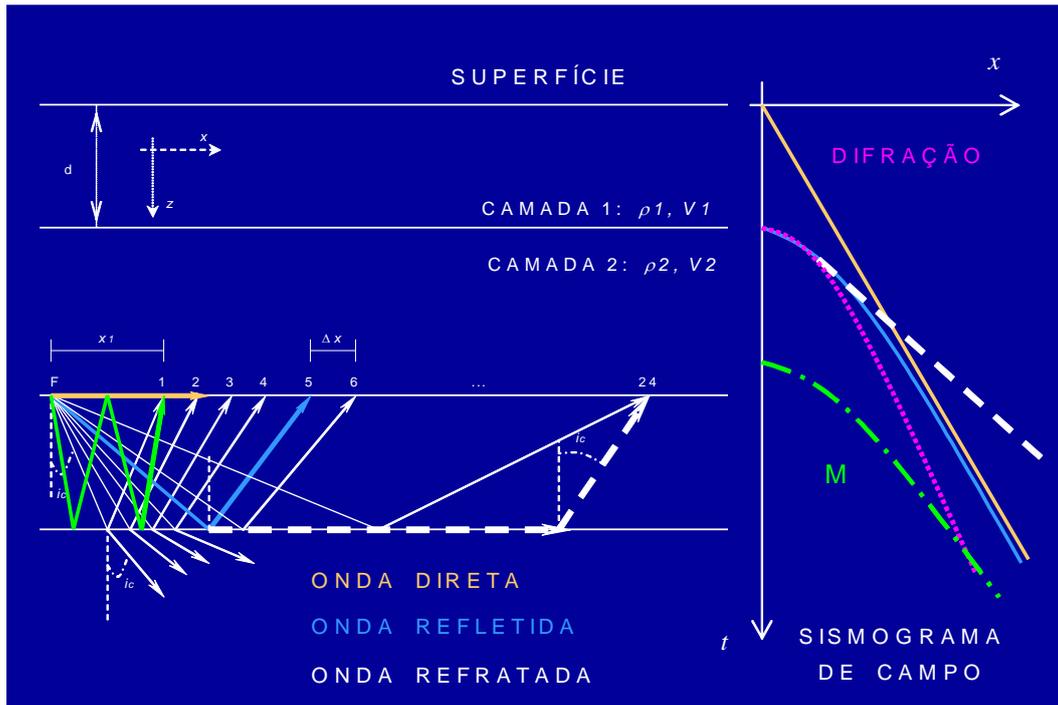


Figura 2.5: Representação das ondas Direta, Refletida, Refratada e Difrataada no mesmo plano.

Capítulo 3

Modelagem Computacional

Neste capítulo serão apresentadas rotinas computacionais em FORTRAN-90 para modelagem da propagação de ondas sísmicas em um ambiente acústico 2D e 3D. Inicialmente serão usados modelos simples com camadas paralelas e, posteriormente, modelos com geometrias complexas com grandes variações laterais de velocidade. A função fonte será a derivada segunda da gaussiana descrita no capítulo anterior. Serão implementadas as bordas não reflexivas propostas por Reynolds e descritas em 2.1.3 e as bordas absotivas propostas por Cerjan e em 2.1.4. Os resultados da modelagem serão registrados em forma de *snapshots* e sismogramas que serão visualizados utilizando-se os recursos dos *Seismic Unix (SU)* [<http://www.seismicunix.com/w/Installation>].

As principais variáveis que serão utilizadas nos programas são as seguintes:

- $i; j; k$, índices da discretização dos eixos x ; y e z ;
- n , índice da discretização no tempo (t);
- $N_x; N_y$ e N_z , dimensões do modelo na direção x ; y e z , respectivamente;
- N_{total} , total de passos de tempo (tempo de registro total = $N_{total} * \Delta t$);
- h , dimensão da malha de diferenças finitas. Neste caso serão usados $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$;
- dt , dimensão do incremento temporal;
- $P1; P2$ e $P3$, campo compressional nos tempos passado ($U_{i,j,k}^{n-1}$), presente ($U_{i,j,k}^n$) e futuro ($U_{i,j,k}^{n+1}$), respectivamente;
- vel , matriz do modelo de velocidade;

- f_c , frequência de corte da fonte;
- Variável auxiliar: $A(i, j, k) = \frac{V \Delta t}{h}$, utilizada nas condições de borda não reflexiva;
- Variável auxiliar: $C(i, j, k) = - \left(\frac{V_{i,j,k} \Delta t}{h} \right)^2 / 12 = 12$, utilizada na equação da onda;
- Variáveis auxiliares: $y(i), E$;
- $fonte(n)$, função fonte;
- ixf, jyf e kzf , posição da fonte nos eixos x,y e z, respectivamente.

3.1 Algoritmo Computacional 2-D em FORTRAN-90

3.1.1 Modelos de Velocidade

O modelo de velocidade será utilizado como o ambiente onde o campo de onda compressional se propagará a partir de um pulso inicial. Neste curso, as densidades serão consideradas constantes ($\rho = 1$), portanto, não tendo variações entre as camadas. As variações entre as camadas dos modelos serão apenas nas mudanças de velocidade $v(x; z)$; O eixo horizontal (x) representa a superfície do modelo enquanto que a profundidade é representada pelo eixo vertical (z) que aumenta no sentido negativo.

Exemplos de modelos de velocidades em 2D são descritos a seguir.

Planos-Paralelos

Este modelo é bastante útil quando se deseja identificar todos os eventos durante a propagação da onda e também o resultado final no sismograma, pois, como são facilmente identificadas todas as interfaces, é possível associar os eventos com sua origem. Um exemplo de modelo de planos-paralelos pode ser visto a seguir e visualizado na Figura 3.1.

Código FORTRAN:

```
do i=1,Nx
  do k=1,Nz/3
    vel(i,k) = 1500.
  enddo
  do k=Nz/3+1,2*Nz/3
    vel(i,k) = 2000.
  enddo
  do k=2*Nz/3+1,Nz
    vel(i,k) = 3000.
  enddo
enddo
```

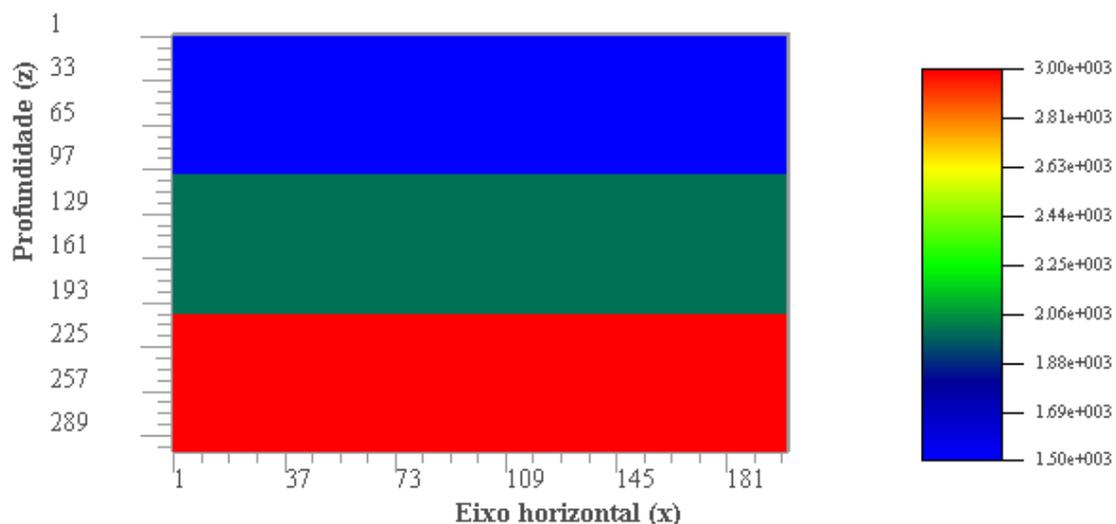


Figura 3.1: Modelo de velocidade de camadas - planos-paralelos em 2D

Semicírculo

Código FORTRAN:

```
do i=1,Nx
  do k=1,Nz
    y(i)=-sqrt((raio**2)-(i-100)**2)+300

    if((k.lt.y(i)).and.(k.lt.Nz/3)) then
      vel(i,k)=1500.
    else if((k.lt.y(i)).and.(k.ge.Nz/3)) then
      vel(i,k)=2500.
    else
      vel(i,k)=3000.
    endif
  enddo
enddo
```

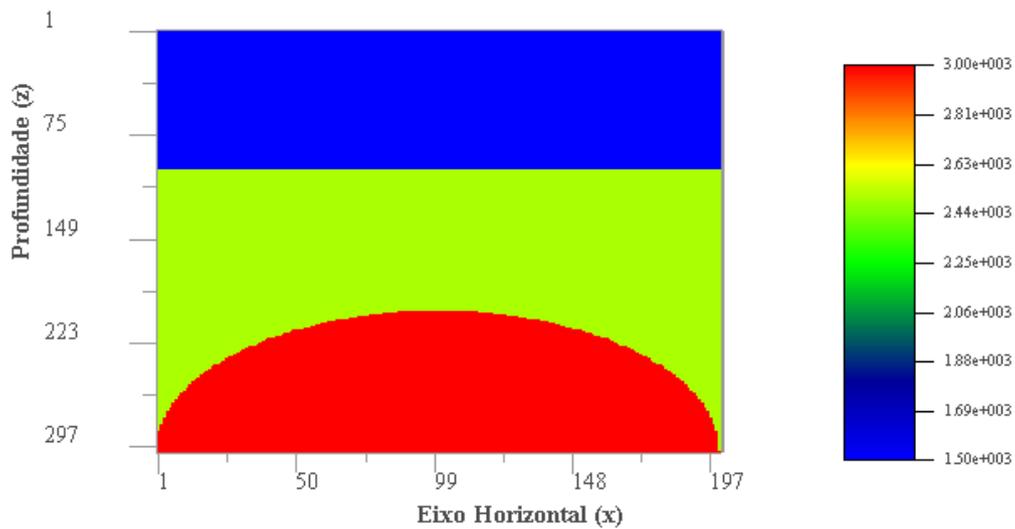


Figura 3.2: Modelo de velocidade com um anticlinal

Camada Dobrada

Código FORTRAN:

```
do i=1,nx
  if (i.lt.100.) then
    y(i)=sqrt((raiod**2)-(i**2)) +150
  else
    y(i)=-sqrt((raiod**2)-((i-200)**2))+ 150
  endif
  do k=1,nz
    if (k.lt.y(i)) then
      vel(i,k)=2500.
    else
      vel(i,k)=3500.
    endif
  enddo
enddo
```

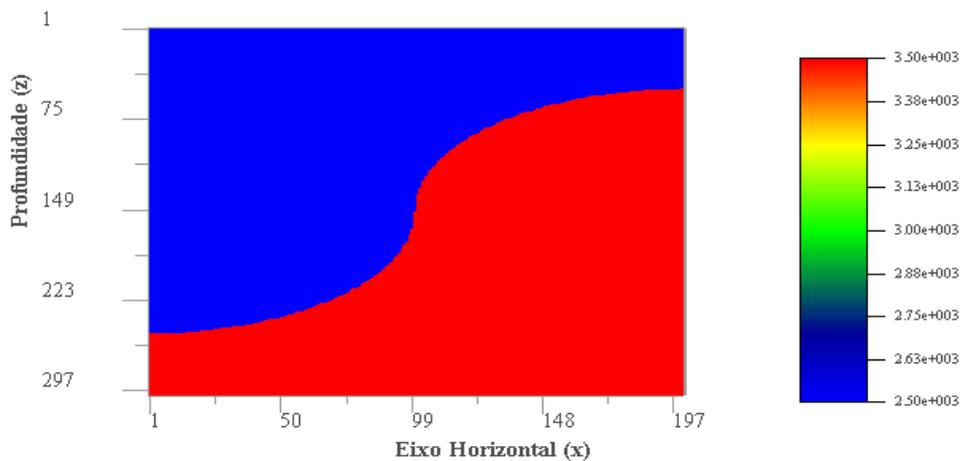


Figura 3.3: Modelo de velocidade com dois semicírculos simulando um flanco salino.

Com Reservatório

Código FORTRAN:

```
me=70.  
  
do i=1,nx  
  do k=1,nz  
    y(i)=((8*me**3)/(i**2+ 4*me**2))  
    if (k.le. y(i)) then  
      vel(i,k)=1500.  
    else if (k.gt.y(i).and. k.lt.70) then  
      vel(i,k)=2000.  
    else if (k.gt.y(i).and. k.ge.70 &  
      .and. k.lt.(y(i)+50).and.&  
      k.lt.147) then  
      vel(i,k)=2500.  
    else if (k.ge.147 .and. k.lt.(y(i)+50)) then  
      vel(i,k)=3000.  
    else if (k.ge.(y(i)+50) .and. k.lt.230) then  
      vel(i,k)=3500.  
    else  
      vel(i,k)=4000.  
    endif  
  enddo  
enddo
```

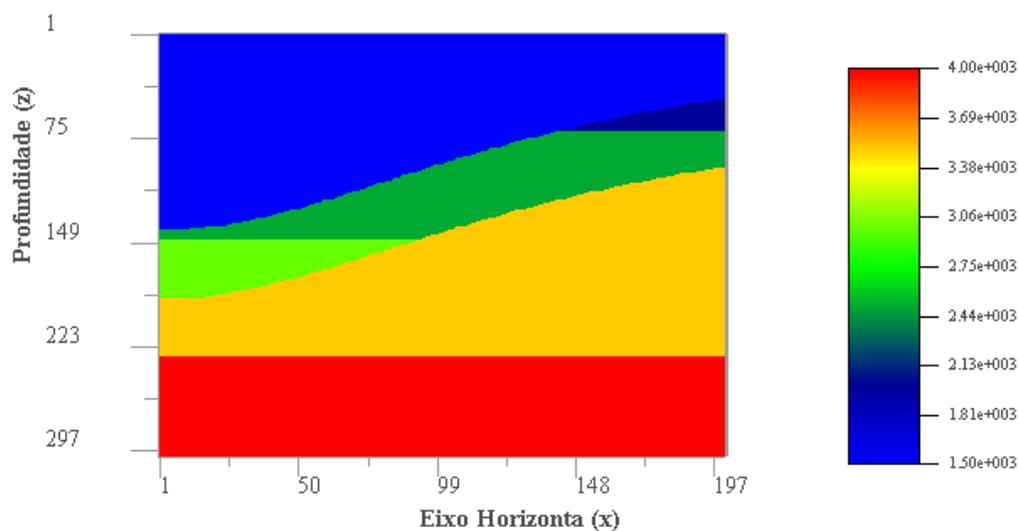


Figura 3.4: Modelo de velocidade simulando a existência de um reservatório de hidrocarbonetos

3.1.2 - Gravando um Modelo de Velocidade em Disco

O comando utilizado para gravar em disco um modelo de velocidade é:

```
Open (11, file='sis.bin', status='unknown', form='binary', &
      access='direct', recl=4*Nx*Nz)
      Write (11,rec=1)((vel(i,j), j=1,Nz), i=1,Nx)
Close(11)
```

Legenda:

- 11 – número da unidade que deseja abrir
- *file* – nome do arquivo a ser gravado no HD
- *form* – binary (ifort); unformatted(gfortran)
- *status* – se o arquivo é novo (*new*), já existe (*old*) ou desconhecido (*unknown*)
- *access* – tipo de acesso
- *recl* – tamanho do registro (*record length*) – ifort: 4*Nx*Nz; gfortran: Nx*Nz.

3.1.3 - Lendo um Modelo de Velocidade do Disco

O comando utilizado para ler do disco um modelo de velocidade é: (Modelo de propagação de velocidade: Marmousi, baseado na geologia *offshore* da Bacia de Cuanza, Angola):

```
Open (8, file="vel.bin", status="unknown", form="binary", &
      access="direct", recl=4*Nx*Nz)
      Read (8,rec=1)((vel(i,k), k=1,Nz), i=1,Nx)
Close (8)
```

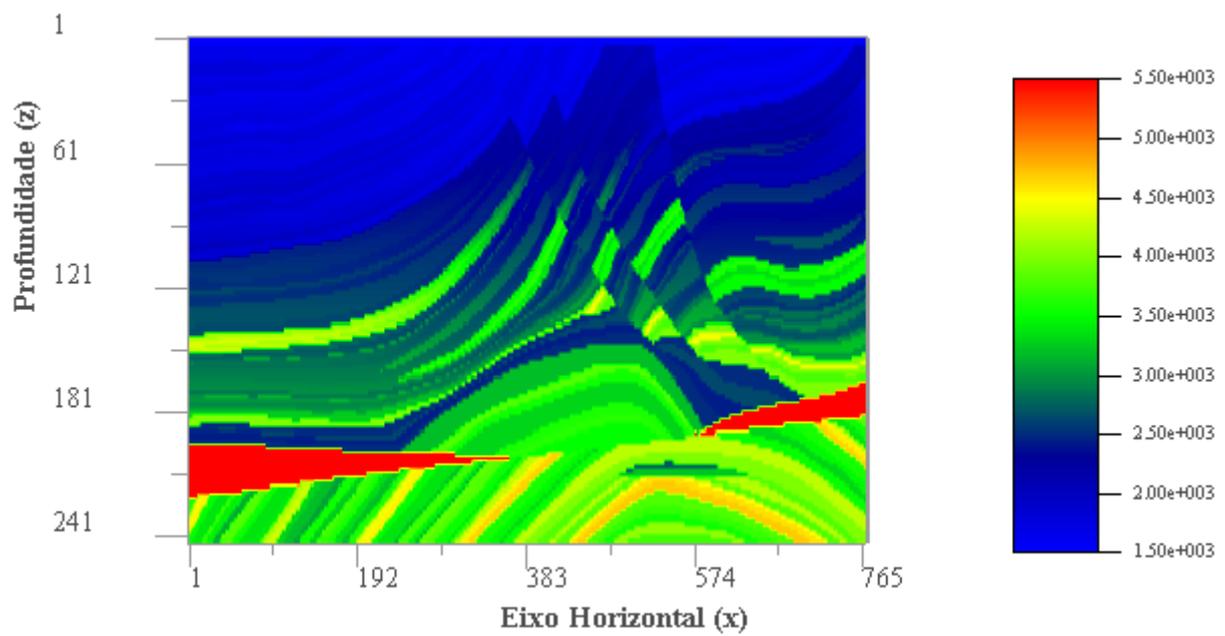


Figura 3.5: Modelo de velocidade Marmousi representando uma complexa geologia na parte *offshore* da Bacia da Cuanza.

3.1.4 Fonte

Assim como foi apresentada no capítulo anterior, a função fonte a partir da qual se iniciará o processo de propagação do campo de onda será a derivada segunda da gaussiana:

$$f(t) = [1 - 2\pi(\pi f_c t)^2] e^{-\pi(\pi f_c t)^2}$$

O Código FORTRAN para esta equação está descrito abaixo:

```
program fonte_d2g
implicit none

! Cálculo da função fonte proposta por CUNHA (1997)
! Derivada segunda da gaussiana

Nf=4*sqrt(pi)/(fcorte*DT)!Quantidade máxima de passos de tempo
Tf=2*sqrt(pi)/fcorte      !Período da função Gaussiana
fc=fcorte/(3.*sqrt(pi))  !Frequência central
write(*,*) "Nf=",Nf

do n=1,Nf+1
    t=(n-1)*DT-Tf !Para que haja somente valores
                  !positivos da variável t
    fonte=-exp(-pi*(pi*fc*t)**2)* &
          (1.-2.*pi*(pi*fc*t)*(pi*fc*t))

    open (unit=10,file="fonte.dat", status="unknown")
        write (10, "(F6.4)") fonte(n)
enddo

close(10)

end program
```

3.1.5 Equação da Onda

A equação da onda para um meio acústico discretizada pelo método das diferenças finitas foi apresentada na Equação 2.20. Aqui serão implementados os algoritmos em FORTRAN 90 para esta equação.

```
! Zerando a matriz (Condições iniciais)
do i=1,Nx
  do k=1,Nz
    P1(i,k)=0.
    P2(i,k)=0.
    P3(i,k)=0.
  enddo
enddo

! Computação do Campo de Pressão
do n=1,Ntotal

  ! Termo Fonte
  if(n.le.Nf+1) then
    P2(ixf,kzf)=P2(ixf,kzf)+fonte(n)
  endif

  ! Cálculo do Campo no Interior do Modelo
  do k=3,Nz-2
    do i=3,Nx-2
      P3(i,k) = C(i,k) * ( P2(i+2,k) + &
        P2(i-2,k) + P2(i,k+2) + P2(i,k-2) - 16. * &
        (P2(i+1,k) + P2(i-1,k) + P2(i,k+1) + &
        P2(i,k-1)) + 60. * P2(i,k)) + 2. * P2(i,k) &
        - P1(i,k)
    enddo
  enddo
enddo
```

3.1.6 Bordas não Reflexivas

Dentro do loop temporal iniciado acima há a necessidade de serem implementadas as condições de não refletividade nas bordas do modelo. Neste caso, as condições de Reynolds [5] (Equações 2.25 e 2.26) serão usadas. O código FORTRAN90 para esta implementação será:

```
!Início do Laço Temporal
!Computação do Campo de Pressão

do n=1,Ntotal

...
    !Condições de borda para o sentido positivo -A(i,k) e
    !para o negativo +A(i,k):

    do i=3,Nx-2
        do k=1,2
            P3(i,k)=P2(i,k)+A(i,k)* &
                (P2(i,k+1)-P2(i,k))
        enddo
        do k=Nz-1,Nz
            P3(i,k)=P2(i,k)-A(i,k)* &
                (P2(i,k)-P2(i,k-1))
        enddo
    enddo

    do k=3,Ny-2
        do i=1,2
            P3(i,k)=P2(i,k)+A(i,k)* &
                (P2(i+1,k)-P2(i,k))
        enddo
        do i=Nx-1,Nx
            P3(i,k)=P2(i,k)-A(i,k)* &
                (P2(i,k)-P2(i-1,k))
        enddo
    enddo

...
enddo
```

3.1.7 Bordas Absortivas

Dentro do loop temporal iniciado acima há a necessidade de serem implementadas as condições de bordas Absortivas. Neste caso, as condições de Cerjan [9] (Equações 2.37) serão usadas. O código FORTRAN90 para esta implementação será:

```
!Calculo dos Fatores Multiplicativos  
!para ABC - Cerjan  
  
!Fatores Multiplicativos para Borda Inferior  
do j = Nz-Na, Nz  
    k = j - (Nz-Na-1)  
    cof1(k) = fat  
enddo  
  
do j = Nz-Na, Nz  
    k = j - (Nz-Na-1)  
    fat1(k) = exp( -(cof1(k) * (j - (Nz-Na))) ) * &  
                (cof1(k) * (j - (Nz-Na))) )  
enddo  
  
!Fatores Multiplicativos para as Bordas Superior e Lateral  
!Esquerda  
  
do j = 1, Na+1  
    cof2(j) = fat  
enddo  
  
do j = 1, Na+1  
    fat2(j) = exp( -(cof2(j) * (j - (Na+1))) ) * &  
                (cof2(j) * (j - (Na+1))) )  
enddo  
  
!Fatores Multiplicativos para Borda lateral direita  
  
do i = Nx-Na, Nx  
    k = i - (Nx-Na-1)  
    cof3(k) = fat  
end do  
  
do i = Nx-Na, Nx  
    k = i - (Nx-Na-1)  
    fat3(k) = exp( -(cof3(k) * (i - (Nx-Na))) ) * &  
                (cof3(k) * (i - (Nx-Na))) )  
enddo
```

```
!Início do Laço Temporal
!Computação do Campo de Pressão
```

```
do n=1,Ntotal
```

```
...
```

```
!Borda Absortiva
```

```
!Borda Superior
```

```
! do k = 1, Na
!     do i = Na+1, Nx-Na-1
!         P3(i,k)=P3(i,k)*fat2(i)
!         P2(i,k)=P2(i,k)*fat2(i)
!     enddo
! enddo
```

```
!Borda Inferior
```

```
do k = Nz-Na, Nz
    do i = 1, Nx
        P3(i,k) = P3(i,k)* &
                    fat1(k-(Nz-Na-1))
        P2(i,k) = P2(i,k)* &
                    fat1(k-(Nz-Na-1))
    enddo
enddo
```

```
!Borda Lateral Esquerda
```

```
do k = 1, Nz-Na-1
    do i = 1, Na+1
        P3(i,k) = P3(i,k)*fat2(i)
        P2(i,K) = P2(i,k)*fat2(i)
    enddo
enddo
```

```
!Borda Lateral Direita
```

```
do k = 1, Nz-Na-1
    do i = Nx-Na, Nx
        P3(i,k) = P3(i,k)* &
                    fat3(i-(Nx-Na-1))
        P2(i,k) = P2(i,k)* &
                    fat3(i-(Nx-Na-1))
    enddo
enddo
```

```
...
```

```
enddo
```

3.1.8 Atualização do Campo e Geração do Sismograma

A atualização do campo de onda será o artifício usado para transferir para as matrizes $P1$; $P2$ e $P3$, as informações do campo de onda passado, presente e futuro. A cada passo de tempo (n) o resultado de $P3$; que representa o campo em $n + 1$; passa para $P2$; que representa o valor atual do campo de onda. E, por sua vez, os valores do campo $P2$ passam para a matriz $P1$ que representa o campo de onda no passo anterior. Novamente, então, um novo valor do campo de onda é calculado para $P3$; snapshots desta propagação pode ser visualizado na Figura 3.6.

A geração do sismograma se dará dentro do loop temporal em uma superfície de observação (*jobs*) próximo à superfície do modelo. Estes dados serão gravados em uma matriz $SIS(i; n)$ que terá uma dimensão em horizontal dada pela quantidades de receptores (geofones ou hidrofones) e uma dimensão vertical dada pelo tempo de registro (*record length*) total. Após o término do loop temporal esta matriz será gravada em disco (HD). O algoritmo para esta operação pode ser realizado da seguinte forma:

```
!Início do Laço Temporal
!Computação do Campo de Pressão

do n=1,Ntotal

...
    !Atualização do campo de onda
    P1=P2
    P2=P3

    !Geração do sismograma
    do i=1,Nx
        sis(i,n)=P3(i,jobs)
    enddo

enddo !fechamento do loop temporal

!Gravando o sismograma em disco

comp=4*Nx*Ntotal
```

```
open(11,file="sis.bin", status="unknown",&  
      form="binary",access="direct",recl=comp)  
      write(11,rec=1)((sis(i,k),k=1,Ntotal),i=1,Nx)  
close(11)
```

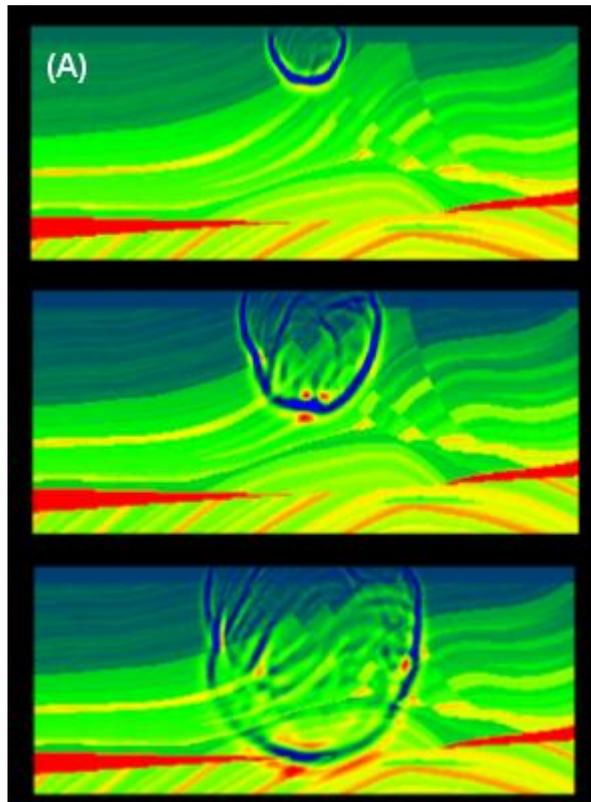
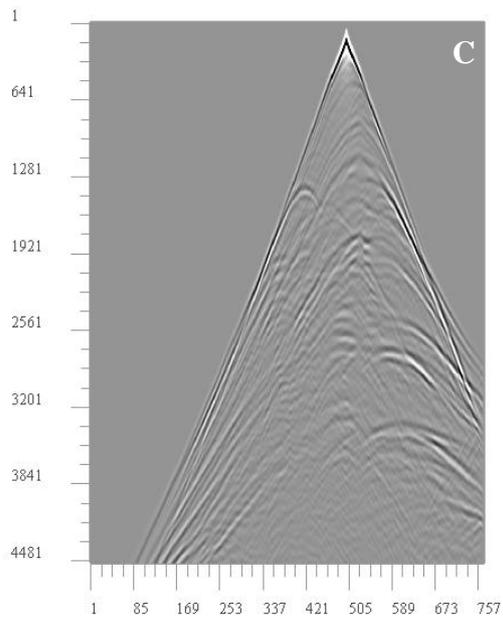
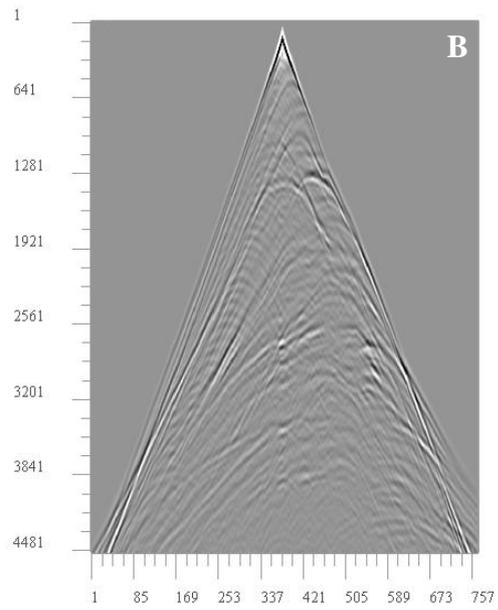
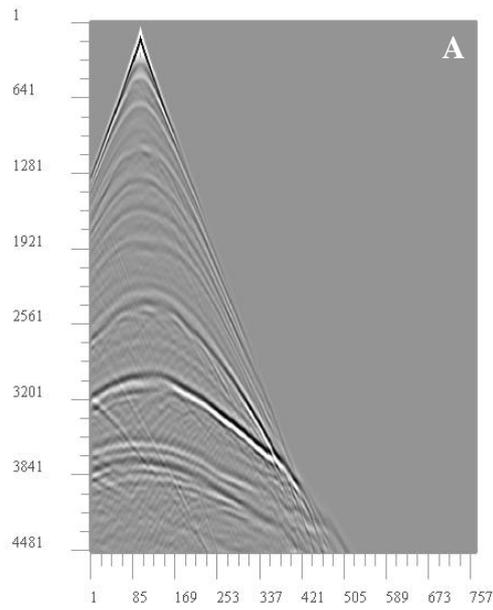


Figura 3.6: Snapshots da propagação da frente de onda a partir de um pulso na superfície do modelo Marmousi.



Os sismogramas registram os tempos e amplitudes das reflexões, refrações, difrações e onda direta a partir de um pulso provocado numa posição de tiro PT.

As figuras A, B e C representam a seqüência de 3 sismogramas registrados na superfície do modelo Marmousi a partir dos pontos de tiro 100, 350, 500 respectivamente.

Tem-se como eixos:

Ordenada - Passos de tempo proporcionais ao intervalo de amostragem Δt ;

Abscissa - Posições na superfície proporcionais ao intervalo de amostragem espacial Δx .

Figura 3.7: Sismogramas gerados no modelo de velocidade Marmousi em três posições diferentes (A, B e C).

3.1.9 Visualização dos Resultados

Os *snapshots* da propagação do campo de onda compressional e o resultado final registrado no sismograma serão visualizados, em ambiente *Linux*, com o auxílio do software *Seismic Unix*. É necessário que este software esteja instalado no PC. A visualização será feita utilizando-se as rotinas XIMAGE ou SUXIMAGE e XMOVIE ou SUXMOVIE que fazem parte do pacote SEISMIC UNIX distribuído livremente pelo *Center of Wave Phenomena* da *Colorado Scholl of Mines*.

- `ximage n1=[número de amostras na vertical] <[arquivo de entrada .bin]`
- `xmovie n1=[número de amostras na vertical] n2=[número de amostras na horizontal] <[arquivo de entrada .bin]`
- `suximage <[arquivo de entrada .su]`
- `suxmovie <[arquivo de entrada .su]`

Transformando um arquivo .bin para .su:

- `suaddhead ns=[número de amostras na vertical] <[arquivo de entrada .bin] | sushw key=dt a=[intervalo de amostragem $\times 10^6$] >[arquivo de saída .su]`

3.2 Algoritmo Computacional 3-D em FORTRAN-90

A modelagem 3-D seguirá os mesmos passos usados no caso anterior. A diferença está na introdução do eixo y como a terceira dimensão. Portanto, neste caso, o modelo de velocidade, assim como todas as outras variáveis que dependem dele terão variações em x; y e z: Esta simples mudança acarretará um enorme aumento do custo computacional, tornando-se necessário o uso de máquinas com elevado poder de processamento e memória RAM

compatíveis com as dimensões do modelo. Por outro lado, o uso da sísmica tridimensional melhora em muito o entendimento das estruturas geológicas em subsuperfície, pois contempla não apenas as reflexões oriundas de um corte transversal do modelo mas sim reflexões de todas as direções.

A função fonte para este caso será a mesma utilizada no caso anterior. Pois, em se tratando de uma fonte pontual, não importa se o modelo possui duas ou três dimensões. A equação da onda terá uma componente a mais e o tratamento das bordas do modelo também sofrerá uma mudança significativa, já que no caso 3-D, ao invés de 3 linhas de contorno tem-se 5 planos não reflexivos.

Para visualizar, optaremos em fazer cortes 2D e visualiza-los como feito anteriormente ou usar o comando TRIP do SU:

- `trip n1=[número de amostras na direção z] n2=[número de amostras na direção y] n3=[número de amostras na direção x] <[arquivo de entrada.bin]`

3.2.1 Modelo de Velocidade 3D

Abaixo serão apresentados 3 modelos de velocidade 3D. Estes modelos são exemplos de tipos de estruturas geológicas que podem ser contempladas em modelagem sísmica.

O primeiro modelo, mais simples de camadas planos-paralelos é útil para controlar a precisão do algoritmo que está sendo desenvolvido já que se tem uma boa ideia da resposta sísmica que ele pode gerar.

Os dois exemplos seguintes são modelos realísticos que contemplam estruturas geológicas mais complexas.

Modelo de Camadas Planos-paralelos:

O modelo de camadas planos-paralelos é relativamente simples de ser implementado no FORTRAN90. Por exemplo, a Figura 3.8 apresenta o modelo de velocidade gerado pela rotina computacional abaixo, com dimensões de 200x200x300 pontos.

Código FORTRAN:

```
program modelo

parameter (Nx=200.,Ny=200.,Nz=300.)
real*4 vel(Nx,Ny,Nz)

do i=1.,Nx
    do j=1.,Ny
        do k=1.,Nz/3.
            vel(i,k)=1500.
        enddo
        do k=nz/3+1,2*Nz/3
            vel(i,k)=2000.
        enddo
        do k=2*Nz/3+1,Nz
            vel(i,k)=3000.
        enddo
    enddo
enddo

! Gravando em disco
comp=Nx*Ny*Nz
open(8,file='vp3D.bin',status="unknown",&
    form="binary",access="direct",recl=comp)
write(8,rec=1)((vel(i,j,k),k=1,Nz),j=1,Ny),i=1,Nx)
close(8)

end program
```

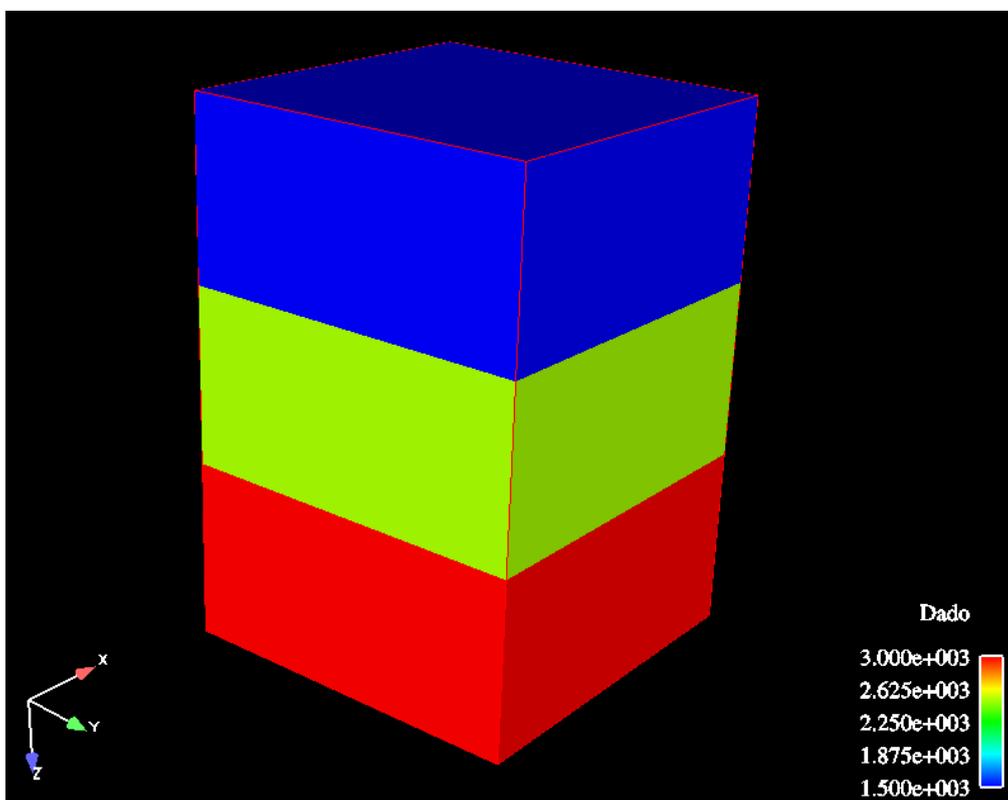


Figura 3.8: Modelo de velocidade de camadas - planos-paralelos em 3D

Modelos Complexos

Alguns modelos de velocidade, reais, são utilizados como base para implementação do algoritmo computacional em 3D. Esses modelos são criados com softwares específicos para geração de modelos de velocidade, dada sua complexidade.

Abaixo segue a forma como esses arquivos binários são lidos dentro de uma rotina computacional.

```
comp=Nx*Ny*Nz
open(8,file='vel3D.bin',status="unknown",form="binary",&
      access="direct",recl=comp)
      read(8,rec=1)((vel(i,j,k),k=1,Nz),j=1,Ny),i=1,Nx)
close(8)
```

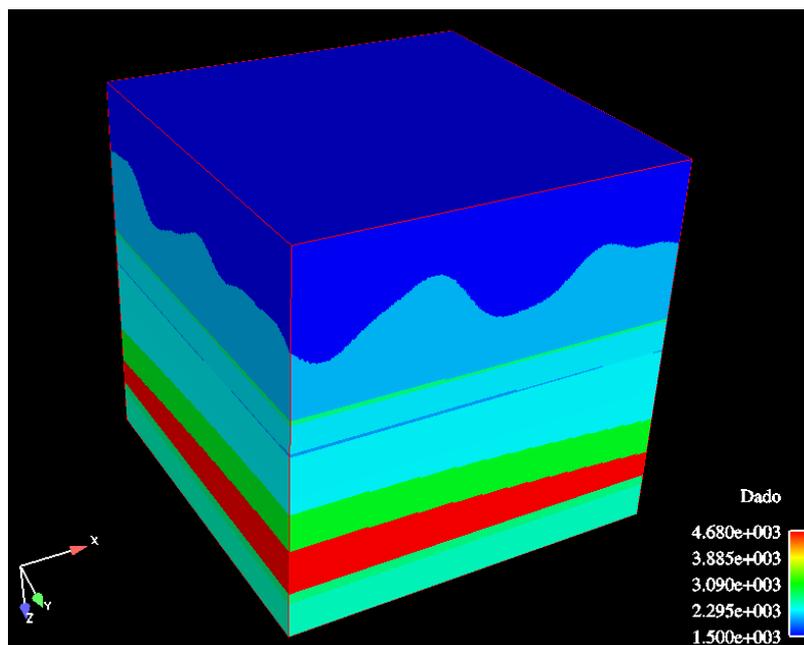


Figura 3.9: Modelo de velocidade 3-D com certa complexidade.

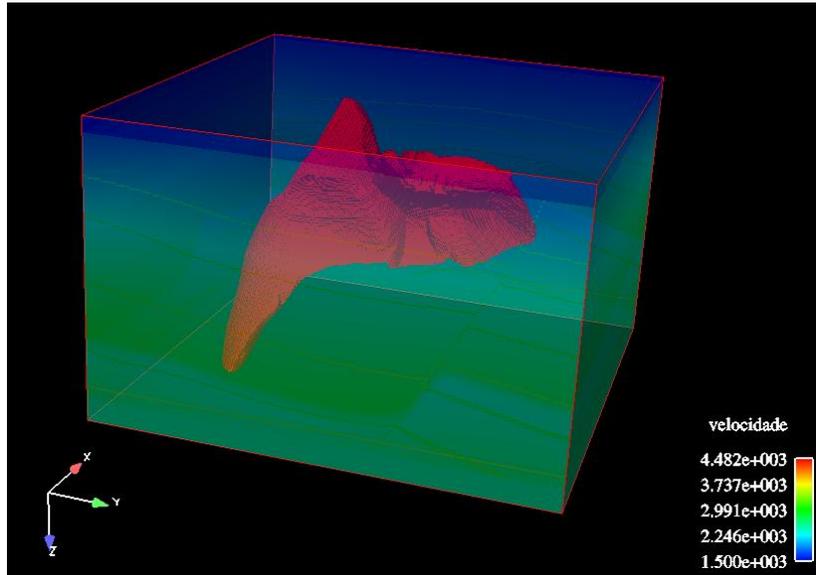


Figura 3.10: Modelo de velocidade 3-D da SEG/EAGE.

As Figuras 3.9 e 3.10 foram exemplos de visualização de modelos de velocidade 3D utilizando o *Ensign Gold*.

O modelo da Figura 3.10 foi desenvolvido a partir de um consórcio criado entre a Sociedade Americana de Geofísicos de Exploração (SEG) e a Sociedade Européia de Geocientistas e Engenheiros (EAGE) simulando uma geologia contendo um domo salino, típico de Bacias do Golfo do México.

3.2.2 Modelagem tridimensional

Através da discretização da equação da onda 3-D pelo método das diferenças finitas, será implementado um algoritmo em FORTRAN90 da mesma forma que no caso 2-D, sendo que se tratando de dados 3-D, a quantidade de operações matemáticas aumenta consideravelmente, o que requer máquinas com grandes capacidades computacionais e memórias RAM.

Abaixo segue a implementação da equação da onda em FORTRAN:

! Cálculo do Campo no Interior do Modelo

```
do k=3,Nz-2
  do j=3,Ny-2
    do i=3,Nx-2

P3(i,j,k)= C(i,j,k)*( P2(i+2,j,k) + P2(i-2,j,k) + P2(i,j+2,k)+ &
                    P2(i,j-2,k) + P2(i,j,k+2) + P2(i,j,k-2)- &
-16.*( P2(i+1,j,k) + P2(i-1,j,k) + P2(i,j+1,k)+ &
        P2(i,j-1,k) + P2(i,j,k+1) + P2(i,j,k-1)) &
+90.*P2(i,j,k)) + 2.*P2(i,j,k) - P1(i,j,k)

                                enddo
  enddo
enddo
```

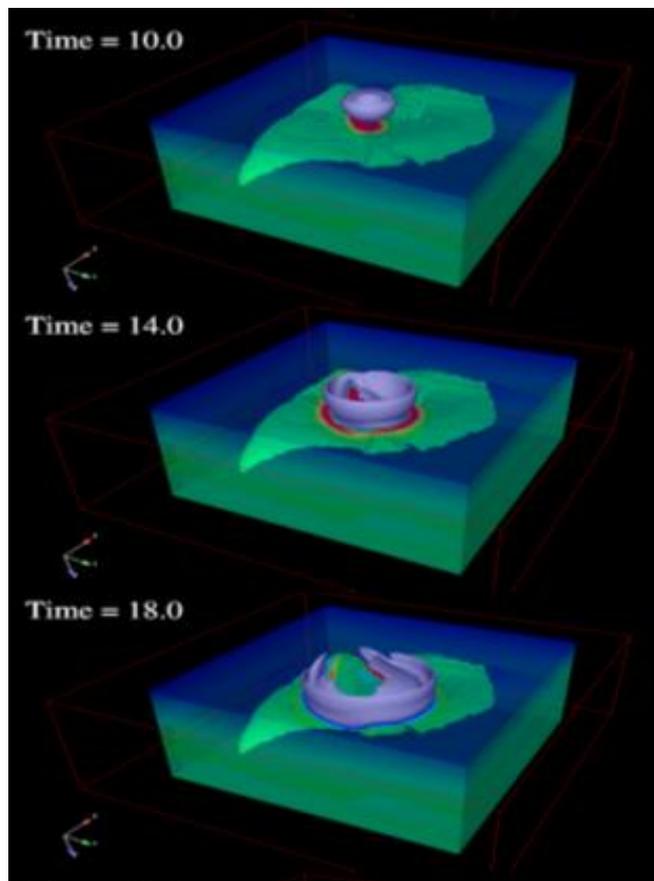


Figura 3.11: Snapshots da propagação de uma frente onda no modelo de sal da SEG/EAGE.

Na Figura 3.11 observa-se 3 momentos diferentes de propagação do campo de onda a partir da superfície do modelo.

Referências

- [1] ZEITLIN, M. J., 2001. How 3-D visualization will change interpretation strategies in future oil companies. The Leading Edge, December, 2001. Pg. 1370.
- [2] ROBINSON, E. S., ÇORUH, C., 1976, Basic Exploration Geophysics, Ed. Wiley, 15-23.
- [3] Naval Facilities Engineering Service Center, High resolution 3-d seismic rejection survey, http://enviro.nfesc.navy.mil/erb/erb_a/restoration/technologies/invest/geo_phys/3d/srsatt1.htm
- [4] LUCA, G., 2001, Toward High Definition Reservoir Characterization -Master Science Thesis - College of Engineering and Mineral/West Virginia University. .
- [5] SHERIFF, R. E., 1985, Aspects of Seismic Resolution, AAPG Memoir 39, p.1-10.
- [6] BROWN, A. R., 1993, Interpretation of Three-Dimensional Seismic Data, AAPG Memoir 42, p.2-3.
- [7] SMITH, G. D., 1969, Numerical Solution of Partial Diferential Equations, Oxford University Press, London.
- [8] MUFTI, I. R., 1990, .Large-Scale Three-Dimensional Seismic Models and Their Interpretive Significance., Geophysics, 55:1166-1182.
- [9] CERJAN, C., KOSLOFF, D., KOSLOFF, R., and RESHEF, M., 1985, .A Nonreflecting Boundary Condition For Discrete Acoustic and Elastic Wave Equation., Geophysics, 50, 705-708.
- [10] REYNOLDS, A. C., 1978, .Boundary Conditions For the Numerical Solution of Wave Propagation Problems., Geophysics, 43, 1099-1110.
- [11] SILVA, B. M., 2006. Migração RTM, PSPI e SPLIT-STEP de Registros de Múltiplas Fontes: Imageamento Sísmico em Meios com Altos Contrastes de Velocidade - COPPE/UFRJ - Dissertação de Mestrado.
- [12] SILVA, J. J., 2002. Migração Reversa no Tempo: Resolução Sísmica Interpoços - OPPE/UFRJ - Dissertação de Mestrado.

