



## DÉCIMA PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-032 Sistemas Lineares 4P22 – Décima Lista de Exercícios

**Notação:**  $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (vetor de estados)

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  (vetor de entrada)

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  (vetor de saída)

$n$ : ordem do sistema

### EXERCÍCIO 1

Considere o SLIT SISO causal a tempo contínuo com REE dada pelas matrizes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}\}$  abaixo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = [3 \quad -1 \quad 1].$$

- Calcule os polos do SLIT com REE dada.
- Desenhe um diagrama de fluxo que corresponda à REE dada.
- O SLIT é completamente controlável? Caso não seja, encontre uma REE de uma decomposição controlável do SLIT e desenhe um diagrama de fluxo correspondente.
- O SLIT é completamente observável? Caso não seja, encontre uma REE de uma decomposição observável do SLIT e desenhe um diagrama de fluxo correspondente.
- Caso o SLIT não seja completamente controlável nem observável, encontre uma matriz  $\mathbf{P}$  que realiza a decomposição de Kalman do sistema e as matrizes  $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}\}$  após a transformação de base.
- A partir das matrizes  $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}\}$  do item anterior, obtenha uma REE da realização mínima do SLIT e determine sua função de transferência.
- Compare os polos de  $H(s)$  da realização mínima com os polos do SLIT, obtidos no item (a): formam o mesmo conjunto de polos? Caso não, discuta diferença entre os conjuntos de polos à luz dos resultados obtidos nos itens (c) a (f).



## EXERCÍCIO 2

Considere o SLIT SISO causal, a tempo discreto, com REE dada pelas matrizes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}\}$  abaixo, com  $\lambda = 4/5$  e  $\gamma = 1$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 1].$$

- Na REE dada, o SLIT é marginalmente estável?
- O SLIT é completamente controlável e observável? Caso não seja, encontre a matriz  $\mathbf{P}$  que realiza a decomposição de Kalman do sistema e as matrizes  $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}\}$  após a transformação de base.
- A partir das matrizes  $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}\}$  do item anterior, obtenha uma REE da realização mínima do SLIT. Nesta REE, o SLIT é marginalmente estável?

## EXERCÍCIO 3

Considere o SLIT SISO causal a tempo contínuo com REE, cuja equação de estados tem as matrizes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  abaixo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- O SLIT é assintoticamente estável?
- É estabilizável? Caso seja, encontre uma matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  tal que, para a entrada  $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  o SLIT realimentado resultante tenha polos em  $s = -2$  e  $s = -1 \pm j$ .

## EXERCÍCIO 4

Considere o SLIT SISO causal a tempo contínuo com REE, cuja equação de estados tem as matrizes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  abaixo, para  $t \geq 0$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- O SLIT é estabilizável? Caso seja, use o método do Gramiano para encontrar uma matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  que estabilize o sistema e coloque a parte real dos polos em  $Re\{s\} = -1$ .



### EXERCÍCIO 5 – COMPUTACIONAL\*

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo, com equação de estado abaixo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

- O SLIT é estabilizável? Caso seja, é possível, pelo método do Gramiano, posicionar a parte real dos polos em  $Re\{s\} = -1/2$ ?
- Use o método do Gramiano para encontrar uma matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  que estabilize o sistema e coloque a parte real dos polos em  $Re\{s\} = -3$ .

\* Matlab: Use a função `ss.m` para criar um objeto SYS da REE. Depois, usar a função `gram.m` para obter o Gramiano de controlabilidade do par de matrizes de interesse.