DÉCIMA PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-032 Sistemas Lineares 4P21 – **Décima Lista de Exercícios**

Notação: $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estados)

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ (vetor de entrada)

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ (vetor de saída)

n: ordem do sistema

EXERCÍCIO 1

Considere o SLIT SISO causal a tempo contínuo com REE dada pelas matrizes $\{\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{C}\}$ abaixo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule os polos do SLIT com REE dada.
b) Desenhe um diagrama de fluxo que corresponda à REE dada.
c) O SLIT é completamente controlável? Caso não seja, encontre uma REE de uma decomposição controlável do SLIT e desenhe um diagrama de fluxo correspondente.
d) O SLIT é completamente observável? Caso não seja, encontre uma REE de uma decomposição observável do SLIT e desenhe um diagrama de fluxo correspondente.
e) Caso o SLIT nãos seja completamente controlável nem observável, encontre uma matriz $\boldsymbol{P}$ que realiza a decomposição de Kalman do sistema e as matrizes $\{\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}} \text{ e } \widehat{\mathbf{C}}\}$ após a transformação de base.
f) A partir das matrizes $\{\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}} \text{ e } \widehat{\mathbf{C}}\}$ do item anterior, obtenha uma REE da realização mínima do SLIT e determine sua função de transferência.
g) Compare os polos de $H(s)$ da realização mínima com os polos do SLIT, obtidos no item (a): formam o mesmo conjunto de polos? Caso não, discuta diferença entre os conjuntos de polos à luz dos resultados obtidos nos itens (c) a (f).

EXERCÍCIO 2

Considere o SLIT SISO causal, a tempo discreto, com REE dada pelas matrizes $\{\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{C}\}$ abaixo, com $\lambda = 4/5$ e $\gamma = 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Na REE dada, o SLIT é marginalmente estável?

b) O SLIT é completamente controlável e observável? Caso não seja, encontre a matriz $\boldsymbol{P}$ que realiza a decomposição de Kalman do sistema e as matrizes $\{\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}} \text{ e } \widehat{\mathbf{C}}\}$ após a transformação de base.

c) A partir das matrizes $\{\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}} \text{ e } \widehat{\mathbf{C}}\}$ do item anterior, obtenha uma REE da realização mínima do SLIT. Nesta REE, o SLIT é marginalmente estável?

EXERCÍCIO 3

Considere o SLIT SISO causal a tempo contínuo com REE, cuja equação de estados tem as matrizes $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ abaixo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) O SLIT é assintoticamente estável?

b) É estabilizável? Caso seja, encontre uma matriz de ganhos $\mathbf{K}$ tal que, para a entrada $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ o SLIT realimentado resultante tenha polos em $s = -2$ e $s = -1 \pm j$.

EXERCÍCIO 4

Considere o SLIT SISO causal a tempo contínuo com REE, cuja equação de estados tem as matrizes $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ abaixo, para $t \geq 0$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) O SLIT é estabilizável? Caso seja, use o método do Gramiano para encontrar uma matriz de ganhos $\mathbf{K}$ que estabilize o sistema e coloque a parte real dos polos em $Re\{s\} = -1$.

EXERCÍCIO 5 – COMPUTACIONAL*

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo, com equação de estado abaixo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

a) O SLIT é estabilizável? Caso seja, é possível, pelo método do Gramiano, posicionar a parte real dos polos em $Re\{s\} = -1/2$?

b) Use o método do Gramiano para encontrar uma matriz de ganhos $\mathbf{K}$ que estabilize o sistema e coloque a parte real dos polos em $Re\{s\} = -3$.

* Matlab: Use a função ss.m para criar um objeto SYS da REE. Depois, usar a função gram.m para obter o Gramiano de controlabilidade do par de matrizes de interesse.