PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-032 Sistemas Lineares 4P21 – **Nona Lista de Exercícios**

Notação: $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estados)

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ (vetor de entrada)

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ (vetor de saída)

n: ordem do sistema

EXERCÍCIO 1

Considere o SLIT SISO causal a tempo discreto com equações de estado e saída abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) \neq 0, \qquad k \geq 0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(k) \qquad\qquad\qquad k \geq 0 \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = [0 \quad 1] \text{ e } \mathbf{C}_2 = [1 \quad 0].$$

a) Determine os auto-valores da matriz $\boldsymbol{A}$ e suas respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
b) Para cada $\boldsymbol{C}_i$ dado, determine se o SLIT é completamente observável.
c) Para cada $\boldsymbol{C}_i$ tal que o SLIT seja completamente observável, encontre os 5 primeiros elementos da saída $y(k)$, para $k = 0,1,2 \ldots,4$, sabendo que os 2 primeiros elementos da saída observada são $[y(0)\ y(1)\ ]^\top = [3 \quad 5]^\top$.
d) Verifique experimentalmente o resultado do item (c), através de uma simulação computacional.

EXERCÍCIO 2

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo ou discreto, com REE tal que a matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ está na formal normal de Jordan e tem auto-valor λ de multiplicidade algébrica n e multiplicidade geométrica igual a 1. No mais a matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ tem colunas $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, com $i = 1,2,\ldots,n$, i.e., $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1\ \ \mathbf{c}_2 \cdots \mathbf{c}_n]$. Mostre o SLIT é completamente observável se, e somente se $\mathbf{c}_1 \neq 0$.

Exercício 3

Generalize o resultado do exercício 2 para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na formal normal de Jordan, com auto-valor λ de multiplicidade algébrica n e multiplicidade geométrica 2, i.e., $\mathbf{A}$ é bloco diagonal com dois blocos de Jordan, em particular, um de dimensão q e outro de dimensão $n-q$. Mostre o SLIT é completamente observável se, e somente se $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_{q+1}$ são não nulos e linearmente independentes.

Exercício 4

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo discreto, com equações de estado e saída abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

a) O SLIT é completamente observável?
b) O SLIT homogêneo é marginalmente estável?

Exercício 5

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo, com equação de estado abaixo, onde b_{ij} e c_{ij} são reais não-nulos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

a) É possível encontrar c_{ij} tais que o SLIT seja completamente observável? Caso seja, mostre um exemplo.

EXERCÍCIO 6

Considere o SLIT SISO causal, a tempo discreto, com equação de estado abaixo, onde b_i, c_i, $\lambda_1, \alpha, \beta, \gamma$ e σ são reais não-nulos. Ademais, $\alpha \neq \gamma$ e $\beta \neq \sigma$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

b) Mostre que o SLIT é completamente observável se, e somente se, as três condições abaixo forem simultaneamente atendidas:
   i. $c_1 \neq 0$
   ii. c_2 ou c_3 forem não-nulos
   iii. c_4 ou c_5 forem não-nulos