

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS COM MÚLTIPLAS ESCALAS *

ALEXANDRE L. MADUREIRA †

26 de outubro de 2005

Resumo

Apresentamos nestas notas uma introdução a técnicas numéricas modernas e eficientes para se aproximar soluções de equações diferenciais parciais (EDPs) com coeficientes altamente oscilatórios. Considerando uma equação simples, estacionária, mas que carrega em si várias das dificuldades presentes em problemas mais sofisticados, discutimos três alternativas de modelagem: homogeneização, elementos finitos clássicos, e elementos finitos multiescala. Mostramos vantagens e desvantagens de cada técnica e apresentamos exemplos numéricos. Concluimos mostrando resumidamente outras técnicas que têm sido utilizadas recentemente para lidar com problemas com múltiplas escalas.

* *Código de classificação matemática:* 65N12, 65N15, 65N30

Palavras-chave: Homogeneização numérica, Elementos Finitos Multiescala, Método Multiescala Heterogêneo

† Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), RJ, Brasil, alm@lncc.br

1 Introdução

Nestas notas discutiremos algumas técnicas numéricas para aproximar soluções de problemas com múltiplas escalas. Apresentamos as idéias no contexto mais simples possível, com um problema unidimensional com coeficientes oscilatórios e periódicos, tendo em vista que os casos de interesse ocorrem em dimensões maiores. Apresentamos um método que funciona bem para estas classes de problemas.

É notório que o método tradicional de Galerkin com elementos finitos e funções polinomiais por partes não é adequado para resolver problemas na presença de múltiplas escalas. De fato, o método não resolve as pequenas escalas a custo aceitável e pode não ser uniformemente estável [42]. O objetivo da modelagem multiescala é capturar o comportamento macroscópico sem resolver as pequenas escalas, num sentido que deixaremos claro.

Diferentes estratégias que estendem o método tradicional de elementos finitos foram desenvolvidas para se tratar destas dificuldades. Uma formulação bem geral e flexível em relação às escolhas dos espaços das funções admissíveis e funções testes foi apresentada por Babuška e Osborn [6, 7], mas estas escolhas não são triviais em geral pois têm que ser feitas levando-se em consideração as especificidades do problema.

Uma escolha feita por Hou e Wu [32] foi a de formar o espaço de elementos finitos com *soluções locais* do operador. É principalmente sobre esta classe de métodos que concentraremos nossa atenção.

A seguir nestas notas, na Seção 1, após motivar a área de multiescala em termos de aplicações e introduzir algumas notações, descrevemos um problema de interesse e mostramos uma forma clássica de aproximá-lo, através de expansão assintótica em duas escalas. Na Seção 2 apresentamos uma versão unidimensional do problema e descrevemos o comportamento das soluções homogeneizada. Outra possibilidade de aproximação é discutida na Seção 3, e envolve discretizar

o problema usando *elementos finitos* com funções de base polinomiais por partes. Esta escolha de método numérico deve-se tanto à aplicabilidade do método em diversos problemas de interesse, como também a facilidade em desenvolver uma análise de erro que ressalte eventuais dificuldades numéricas.

Uma opção mais eficiente baseada em pesquisa recente [32, 33] é o uso de *elementos finitos multiescala*. Nesta técnica, descrita na Seção 4, funções de base que resolvem o problema *localmente* são utilizadas para gerar um espaço de elementos finitos, e automaticamente levam informações da pequena escala para a grande escala, num processo de *homogeneização numérica*.

Finalmente, vários comentários sobre este e outros métodos existentes na literatura aparecem na Seção 5.

Parte deste texto apareceu originariamente em [38, 41].

1.1 Motivação

Múltiplas escalas são comuns em problemas de interesse prático, e apresentam um grande e interessante desafio do ponto de vista matemático. Recentemente, com o aumento da capacidade computacional e com a necessidade de modelagem de novos materiais e sistemas complexos, a área vem recebendo redobrada atenção.

Como exemplo de aplicação, consideramos um material compósito como na Figura 1 (gentilmente cedida por Roderic Lakes [36]). O material a é um laminado onde cada lâmina contém fibras dispostas com diferentes orientações, resultando numa determinada *anisotropia*. No material b , cada lâmina contém um sub-laminado, representando um material altamente heterogêneo.

É fácil perceber que, por exemplo, usar elasticidade não linear para modelar deslocamento de laminados como os acima descritos é uma tarefa não trivial, pois o comportamento de cada uma das fibras e sub-laminados teria que ser levado em conta. Uma forma prática de se obter informações é tomar o

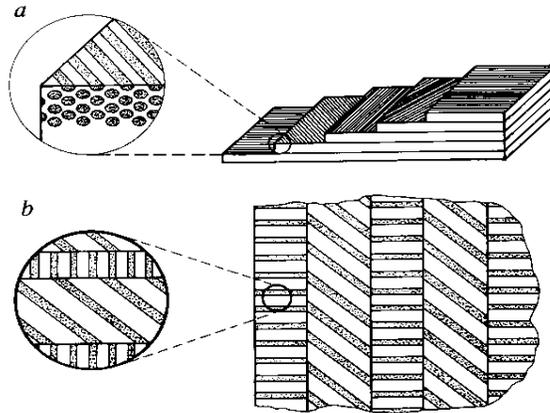


Fig. 1: Material com múltiplas escalas

comportamento “macroscópico” ou “homogeneizado” do material. A idéia é então levar em conta a microestrutura material para formular uma equação homogeneizada que pode ser resolvida mais facilmente.

Outra área onde técnicas de homogeneização são utilizadas é em escoamentos em meios porosos, em particular para simular poluição de aquíferos, extração de petróleo, contaminação por dejetos radioativos, etc. Ver o artigo [11], e as referências nele contidas.

1.2 Notações e definições

Nestas notas usaremos vários conceitos introdutórios de formulações fracas de equações diferenciais e de espaços de Sobolev. Vários livros tratam destes assuntos em diversos níveis de profundidade [3, 4, 10, 12, 35, 37].

Começamos por impor algumas razoáveis restrições nos domínios que utilizaremos. Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado e de Lipschitz. Tipi-

camente, Ω será um polígono convexo, e quando houver necessidade de mais regularidade, esta será indicada explicitamente. Em particular entendemos por “suave” um domínio com fronteira C^∞ .

Para $p \geq 1$, seja $L^p(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|v|^p$ seja integrável. Neste espaço usamos a norma

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Definimos também o espaço das funções *essencialmente limitadas*:

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |v(\mathbf{x})|.$$

Usando a noção de derivadas fracas, definimos para um número inteiro não negativo k , e para $p \in [1, \infty)$ ou $p = \infty$, o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ das funções $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial^{k_1+k_2} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \in L^p(\Omega),$$

para todo k_1, k_2 inteiros não negativos tais que $k_1 + k_2 \leq k$. Usando as seminormas

$$|v|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1+k_2=k}}^k \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

equipamos $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^k |v|_{W^{i,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Definimos ainda o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ dado pelo completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ (espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω) usando a norma de $W^{k,p}(\Omega)$.

Denotamos em geral $W^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$, e $W_0^{k,2}(\Omega)$ por $H_0^k(\Omega)$. Quando $k = 0$ temos simplesmente $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Finalmente, temos a desigualdade

de Poincaré que garante a existência de uma constante c , que depende somente de Ω , tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c|v|_{H^1(\Omega)}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

1.3 Expansão assintótica em duas escalas

Dado um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com fronteira suave $\partial\Omega$, uma função f também suave em Ω , considere o problema de achar u^ϵ tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a^\epsilon(\mathbf{x}) \nabla u^\epsilon(\mathbf{x})] &= f(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Para cada $\epsilon > 0$, definimos $a^\epsilon(\mathbf{x}) = a(\epsilon^{-1}\mathbf{x})$, onde $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e periódica com período $Q = (0, 1) \times (0, 1)$. Além disto, assumiremos que existem constantes β e α tais que $\beta \geq a(\mathbf{x}) \geq \alpha > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Algumas perguntas naturais surgem:

1. A sequência de soluções u^ϵ converge em algum sentido para alguma função u^* quando $\epsilon \rightarrow 0$?
2. Em que sentido a convergência ocorre, i.e., qual é a topologia apropriada?
3. Quão rápida é esta convergência em relação a ϵ ?
4. Finalmente, qual é a equação que determina u^* ?

Chamaremos a função u^* de *solução homogeneizada*, e o problema por ela satisfeito de *problema ou equação homogeneizada*.

Ao menos formalmente, não é difícil começar a obter algumas respostas. Usando as idéias de expansão assintótica em duas escalas, começamos assumindo que

$$u^\epsilon(\mathbf{x}) \sim u^0(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) + \epsilon u^1(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) + \epsilon^2 u^2(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) + \dots, \tag{1.2}$$

onde as funções

$$\begin{aligned} u^i : \Omega \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

estão ainda indeterminadas. Impomos ainda uma condição extra nos termos u^i , que sejam Q -periódicos com respeito a \mathbf{y} . Apesar destas condições de contorno parecerem *ad hoc*, elas fazem com que a expansão assintótica “funcione” e que seus termos sejam bem definidos. Além disto, estas condições são *intuitivas*, no sentido que como a pequena escala é periódica, parece natural também impor condições periódicas na variável \mathbf{y} .

A expansão (1.2) deve ser entendida como uma identidade *formal*, e nenhum sentido de convergência pode sê-la atribuída, por enquanto. É válido se perguntar o porquê de tal forma para a expansão. Respostas só podem ser dadas *a posteriori*, quando mostrarmos que a expansão assintoticamente aproxima u^ϵ . Entretanto uma possível justificativa é que existem duas escalas importantes no problema, a macroescala descrita pela variável $\mathbf{x} \in \Omega$, e a microescala descrita pela variável $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Usando a regra da cadeia temos

$$\nabla[u^i(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x})] = [\nabla_{\mathbf{x}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}},$$

e similarmente, definindo o operador

$$\mathcal{L}^\epsilon v = \operatorname{div}(a^\epsilon \nabla v), \quad (1.3)$$

para funções $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suaves, temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^\epsilon u^i)(\mathbf{x}) &= \left\{ \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}}, \quad (1.4) \end{aligned}$$

onde $\nabla_{\mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{y}}$ denotam o gradiente com respeito às variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente. Notação similar se aplica para $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$ e $\operatorname{div}_{\mathbf{y}}$. Substituindo *formalmente* (1.2) em (1.4), temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^\epsilon u^\epsilon)(\mathbf{x}) = & \left\{ \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right. \\ & + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & \left. + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^2 \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \dots \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}}. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Vale observar que todos os termos multiplicados por ϵ^{-2} , ϵ^{-1} e ϵ^0 estão presentes. Faltam entretanto termos em ϵ , ϵ^2 , etc, pois estes dependeriam de u^3 , etc.

Utilizando (1.1) e (1.5), e agrupando os termos multiplicados por ϵ^{-2} temos

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = 0 \quad \text{em } \Omega \times Q. \quad (1.6)$$

Note que propomos a equação (1.6) para *toda* $\mathbf{y} \in Q$ e não apenas em $\mathbf{y} = \epsilon^{-1}\mathbf{x}$, como em (1.5). Deste modo temos uma equação em Q , parametrizada por $\mathbf{x} \in \Omega$. Portanto, concluímos de (1.6) que u^0 independe de \mathbf{y} , i.e., existe uma função $u^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$u^*(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Agrupando os termos multiplicados por ϵ^0 em (1.5) resulta em

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^*(\mathbf{x})] = f \quad \text{em } \Omega \times Q. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Observe que (1.7) tem condição de compatibilidade resultante de integração em Q com respeito a \mathbf{y} :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \int_Q a(\mathbf{y}) [\nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} u^*(\mathbf{x})] d\mathbf{y} = f \quad \text{em } \Omega. \quad (1.8)$$

Para determinar u^* , juntamos os termos em ϵ^{-1} e concluímos que

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = -\nabla_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u^*(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \times Q. \quad (1.9)$$

Note que resolvendo

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} H_j(\mathbf{y})] = -\frac{\partial a}{\partial y_j}(\mathbf{y}) \quad \text{em } Q, \quad H_j(\cdot) \text{ periódico com período } Q, \quad (1.10)$$

para $j = 1, 2$, vemos facilmente que

$$u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^2 H_j(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

satisfaz (1.9). Finalmente, substituindo em (1.8), concluímos que

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} A^* \nabla_{\mathbf{x}} u^* = f \quad \text{em } \Omega, \quad u^* = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (1.12)$$

onde

$$A_{i,j}^* = \int_Q a(\mathbf{y}) \left[\frac{\partial H_j}{\partial y_i}(\mathbf{y}) + \delta_{ij} \right] d\mathbf{y}.$$

Os problemas definidos por (1.10) são denominados *problemas de célula*, e são funções apenas do comportamento “local” de $a(\cdot)$, não dependendo de ϵ , Ω ou f . Depois de resolvido (1.10), o problema (1.12) está bem-definido, e é também independente do parâmetro ϵ .

Observação 1.1 *Mesmo sendo isotrópico o problema original (1.1), a equação homogeneizada resultante é anisotrópica em geral.*

1.4 Justificando a expansão assintótica

Apesar de não se poder concluir da derivação formal acima que u^* é de fato o limite de u^ϵ , existem técnicas apropriadas para provar convergência de u^ϵ para u^* , justificando assim (1.12). Citamos por exemplo o método de funções

testes oscilatórias de Tartar, bem como o método de duas escalas de Nguetseng e Allaire [1, 2, 9]. Apresentamos aqui uma argumentação mais simples e de escopo mais limitado [31], porém suficiente para nossos propósitos. Por outro lado, exigimos suavidade do domínio e dos coeficientes que não ocorre na maioria dos problemas de interesse prático.

Seja $z = u^\epsilon - (u^* + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2)$. Note que tanto u^* como u^1 estão bem definidos por (1.12) e (1.11). Como a condição de compatibilidade (1.8) é satisfeita, então existe solução para (1.7). Por substituição direta temos $\mathcal{L}^\epsilon z = r$, onde

$$r(\mathbf{x}) = \left\{ \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right. \\ \left. + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^2 \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}}.$$

Assumindo a , Ω e f suficientemente suaves, temos que $\|r\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\epsilon$. No bordo de Ω temos $z = -\epsilon u^1 - \epsilon^2 u^2$, logo $\|z\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq c\epsilon$. Aplicando o princípio do máximo [29] para z , u^1 e u^2 , concluímos que

$$\|u^\epsilon - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u^\epsilon - (u^* + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\epsilon u^1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\epsilon^2 u^2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\epsilon. \quad (1.13)$$

Logo, a solução exata de (1.1) não só converge para a solução homogeneizada dada por (1.12), como o erro decresce linearmente com ϵ em $L^\infty(\Omega)$. Temos portanto respostas para as perguntas da Subseção 1.3.

Um resultado de convergência como o dado por (1.13) pode ser obtido sob condições mais fracas. Seja $\theta \in H^1(\Omega)$ solução fraca de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} [a^\epsilon(\mathbf{x}) \nabla \theta(\mathbf{x})] &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \theta(\mathbf{x}) &= u^1(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Temos então o seguinte resultado [39, Lema 3.1, Corolário 3.2, Observação 3.3].

Teorema 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz e $a \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$, periódica com período Q . Assuma que $f \in L^2(\Omega)$, e seja*

u^ϵ solução de (1.1). Sejam u^* , u^1 e θ definidos por (1.12), (1.11) e (1.14) respectivamente. Então existe uma constante C independente de f e de ϵ tal que

$$\begin{aligned}\|u^\epsilon - u^* - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\epsilon \|u^*\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|u^\epsilon - u^*\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\epsilon \|u^*\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Do ponto de vista de aplicações, o resultado acima é ainda limitado, principalmente quanto à exigência que $a(\cdot)$ tenha de certa forma suave. Em compósitos por exemplo, o coeficiente seria de fato *descontínuo*, refletindo a inclusão de materiais com propriedades distintas do meio predominante. Entretanto, o resultado acima é fundamental para estimar erros de aproximações de métodos numéricos que proporemos a seguir.

2 Um modelo unidimensional

Para descrever as propriedades qualitativas e dificuldades relacionadas com problemas que apresentam caráter oscilatório, consideramos o seguinte modelo unidimensional:

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \right) &= f(x) \quad \text{em } (0, 1), \\ u^\epsilon(0) &= u^\epsilon(1) = 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

onde $a(\cdot)$ é suave e periódica com período 1, e existem β, α reais tais que $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$. Estamos interessados somente no caso em que $\epsilon \leq 1$, portanto assumimos também esta desigualdade.

Neste caso unidimensional, é fácil obter uma solução analítica para (2.15):

$$\begin{aligned}u^\epsilon(x) &= -\int_0^x \frac{1}{a(\xi/\epsilon)} \left(\int_0^\xi f(t) dt + c_0 \right) d\xi, \\ c_0 &= -\frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(\xi/\epsilon)} d\xi} \int_0^1 \left(\frac{1}{a(\xi/\epsilon)} \int_0^\xi f(t) dt \right) d\xi.\end{aligned}$$

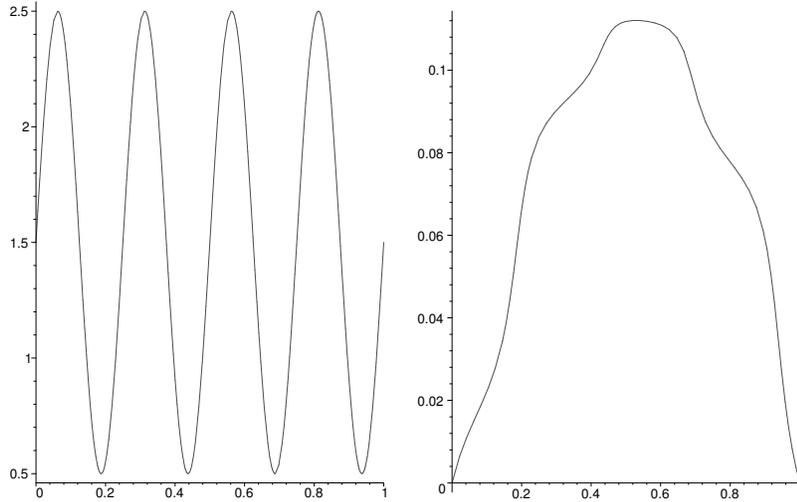


Fig. 2: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/4$.

2.1 Solução exata

Nos nossos exemplos, consideramos

$$f(x) = 1, \quad a(x) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 + \sin(2\pi x)) + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{2}. \quad (2.16)$$

Seja a sequência de problemas onde $\epsilon = 1/4$, $\epsilon = 1/8$ e $\epsilon = 1/16$.

É fácil notar pelas Figuras 2, 3 e 4 deste exemplo, que crescem as oscilações de $a(\cdot/\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Em geral, não é possível obter soluções analíticas para dimensões maiores. Motivados por esta dificuldade, investigaremos agora como encontrar soluções aproximadas para (2.15).

Uma possibilidade explorada na Seção 2.2 é o uso de técnicas de homogeneização. Como vimos, a idéia básica apoia-se no fato de que, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a solução exata converge para a solução homogeneizada. Espera-se então que para

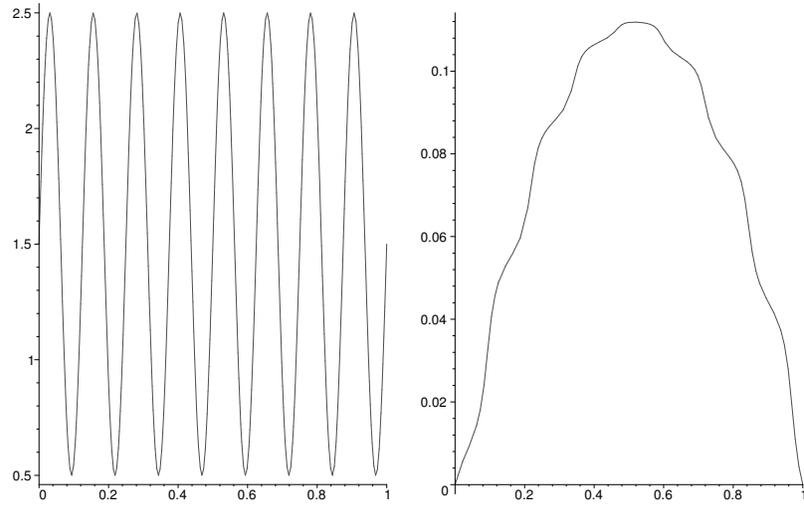


Fig. 3: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/8$.

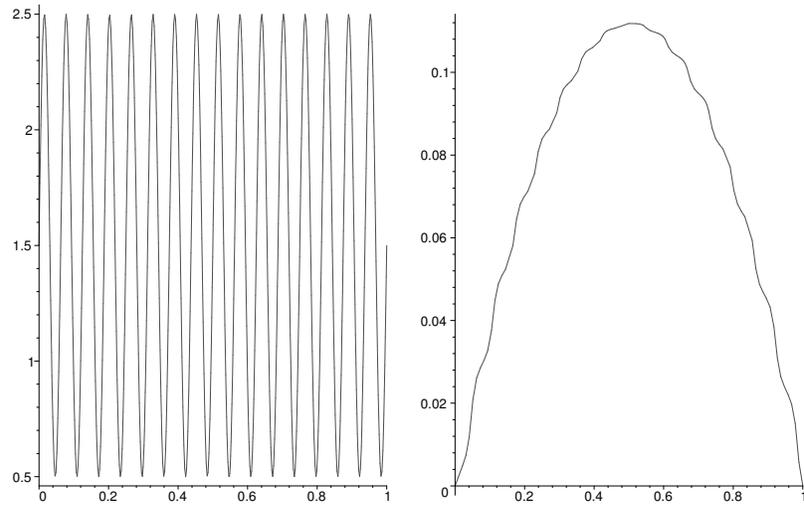


Fig. 4: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/16$.

valores de ϵ pequenos, a aproximação pela solução homogeneizada seja boa o suficiente.

2.2 Solução homogeneizada

Considere u^ϵ solução de (2.15), e o problema homogeneizado

$$-\frac{1}{\mathcal{M}(1/a)} \frac{d^2}{dx^2} u^0 = f(x) \quad \text{em } (0, 1), \quad u^0(0) = u^0(1) = 0, \quad (2.17)$$

e

$$\mathcal{M}(1/a) = \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx.$$

Em uma dimensão, é fácil calcular u^0 analiticamente:

$$u^0(x) = \mathcal{M}(1/a) \left[- \int_0^x \int_0^\xi f(t) dt d\xi + x \int_0^1 \int_0^\xi f(t) dt d\xi \right]. \quad (2.18)$$

Pela versão unidimensional do Teorema 1.1, temos convergência de u^ϵ para u^0 .

Assumindo (2.16), comparamos agora como a solução homogeneizada se comporta. Considere a sequência de exemplos onde $\epsilon = 1/4$, $\epsilon = 1/8$ e $\epsilon = 1/16$.

Pode-se notar pelas Figuras 5 e 6 que para valores de ϵ pequenos, a solução homogeneizada u^0 torna-se uma boa aproximação para a solução exata u^ϵ .

Apesar de serem extremamente úteis em várias aplicações, as técnicas de homogeneização apresentam algumas limitações. Por exemplo, sua aplicabilidade está limitada a valores de ϵ pequenos, como fica aparente na Figura 5. Outras dificuldades surgem em casos mais gerais, por exemplo quando $a(\cdot)$ é não periódico.

3 Aproximação por Elementos Finitos

O primeiro passo para apresentar o método é reescrever (2.15) na sua *forma fraca*, multiplicando a equação por uma função $v \in H_0^1(0, 1)$ e integrando por

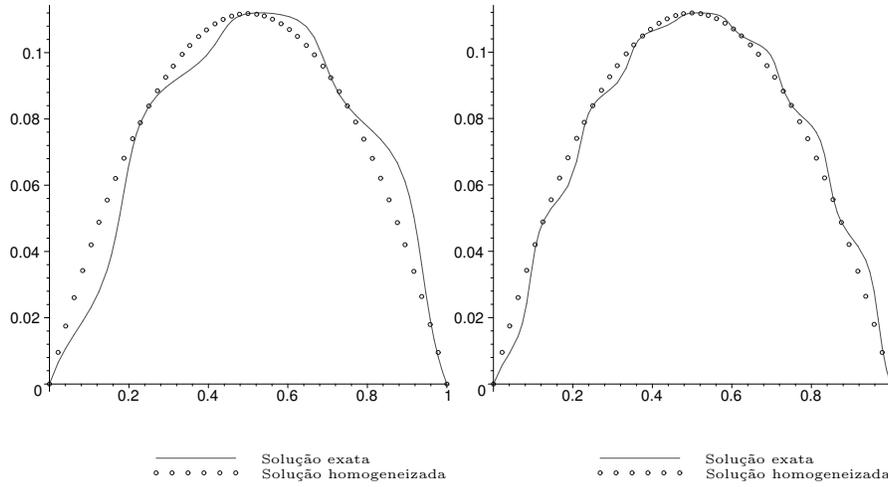


Fig. 5: Soluções exatas e homogeneizadas para $\epsilon = 1/4$ e $\epsilon = 1/8$.

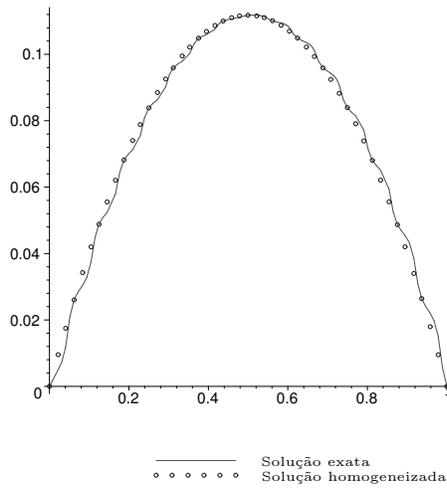


Fig. 6: Comparação entre as soluções exata e homogeneizada para $\epsilon = 1/16$.

partes. Buscamos então $u^\epsilon \in H_0^1(0, 1)$ tal que

$$\int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1). \quad (3.19)$$

A existência e unicidade de soluções para (3.19) se segue imediatamente do Lema de Lax–Milgram. No caso de f ser suave, esta solução também resolve (2.15), e estas duas formulações são equivalentes.

3.1 Discretização por Elementos Finitos

No método de Galerkin, escolhemos um subespaço de $H_0^1(0, 1)$ e buscamos soluções aproximadas de (3.19) dentro desse subespaço. Para usar elementos finitos, primeiro discretizamos o domínio $(0, 1)$ em $N + 1$ elementos definindo os nós $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$, onde $x_j = jh$, e $h = 1/(N + 1)$ é o tamanho da malha. A seguir, definimos o espaço de dimensão finita de funções lineares por partes $V_0^h \subset H_0^1(0, 1)$, onde

$$V_0^h = \{v^h \in H_0^1(0, 1) : v^h \text{ é linear em } (x_{j-1}, x_j) \text{ for } j = 1, \dots, N + 1\}.$$

A aproximação por elementos finitos de u^ϵ é $u^h \in V_0^h$ tal que

$$\int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^h}{dx}(x) \frac{dv^h}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x)v^h(x) dx \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h. \quad (3.20)$$

Mais uma vez, a existência e unicidade de soluções para (3.20) é consequência imediata do Lema de Lax–Milgram.

Observação 3.1 *Note que u^h também depende de ϵ , apesar desta dependência não estar explicitada na notação.*

Observe que uma função em V_0^h pode ser caracterizada de forma única pelos valores que assume nos nós x_1, x_2 , etc. Em vista disto, introduzimos uma *base*

em V_0^h dada pelos $\phi_i \in V_0^h$ tal que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ para $j = 1, \dots, N$. Temos então $V_0^h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$.

Finalmente, se $u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$, então reescrevemos (3.20) como

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_j}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx \quad \text{para } j = 1, \dots, N. \quad (3.21)$$

Note que $u_j = u^h(x_j)$ é o valor de u^h no nó x_j .

As aproximações numéricas para (2.15), onde a é dada por (2.16) apresentam resultados variados. Para $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$, o método de elementos finitos aproxima razoavelmente bem a solução exata, como mostra a primeira comparação na Figura 7. Entretanto, a aproximação se deteriora quando ϵ se torna menor. Veja os gráficos para $h = 1/32$, mas $\epsilon = 1/8$ na Figura 7, e $\epsilon = 1/16$ na Figura 8 (à esquerda). A aproximação melhora se refinarmos a malha. Por exemplo, tomando o caso $\epsilon = 1/8$, mas com $h = 1/64$, temos uma melhoria na aproximação, como mostra a Figura 8.

O ponto que queremos ressaltar é que o método de elementos finitos converge, mas *a convergência depende de ϵ* . Isto pode ser um problema em dimensões maiores, quando o uso de malhas refinadas torna-se caro computacionalmente.

3.2 O que dá errado?

A fim de entender melhor porque o método de elementos finitos clássico não funciona bem, desenvolvemos uma análise de erro para esse problema. Denotamos por c uma constante independente de ϵ , h , f , α e β .

A análise é baseada no *Lema de Cea*, que indica que, a menos de uma constante multiplicativa, a aproximação dada pelo método de Galerkin é a melhor possível.

Lema 3.1 (Lema de Cea) *Sejam u^ϵ e u^h soluções de (2.15) e (3.20). Então*

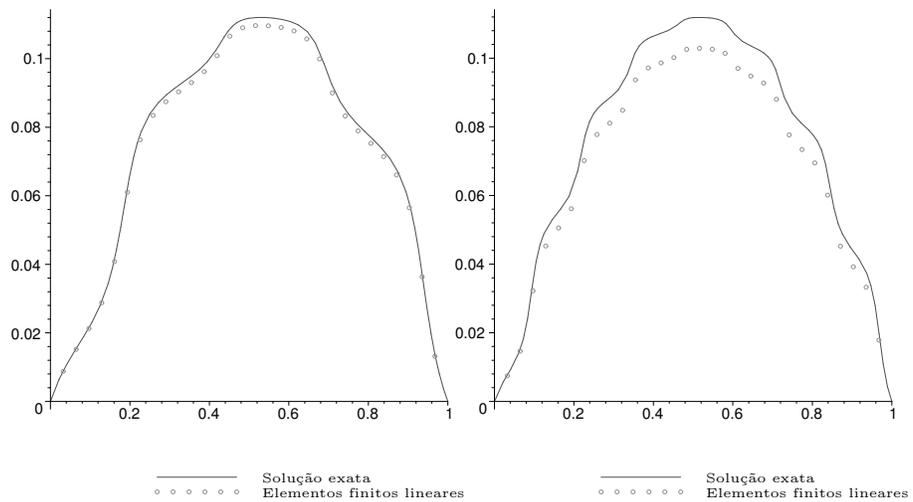


Fig. 7: Solução exata e sua aproximação com $h = 1/32$ para $\epsilon = 1/4$ e $\epsilon = 1/8$.

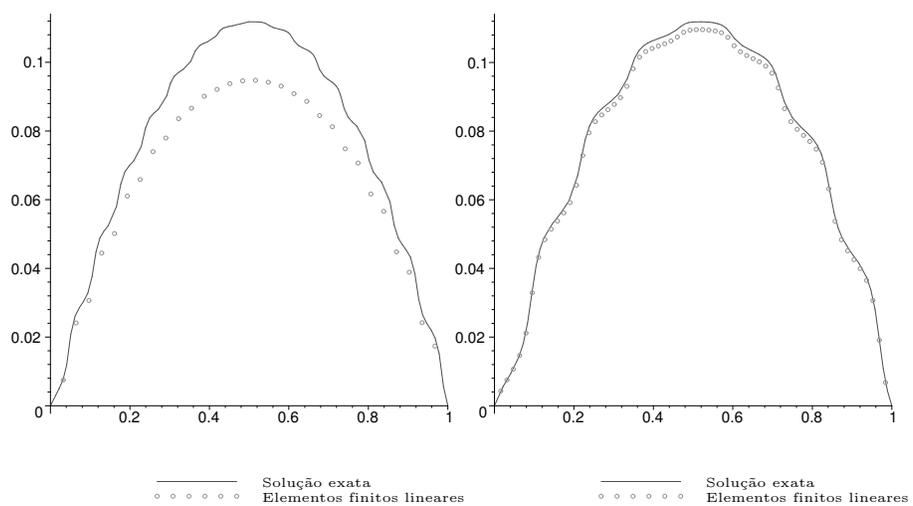


Fig. 8: À esquerda: $\epsilon = 1/16$ e $h = 1/32$. À direita: $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/64$.

existe uma constante universal c tal que

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

Dem.: Para facilitar a notação, definimos as formas bilineares

$$b(u, v) = \int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx, \quad (f, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Temos então que a solução exata $u^\epsilon \in H_0^1(0, 1)$ e sua aproximação por elementos finitos $u^h \in V_0^h$ satisfazem

$$b(u^\epsilon, v) = (f, v), \quad b(u^h, v^h) = (f, v^h),$$

para todo $v \in H_0^1(0, 1)$ e para todo $v^h \in V_0^h$. Portanto $b(u^\epsilon - u^h, v^h) = 0$. Na nossa análise, usamos o fato que $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$. Começamos por investigar a continuidade da forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$. Segue-se de sua definição que

$$b(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(0, 1). \quad (3.22)$$

A seguir, estimamos a coercividade:

$$b(v, v) \geq \alpha \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \geq c\alpha \|v\|_{H^1(0,1)}^2 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1), \quad (3.23)$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré no último passo. Podemos agora obter estimativas de erro. Usando (3.23), e depois (3.22), concluímos que

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)}^2 &\leq \frac{c}{\alpha} b(u^\epsilon - u^h, u^\epsilon - u^h) = \frac{c}{\alpha} b(u^\epsilon - u^h, u^\epsilon - v^h) \\ &\leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \|u^\epsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h. \end{aligned} \quad (3.24)$$

□

A fim de aplicar o Lema de Cea (Lema 3.1) usamos uma estimativa clássica de erro de interpolação garantindo que

$$\|u^\epsilon - I^h u^\epsilon\|_{H^1(0,1)} \leq ch |u^\epsilon|_{H^2(0,1)}, \quad (3.25)$$

onde $I^h u^\epsilon = \sum_{j=1}^N u^\epsilon(x_j) \phi_j$ é o interpolador de u^ϵ em V_0^h . Fazendo $v^h = I^h u^\epsilon$ em (3.24), concluímos que

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} h |u^\epsilon|_{H^2(0,1)}.$$

Obtemos finalmente o teorema a seguir usando a estimativa

$$|u^\epsilon|_{H^2(0,1)} \leq \frac{c\beta}{\alpha^2 \epsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}, \quad (3.26)$$

onde assumimos $|a'(x)| \leq c\beta$.

Teorema 3.1 *Seja $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ϵ solução de (2.15). Então existe uma constante c independente de $\epsilon, f, \alpha, \beta$ tal que*

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta^2 h}{\alpha^3 \epsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.27)$$

Interpretando a estimativa obtida, percebemos de imediato que *o método converge quando $h \rightarrow 0$* . De fato, para ϵ fixo, o erro vai a zero quando o tamanho da malha vai a zero. O problema é que a convergência em h não é uniforme em ϵ .

Logo, para ϵ pequeno, a menos que a malha seja muito refinada ($h \ll \epsilon$), a estimativa (3.27) indica que o erro na norma $H^1(0,1)$ é grande. Isto faz com que o método de elementos finitos tradicional seja deficiente para este tipo de problema, e explica os maus resultados das Figuras 7 e 8 (à esquerda).

4 Elementos Finitos Múltiescala

Mais recentemente, Hou e Wu [32] propuseram uma nova forma de aproximação numérica para EDPs em duas dimensões com coeficientes oscilatórios. A idéia básica é mudar as funções de base do espaço de elementos finitos. Ao invés de usar funções lineares por partes, a técnica de *elementos finitos multiescala* usa funções que resolvem localmente (em cada elemento) a equação em questão.

Apresentamos aqui as idéias no caso unidimensional. Em quase todos os aspectos, incluindo a análise de erro, a extensão para duas dimensões é natural. Comentamos ao fim desta seção alguns pontos onde esta generalização não é trivial.

Ressaltamos que apesar da definição do método feita na Subseção 4.1 depender da periodicidade de $a(\cdot)$, a análise apresentada na Subseção 4.2 baseia-se nesta propriedade.

4.1 Definição do método

A fim de definir o método, construímos as funções de base. Seja ψ_i tal que

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{d\psi_i}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (4.28)$$

para $i = 1, \dots, N$. Definimos então o espaço de elementos finitos multiescala como sendo

$$V_0^{h,\epsilon} = \text{span} \{ \psi_1, \dots, \psi_N \}.$$

Duas funções de base típicas são apresentadas na Figura 9. No gráfico à esquerda os parâmetros são $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$. Note que a função se parece muito com a função de base do método de elementos finitos usual. Isto é bom, pois neste caso o parâmetro de malha h é bem menor do que ϵ , e a função de base tradicional ainda funciona bem, vide a primeira comparação na Figura 7. No caso oposto, quando ϵ é bem menor que h , temos que a função de base tem caráter oscilatório, como é mostrado no gráfico à direita na Figura 9, para $\epsilon = 1/128$ e $h = 1/32$.

Definimos então a solução de elementos finitos multiescala $u^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}$ onde

$$\int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^{h,\epsilon}}{dx}(x) \frac{dv^{h,\epsilon}}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x) v^{h,\epsilon}(x) dx \quad \text{para todo } v^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}. \quad (4.29)$$

Testando então a aproximação para $\epsilon = 1/16$ e $h = 1/10$, vemos na Figura 10 que a solução aproximada pelo método de elementos finitos multiescala interpola a

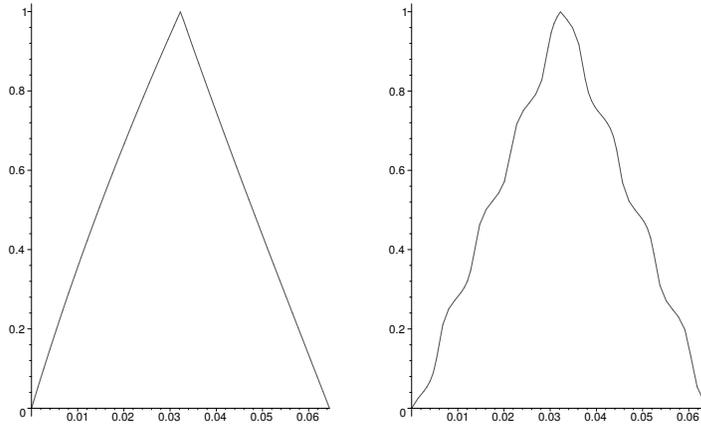


Fig. 9: Para $h = 1/32$, gráficos de ψ_1 com $\epsilon = 1/4$ e $\epsilon = 1/128$.

solução exata nos nós. Isto não é uma coincidência, mas sim uma característica de métodos de elementos finitos que utilizam funções que são soluções locais da própria EDP que estão aproximando, em uma dimensão. Em dimensões maiores essa propriedade é, infelizmente!, perdida.

4.2 Análise de erro

A análise de erro desenvolvida em [33] baseia-se no Lema de Cea, como feito na Subseção 3.2.

Lema 4.1 (Lema de Cea) *Sejam u^ϵ e $u^{h,\epsilon}$ soluções de (2.15) e (4.29). Então existe uma constante universal c tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - v^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}.$$

No método de elementos finitos clássico, encontramos uma função em V_0^h que “aproximava bem” u^ϵ e estimamos o erro de aproximação. No caso, a função em

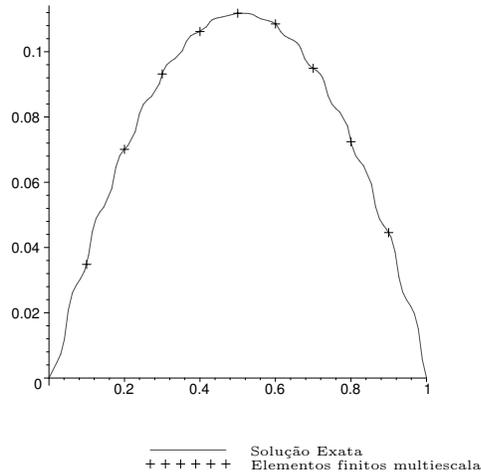


Fig. 10: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos multiescala, com $\epsilon = 1/16$ e $h = 1/10$.

V_0^h era o interpolador de u^ϵ . Utilizando o Lema de Cea (Lema 3.1) obtivemos a estimativa final.

Similarmente, o desafio agora é achar uma aproximação para u^ϵ no espaço multiescala $V_0^{h,\epsilon}$. A análise divide-se em dois casos distintos, dependendo se a malha é refinada o suficiente ou não, em relação a ϵ . Na verdade, em uma dimensão, esta divisão em casos distintos não faz sentido. Mesmo assim, mantemos a análise dividida nestes dois casos, pois em dimensões maiores a análise de erro dá informações qualitativas diferentes dependendo se $h \ll \epsilon$ ou $\epsilon \ll h$.

Caso I: $h \ll \epsilon$. Neste caso em que assumimos a malha suficientemente refinada, obtemos a seguinte resultado de convergência, que a menos de constantes, é o mesmo que o do Teorema 3.1. Ou seja, para malhas refinadas, *o método multiescala funciona tão bem quanto o método tradicional*.

Teorema 4.1 *Seja $f \in L^2(0,1)$ e seja u^ϵ solução de (2.15). Então existe uma constante c independente de ϵ , f , α e β tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha^2} h \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

O teorema acima segue-se facilmente do Lema de Cea (Lema 4.1) e do seguinte resultado de interpolação [33].

Lema 4.2 *Seja u^ϵ solução de (2.15), e seja $I^{h,\epsilon}u^\epsilon = \sum_{j=1}^N u^\epsilon(x_j)\psi_j$ interpolador de u^ϵ em $V_0^{h,\epsilon}$. Então existe uma constante c independente de ϵ , f , α e β tal que*

$$\|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{h}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Dem.: Note que

$$\begin{aligned} \alpha |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 &\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d}{dx} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) dx \\ &= - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \frac{d}{dx} \left[a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \right] dx \\ &= - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \frac{d}{dx} \left[a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} u^\epsilon \right] dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) f dx \leq \|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}. \end{aligned}$$

Mas a desigualdade de Poincaré nos dá que $\|v\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \leq ch|v|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}$ para todo $v \in H_0^1(x_{j-1}, x_j)$, e então

$$\alpha |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 \leq ch |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}.$$

Logo,

$$|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \leq c \frac{h}{\alpha} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}.$$

Para encontrar uma estimativa global, basta somar a desigualdade acima em todos os elementos

$$\|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{H^1(0,1)}^2 \leq ch^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}^2 = c \frac{h^2}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(0,1)}^2,$$

e tirando raízes dos dois lados da equação obtemos o resultado. \square

Observação 4.1 *A estimativa obtida no Teorema 4.1 é particular ao caso unidimensional. Em duas dimensões, a demonstração do Lema 4.2 tem que ser modificada pois $u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon$ não mais se anula no bordo dos elementos. O preço final a se pagar é uma estimativa que se comporta como h/ϵ , ou seja não é mais uniforme em ϵ como aqui.*

Caso II: $\epsilon \ll h$. Mesmo quando ϵ é pequeno em relação à malha, e o método de elementos finitos lineares não funciona a contento, os elementos finitos multiescala aproximam bem a solução exata. Abaixo apresentamos uma estimativa de erro. Para indicar uma constante que pode depender de α ou β , mas não de ϵ , h ou f , utilizamos a letra maiúscula C .

Teorema 4.2 *Seja $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ϵ solução de (2.15). Então existe uma constante C independente de ϵ e f tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\epsilon h^{-1/2} + h) \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Para estimar o erro de aproximação do presente método, temos que encontrar uma função em $V_0^{h,\epsilon}$ que aproxime u^ϵ para então aplicar o Lema de Cea (Lema 4.1). Nosso candidato é u_I , interpolador de u^0 em $V_0^{h,\epsilon}$. Note que no **Caso I** (quando $h \ll \epsilon$), tomamos como candidato o interpolador de u^ϵ , diferentemente do que fazemos agora.

Para entender porque este o método multiescala funciona a contento quando $\epsilon \ll h$, é necessário usar a expansão assintótica de u^ϵ . Isto é possível se calcularmos os primeiros termos da expansão assintótica assim como foi feito no

caso bidimensional (1.10), (1.11), (1.12). De fato, seja u^0 como em (2.17), e H solução de

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dH}{dy}(y) \right) &= \frac{da}{dy}(y) \quad \text{em } (0, 1), \\ H \text{ periódica com período } 1, \quad \int_0^1 H(y) dy &= 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Além disso, seja

$$u^1(x) = -H(x/\epsilon) \frac{du^0}{dx}(x). \tag{4.31}$$

e θ tal que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{d\theta}{dx}(x) \right) &= 0 \quad \text{em } (0, 1), \\ \theta(0) = u^1(0), \quad \theta(1) &= u^1(1). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Temos então o seguinte resultado, que é a versão unidimensional do Teorema 1.1.

Teorema 4.3 *Assuma que $f \in L^2(0, 1)$, e seja u^ϵ solução de (2.15). Sejam u^0 , u^1 e θ definidos por (2.17), (4.31) e (4.32) respectivamente. Então existe uma constante C independente de f e de ϵ tal que*

$$\|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C \epsilon \|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Hou, Wu e Cai [33] notaram que a expansão acima vale tanto para a solução exata como para os elementos da base de elementos finitos multiescala. Logo, para $i = 1, \dots, N$ a função ψ_i pode ser aproximada por $\psi_i^0 + \epsilon \psi_i^1 - \epsilon \theta_i$, onde

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi_i^0 = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

e $\psi_i^1 = H(x/\epsilon) d\psi_i^0/dx$. Finalmente

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{d\theta_i}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \theta_i(x_j) = \psi_i^1(x_j).$$

Observação 4.2 Note que $\psi_i^0 = \phi_i$ nada mais é que a função de base linear por partes.

Como acima, u_I pode ser aproximado por $u_I^0 + \epsilon u_I^1 - \epsilon \theta_I$, onde

$$u_I^0 = \sum_{i=1}^N u^0(x_i) \psi_i^0, \quad u_I^1 = H(x/\epsilon) du_I^0/dx.$$

Além disto,

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{d\theta_I}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \theta_I(x_j) = u_I^1(x_j).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - u_I\|_{H^1(0,1)} &\leq \|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(0,1)} + \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \\ &+ \epsilon \|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} + \epsilon \|\theta\|_{H^1(0,1)} + \epsilon \|\theta_I\|_{H^1(0,1)} + \|u_I - u_I^0 - \epsilon u_I^1 + \epsilon \theta_I\|_{H^1(0,1)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

A desigualdade

$$\|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon \|u^0\|_{H^2(0,1)} \quad (4.34)$$

é apresentada no Teorema 4.3. Já

$$\|u_I - u_I^0 - \epsilon u_I^1 + \epsilon \theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon \|u^0\|_{H^2(0,1)} \quad (4.35)$$

baseia-se no Teorema 4.3 e na estimativa $\|u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \leq C\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}$ (ver os detalhes em [33]). Para obter

$$\|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u^0\|_{H^2(0,1)}, \quad (4.36)$$

basta observar que u_I^0 é a interpolação de u^0 por funções lineares por partes. A seguir, usamos

$$\begin{aligned} \|u^1 - u_I^1\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} &= \left\| H(\cdot/\epsilon) \frac{d(u^0 - u_I^0)}{dx} \right\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \\ &\leq \epsilon^{-1} \left\| \frac{dH}{dx} \right\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} + \|H\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \\ &\leq C\epsilon^{-1} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} + C \|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}. \end{aligned}$$

Somando o quadrado da desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N + 1$ temos

$$\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} \leq C(\epsilon^{-1}h + 1) \|u^0\|_{H^2(0,1)}. \quad (4.37)$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{H^1(0,1)} &\leq C(|u^1(0)| + |u^1(1)|) \leq C \|H\|_{L^\infty(0,1)} \left(\left| \frac{du^0}{dx}(0) \right| + \left| \frac{du^0}{dx}(1) \right| \right) \\ &\leq C \|u^0\|_{H^2(0,1)}, \quad (4.38) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\theta_I\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 &\leq Ch^{-1} (|u_I^1(x_{j-1})| + |u_I^1(x_j)|)^2 \\ &\leq Ch^{-1} \|H\|_{L^\infty(0,1)}^2 \left(\left| \frac{du_I^0}{dx}(x_{j-1}) \right| + \left| \frac{du_I^0}{dx}(x_j) \right| \right)^2 \leq Ch^{-1} \|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}^2. \end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N + 1$, concluímos que

$$\|\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^{-1/2} \|u^0\|_{H^2(0,1)}. \quad (4.39)$$

Dem.: (do Teorema 4.2) Para obtermos a estimativa, basta juntar o resultado do Lema 4.1 e as desigualdades (4.33)–(4.39), e o resultado de regularidade (3.26). \square

Observação 4.3 A taxa de convergência do Teorema 4.2 é melhor que o que foi anunciado em [39], onde a convergência alegada é

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 h \|f\|_{L^2(0,1)} + C_2 (\epsilon/h)^{1/2}.$$

A diferença aparece nas estimativas de θ e θ_I , que é diferente em uma ou duas dimensões.

4.3 Comentários adicionais

Uma importante diferença entre uma e duas dimensões na técnica de elementos multiescala é que no caso bidimensional não é claro que condições de contorno deve-se impor nas arestas na definição das funções de base ψ_i , ver (4.28). Em uma dimensão este problema não existe, já que não existe aresta.

Uma primeira idéia no caso de elementos poligonais seria impor ψ_i sendo linear nas arestas. Porém esta imposição de condições de contorno nas arestas dos elementos causa o surgimento de camadas limites puramente numéricas no interior do domínio, ausentes na solução exata, fenômeno chamado de *ressonância*.

Nos artigos [32, 33] surge a interessante proposta de que as funções de base também deveriam satisfazer uma “restrição unidimensional” do operador diferencial que define a EDP, ao longo das arestas. Esta proposta é *ad hoc*, assim como a definição do que seja uma restrição unidimensional de um operador bidimensional, mas parece funcionar bem numericamente. A demonstração de convergência em [33] foi feita assumindo que as funções de base são lineares nas arestas.

Outra solução proposta em [32] para a *ressonância*, e analisada em [21] foi o uso de uma técnica de *oversampling*, o que torna o método não conforme.

Finalmente, em [34] aparece a proposta de se usar o método de Petrov–Galerkin a fim de diminuir ainda mais o efeito das camadas limites internas. O uso de Petrov–Galerkin para minimizar efeitos de camadas limites espúrias foi

em proposto independentemente em [24].

Para problemas elíticos não lineares, os autores de [22, 20] propõem e analisam um método de homogenização numérica. Através de técnicas de *G-convergência*, os autores provam que seu esquema converge (a menos de uma subsequência). Eles reescrevem suas propostas usando uma formulação de Petrov-Galerkin, e funções num espaço não linear. Torna-se claro então que seu método, denominado *nonlinear multiscale finite element method* (NMsFEM) é uma generalização do MsFEM de Hou e Wu [32].

5 Métodos alternativos

Outros métodos baseados em elementos finitos vêm sendo propostos recentemente na literatura. Apresentamos aqui alguns deles, com uma pequena lista de referências.

Nos métodos descritos abaixo consideramos o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como sendo um polígono convexo. Neste domínio definimos uma partição regular de Ω em elementos finitos $\mathcal{T}_h = \{K\}$. O tamanho da malha h é definido como o diâmetro máximo de todos elementos da partição. Definimos ainda $V_1 \subset H_0^1(\Omega)$ como sendo o espaço das funções lineares por partes em relação à partição \mathcal{T}_h .

5.1 Residual Free Bubbles (RFB)

A fim de tratar problemas com múltiplas escalas de forma sistemática, o método de *Residual-Free Bubbles* (RFB) foi proposto em [8, 23, 26, 25, 27, 28]. A motivação é que funções polinomiais por partes não são capazes de capturar os efeitos das pequenas escalas, e portanto o espaço de elementos finitos é enriquecido com “bolhas”, que são funções de $H_0^1(\Omega)$ que se anulam na fronteira de cada elemento. Através de um formalismo, conclui-se que as “bolhas” resolvem a equação diferencial em cada elemento, onde o lado direito destes problemas

vem do resíduo devido à parte polinomial da solução numérica. Na prática, estas soluções locais são calculadas de forma exata ou aproximada. A seguir apresentamos de forma breve o método RFB. Ver também [31], onde o método é descrito.

Em geral, para problemas com múltiplas escalas, é possível decompor a solução como

$$u_{\text{solução}} = u_{\text{macro}} + u_{\text{micro}},$$

onde u_{macro} descreve o comportamento macroscópico da solução, e u_{micro} o comportamento microscópico. No método RFB, a decomposição é

$$u_{\text{RFB}} = u_{\text{linear}} + u_b,$$

onde u_{linear} é a parte linear por partes, e a “bolha” u_b captura informações sobre a microescala.

Como exemplo consideramos o problema (1.1) e sua correspondente formulação fraca: achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$b(u, v) = (f, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

onde $b(u, v) = \int_{\Omega} a^\epsilon \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$. Definimos ainda \mathcal{L}^ϵ como em (1.3). Para definir o método, não é necessário assumir que a^ϵ seja periódica.

Seja o *espaço enriquecido* $V_h := V_1 \oplus B$, onde

$$B = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \in H_0^1(K) \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h\}$$

é o espaço das “bolhas”. O método consiste em achar $u_h \in V_h$ onde

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h.$$

Escrevendo $u_h = u_1 + u_b$, onde $u_1 \in V_1$ e $u_b \in B$ temos

$$a(u_1 + u_b, v_1) = (f, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1, \quad (5.40)$$

$$a(u_1 + u_b, v_b) = (f, v_b) \quad \text{para todo } v_b \in B. \quad (5.41)$$

Tomando em (5.41) funções teste v_b com suporte em um elemento arbitrário K , e integrando por partes, temos que u_b é solução forte do problema local

$$\mathcal{L}^\epsilon u_b = -\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f \quad \text{em } K, \quad u_b = 0 \quad \text{sobre } \partial K.$$

para todo elemento K . Escrevendo $u_b = T(-\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f)$, substituindo em (5.40), e usando a linearidade do problema, a formulação final é: achar $u_1 \in V_1$ onde

$$a(u_1, v_1) - a(T\mathcal{L}^\epsilon u_1, v_1) = (f, v_1) - a(Tf, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1.$$

Uma primeira forma de se interpretar a formulação acima é como um *método estabilizado livre de parâmetros*:

Uma outra forma é se olhar como uma técnica de “upscaling” numérico: achar $u_1 \in V_1$ onde

$$a^*(u_1, v_1) = \langle f^*, v_1 \rangle \quad \text{para todo } v_1 \in V_1,$$

e $a^*(u_1, v_1) = a((I - T\mathcal{L}^\epsilon)u_1, v_1)$, e $\langle f^*, v_1 \rangle = (f, v_1) - a(Tf, v_1)$. Na interpretação multiescala, V_1 é o espaço macro, enxerga apenas as propriedades “macro”, e B é o espaço micro, capturando o efeito das pequenas escalas.

Finalmente, é possível ver esta formulação “quase” como um método de Petrov–Galerkin. Se $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ é uma base de V_1 e $u_1 = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$, então

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\lambda_i, \phi_j) = (f, \phi_j) - a(Tf, \phi_j) \quad \text{para } j = 1, \dots, N,$$

onde $\lambda_i = (I - T\mathcal{L}^\epsilon)\phi_i$, i.e.,

$$\mathcal{L}^\epsilon \lambda_i = 0 \quad \text{em } K, \quad \lambda_i = \phi_i \quad \text{sobre } \partial K,$$

As funções de base do espaço das funções admissíveis resolvem o operador localmente, e as funções teste continuam as mesmas.

Recentemente, Sangalli [43] aplicou a idéia de RFB em problemas com coeficientes oscilatórios com excelentes resultados.

5.2 Heterogeneous Multiscale Method (HMM)

Uma proposta diferente é o *heterogeneous multiscale method* (HMM) descrita em [13, 14, 15, 16, 18, 17, 19, 40]. Damos uma breve descrição do método considerando mais uma vez o problema (1.1). Se existir matriz efetiva A que incorpore os efeitos das microescalas, a forma bilinear

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \quad \text{para } V, W \in V_1,$$

seria adequada para se buscar uma aproximação para a solução original. Considerando para um elemento $K \in \mathcal{T}_h$ a quadratura

$$\int_K p(x) \, dx \approx \sum_{l=1}^L w_l p(x_l),$$

temos então

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \approx \sum_{l=1}^L w_l [(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l).$$

Aproximamos $[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l)$ da seguinte forma. Considere $I_\delta(x_l)$ o quadrado de tamanho δ centrado em x_l , e, dado $V \in V_1$ ache $v_l = R(V)$ tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a^\epsilon(x) \nabla v_l(x)] &= 0 \quad \text{em } I_\delta(x_l), \\ v_l &= V \quad \text{sobre } \partial I_\delta(x_l). \end{aligned}$$

Tome então

$$[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l) \approx \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta(x_l)} [a^\epsilon(x) \nabla v_l(x)] \cdot \nabla w_l(x) \, dx,$$

onde $v_l = R(V)$ e $w_l = R(W)$.

Observação 5.1 *A escolha de δ depende do problema em questão. Por exemplo, para problemas periódicos, δ pode ser o próprio período. As condições de contorno para se definir o operador $R(\cdot)$ também podem ser mudadas para, por exemplo, $V - R(V)$ periódico em $I_\delta(x_l)$.*

No caso periódico, o erro de aproximação é dado por

$$\|U - U_{HMM}\|_{H^1(D)} \leq C(h + \epsilon),$$

desde que o problema de célula seja escolhido apropriadamente.

5.3 Comentários adicionais

O uso de soluções exatas ou aproximadas para construir os espaços variacionais com em [5, 6, 7, 32, 33] não é simples, já que pode ser complicado escolher o espaço “correto” para um determinado problema. Uma interessante comparação mostrando como diferentes escolhas de espaços influenciam as taxas de convergência para um problema de advecção unidimensional pode ser encontrado em [30].

O formalismo do método RFB serve como “guia” para definição dos espaços variacionais. Por outro lado, a construção via RFB também introduz camadas limites espúrias no interior do domínio; assumir que a bolha se anula nas arestas é a causa. Sangalli [43] minimizou este efeito indesejável introduzindo *macro-bolhas*, encarecendo entretanto as soluções dos problemas locais.

O HMM parece uma alternativa viável, tendo inclusive a vantagem de definir problemas locais independentes da pequena escala, ao contrário do MsFEM e do RFB.

Para problemas com coeficientes periódicos, Versieux e Sarkis [44, 45] propõem um eficiente método numérico baseado em aproximações dos termos da expansão assintótica da solução. O custo computacional resulta também independente de ϵ .

Referências

- [1] G. Allaire, Shape optimization by the homogenization method, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Vol. 146, 2002.
- [2] G. Allaire, Homogenization and porous media. *Interdisciplinary Applied Mathematics* (Ulrich Hornung, ed.), Springer-Verlag, 225–247, Vol. 6, 1997.
- [3] K. Atkinson and W. Han, *Theoretical numerical analysis*, Second edition, Springer, New York, 2005. MR2153422.
- [4] Axelsson, and V. A. Barker, *Finite element solution of boundary value problems*, Reprint of the 1984 original, SIAM, Philadelphia, PA, 2001. MR1856818 (2002g:65001)
- [5] I. Babuška, G. Caloz, J.E. Osborn, special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients, *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:945–981, No. 4, 1994.
- [6] I. Babuška, J.E. Osborn, Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20:510–536, No. 3, 1983.
- [7] I. Babuška, J.E. Osborn, Finite Element Methods for the solution of problems with rough input data, *Singularities and constructive methods for their treatment*, (P. Grisvard and W. Wendland and J.R. Whiteman, eds.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1121, Springer-Verlag, 1–18, 1985
- [8] F. Brezzi, A. Russo, Choosing bubbles for advection-diffusion problems, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4:571–587, No. 4, 1994.
- [9] D. Cioranescu, P. Donato, An introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in mathematics and its Applications, Vol. 17, 1999.

- [10] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam], SIAM, Philadelphia, PA, 2002. MR1930132
- [11] A.L.G.A. Coutinho, C.M. Dias, J.L.D. Alves, A.F.D. Loula, S.M.C. Malta, L. Landau, R.S. de Castro, E.L.M. Garcia, Stabilized Methods and Post-Processing Techniques for Miscible Displacement Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1421–1436, 2004.
- [12] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 2*, Translated from the French by Ian N. Sneddon, Springer, Berlin, 1988. MR0969367 (89m:00001)
- [13] W. E, B. Engquist, Multiscale modeling and computation, *Notices of the American Mathematical Society*, 50:1062–1070, No. 9. 2003.
- [14] W. E, B. Engquist, The heterogeneous Multiscale Methods, *Comm. Math. Sci.*, 1:87–132, No. 1, 2003.
- [15] W. E, B. Engquist, The heterogeneous Multiscale Method for Homogenization Problems, *preprint*.
- [16] W. E, B. Engquist, Z. Huang, Heterogeneous Multiscale Method: a general methodology for multiscale modeling, *Physical Review B* 67, 2003.
- [17] W. E, X. Li, E. Vanden-Eijnden, Some Recent Progress in Multiscale Modeling, *preprint*.
- [18] W. E, P. Ming, Analysis of Multiscale methods, *Journal of Computational Mathematics* 22:210–219, No. 2, 2004.
- [19] W. E, P. Ming, P. Zhang, Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems, *preprint*.

- [20] Y. Efendiev, T. Hou and V. Ginting, Multiscale finite element methods for nonlinear partial differential equations, *Communications in Mathematical Sciences*, accepted.
- [21] Y. Efendiev, T. Hou, X. Wu, Convergence of a nonconformal multiscale finite element method, *SIAM-J.-Numer.-Anal.*, 37:888–910, 2000.
- [22] Y. Efendiev, A. Pankov, Numerical Homogenization of Monotone Elliptic Eperators, *Multiscale Model. Simul.* 2:62–79, No. 1, 2003.
- [23] L.P. Franca, C. Farhat, A.P. Macedo, M. Lesoinne, Residual-free bubbles for the Helmholtz equation, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 40:4003–4009, No. 21, 1997.
- [24] L.P. Franca, A.L. Madureira, F.Valentin, Towards Multiscale Functions: Enriching Finite Element Spaces with Local but not Bubble-Like Functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (CMAME)*, accepted for publication.
- [25] L.P. Franca, A. Russo, Deriving upwinding, mass lumping and selective reduced integration by residual-free bubbles, *Appl. Math. Lett.* 9:83–88, No. 5, 1996.
- [26] L.P. Franca, A. Russo, Approximation of the Stokes problem by residual-free macro bubbles, *East-West J. Numer. Math.* 4:265–278, No. 4, 1996.
- [27] L.P. Franca, A. Russo, Mass lumping emanating from residual-free bubbles, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 142:353–360, No. 3-4, 1997.
- [28] L.P. Franca, A. Russo, Unlocking with residual-free bubbles, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 142:361–364, No. 3-4, 1997.
- [29] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, *Classics in mathematics*, Springer, 2001.

- [30] P.P.N. de Groen, P.W. Hemker, Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems, *Numerical Analysis of Singular Perturbations*, (P.W. Hemker and J.J.H. Miller, eds.), Academic Press, 217–249, 1979
- [31] T. Hou, Numerical Approximation to Multiscale Solutions in PDEs, *Frontiers in numerical analysis : Durham 2002*, (James F. Blowey, Alan W. Craig, Tony Shardlow, eds.), Springer, 241–302, 2003
- [32] T.Y. Hou, X.H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, *JCP*, 134:169-189, 1997
- [33] T.Y. Hou, X.H. Wu, Z. Cai, Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients, *Math. Comp.*, Vol. 68, 227:913–943, 1999
- [34] T.Y. Hou, X.-H. Wu, Y. Zhang, Removing the Cell Resonance Error in the Multiscale Finite Element Method via a Petrove-Galerkin Formulation, *Comm. Math. Sci.*, 2:185–205, No.2, 2004.
- [35] C. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [36] R. Lakes, Página pessoal, <http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/home.html>
- [37] J.-L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, Translated from the French by P. Kenneth, Springer, New York, 1972. MR0350177 (50 #2670)
- [38] A.L. Madureira, Métodos numéricos para Problemas com Múltiplas Escalas I Escola em modelagem Computacional (Márcio A. Murad, Felipe Pereira, Hélio Amaral Souto, Manuel Cruz, Gastão Braga, eds.), LNCC, 2005.

- [39] S. Moskow and M. Vogelius, First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 127A:1263–1299, 1997
- [40] P.B. Ming, X. Yue, Numerical Methods for Multiscale Elliptic Problems, *preprint*, 2003.
- [41] F.A. Rochinha, A.L. Madureira, Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas, Notas em Matemática Aplicada, Vol. 12, SBMAC, 2004.
- [42] H. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, Numerical methods for singularly perturbed differential equations, Springer, 1991.
- [43] G. Sangalli, Capturing small scales in elliptic problems using a Residual-Free Bubbles Finite Element Method, *Multiscale Modeling and Simulation: A SIAM Interdisciplinary Journal*, Vol. 1, No. 3:485-503, 2003.
- [44] H. Versieux and M. Sarkis, Numerical boundary corrector for elliptic equations, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2005. To appear.
- [45] H. Versieux and M. Sarkis, A three-scale finite element method for elliptic equations with rapidly oscillating periodic coefficients, *Proceedings of the 16th International Conference on Domain Decomposition Methods*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer Verlag, 2005. To appear.