

Processamento Digital de Sinais para Análise Tempo-Frequência

Aplicações em Áudio e Geociência

Paulo A. A. Esquef¹, Guilherme S. Welter² e Rafael A. de Mattos³

¹Coordenação de Sistemas e Controle
Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)

²PCI-LNCC

³Pós-LNCC

30.01 a 03.02.2012 / Programa de Verão do LNCC



Sumário

- 1 Introdução
 - Motivação
 - Definições Importantes
- 2 Representação Frequencial de Sinais
 - Representações de Fourier
- 3 Amostragem de Sinais Contínuos
 - Definições Elementares
 - Formalização Matemática
 - Interpretação Gráfica
 - Conversão Digital-Analógica
 - Critério de Nyquist
- 4 Transformada- \mathcal{Z}
 - Definição e Propriedades
 - Relação com Modelos MA e AR
- 5 ATF via Métodos Não-Paramétricos
 - Short-Time Fourier Transform (STFT)
- 6 ATF via Métodos Não-Paramétricos







Análise de Sinais

De que se trata?

- **Sinal**: em geral, **função** de diversas variáveis
 - Ênfase: sinais não-estacionários no **tempo**
- **Análise** de sinal: estudo e caracterização de suas propriedades e/ou decomposição em componentes elementares (simples)
 - Domínios de interesse: no tempo, na frequência ou conjuntamente em tempo-frequência
 - Métodos: não-paramétricos (expansão em bases) e paramétricos (envolve modelo gerador subjacente)

Análise de Sinais no Domínio Tempo-Frequência

Motivação

- Sinais de interesse prático são **não-estacionários**
 - Características espectrais (conteúdo frequencial) mudam ao longo do tempo (ou domínio de interesse)
- **Análise Tempo-Frequência:** permite rastrear a evolução do conteúdo espectral ao longo do tempo
- **Exemplo:** Espectros de uma varredura senoidal vs de ruído branco Gaussiano
 - Varredura Senoidal (0 a 4 kHz)   
 - Ruído branco Gaussiano (0 a 4 kHz)   

Funções Trigonométricas

- $\cos(\varphi)$, $\text{sen}(\varphi)$, $e^{j\varphi}$
 - φ é ângulo, expresso em radiano ou grau.
 - $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.
 - O argumento φ pode variar com o tempo.
Ex.: $s(t) = \cos(\varphi(t))$.
 - A função $\varphi(t)$ é chamada de fase.
Ex. $\varphi(t) = \omega t$ (fase linear).
- **Identidade de Euler: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\text{sen}(\varphi)$.**
 - $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$.
 - $\text{sen}(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$.

Frequência em Sinais Senoidais

- É número de períodos (ciclos de oscilação) por unidade de tempo.
- Taxa de variação da fase em relação ao tempo.
- Unidades: Hz ou rad/s
- 1 Hertz = 1 ciclo por segundo
- $\omega_{\text{rad/s}} = 2\pi f_{\text{Hz}}$
- $s(t) = \cos(\omega t)$, com fase em rad: ω é frequência em rad/s.

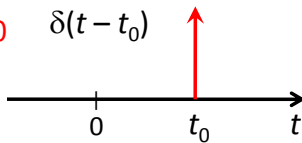
“Funções” Delta

Dirac e Kronecker

- Delta de Dirac ($t \in \mathbb{R}$)

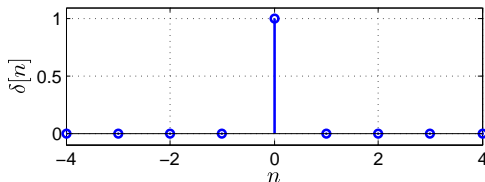
$$\delta(t-t_0) = 0, \text{ para } (t-t_0) \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$



- Delta de Kronecker ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Convolução Linear

Casos contínuo e discreto

- Caso Contínuo

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

- Caso Discreto

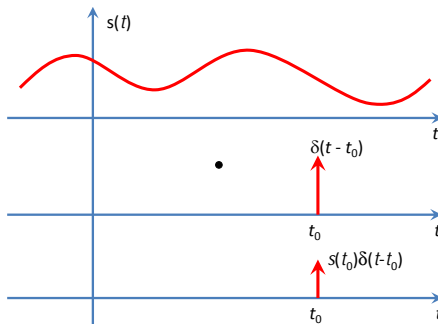
$$(g * f)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] f[n - k]$$

Multiplicação com Delta

Amostragem ou Peneiragem

- Multiplicação com Delta (Amostragem)

$$s(t)\delta(t - t_0) = s(t_0)\delta(t - t_0)$$

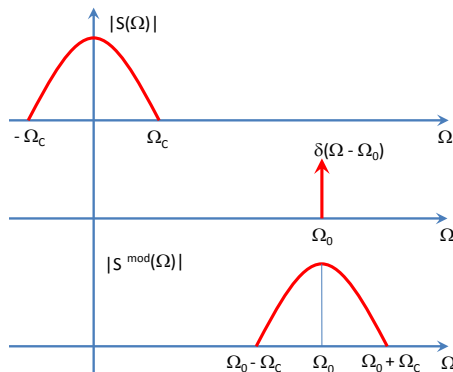


Convolução com Delta

Deslocamento

- Convolução com Delta (Deslocamento)

$$S(\Omega) * \delta(\Omega - \Omega_0) = S(\Omega - \Omega_0)$$



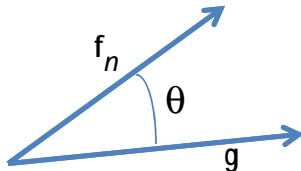
Convolução como Projeção

Caso Discreto

- $(g * f)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]f[n - k]$
- Vetorialmente (fazendo $\hat{f}[n] = f[-n]$)

$$(g * \hat{f})[n] = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_n \rangle = \|\mathbf{g}\| \|\mathbf{f}_n\| \cos(\theta)$$

- Graficamente



Representação Espectral (Fourier)

Visão Intuitiva

- **Objetivo:** Saber das frequências presentes em $s(t)$.
- **Proposição de Fourier:** Projetar $s(t)$ sobre uma função $\phi(t)$ que só possua uma única frequência.
- **Escolha conveniente:** $\phi(t) = e^{j\omega_0 t}$
- Formulação (Análise)

$$S(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

- $|S(\omega_0)| \neq 0$ indica da presença $e^{j\omega_0 t}$ em $s(t)$.
- Avaliando $S(\omega_0)$ para $-\infty \leq \omega_0 \leq \infty$ obtém-se a caracterização frequencial por todo o espectro.

Representações de Fourier

CTFT – Formalização no Tempo Contínuo, $t \in \mathbb{R}$

- **Equação de Síntese**

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- **Equação de Análise**

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- $S(\Omega)$ é uma função complexa, i.e., $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, logo, tem módulo e fase

Representações Espectral (Fourier)

Funções Senoidais

- **Estudo de Caso:** $s(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos((\omega_0 - \omega)t) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} \sin((\omega_0 - \omega)t) dt$$

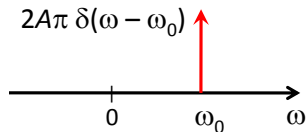
$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_0 \neq \omega \\ \infty, & \omega_0 = \omega \end{cases}$$

Representações Espectral (Fourier)

Funções Senoidais

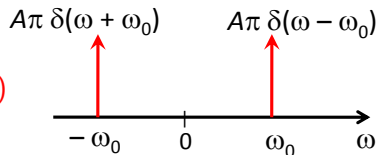
- $s(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ tem espectro

$$S(\omega) = 2A\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



- $s(t) = A\cos(\omega_0 t)$ tem espectro

$$S(\omega) = A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



Representações de Fourier

CTFT – Três Propriedades Úteis

- **Convolução no tempo:** $s_1(t) * s_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_1(\omega) S_2(\omega)$
- **Multiplicação no tempo:** $s_1(t) s_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_1(\omega) * S_2(\omega)$
- **Modulação:** $e^{j\omega_0 t} s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(\omega - \omega_0)$

Representações de Fourier

DTFT – Formalização no Tempo Discreto $n \in \mathbb{Z}$

- **Equação de Síntese**

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- **Equação de Análise**

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n}$$

- $S(\omega)$ é uma função complexa, i.e., $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$
- $S(\omega)$ é uma função **PERIÓDICA** (com período 2π rad/amostra)

Representações de Fourier

Observações

- Propriedades da CTFT são similares às da DTFT
- **Sinais Periódicos:** $s(t) = s(t + T_0)$ ou $s[n] = s[n + N_0]$
 - Representação via a chamada **SÉRIE de Fourier**
 - Espectros $S(\omega)$ de sinais periódicos: combinação linear de deltas de Dirac centrados em múltiplos inteiros da frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_0$
 - Basta conhecer ω_0 e as áreas dos deltas (proporcionais aos coeficientes c_k da Série de Fourier)
- Equação de síntese (tempo contínuo):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

Representações de Fourier

Mais Observações

- Interpretação da Equação de Síntese (sinais periódicos):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

- Expansão (representação ou decomposição ou análise) de $s(t)$ em termos mais simples $\phi_k(t)$ (exponenciais complexas)
- Nesse caso: as funções $\phi_k(t)$ são ortogonais
 $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = 0, \forall i \neq j$, i.e., formam uma base
- Outras expansões ou transformações (Taylor, DCT, Wavelets, Karhunen-Loève, etc.) usam abordagens similares: mudam os $\phi_k(t)$ e c_k .

Representações de Fourier

Tratamento Computacional

- **Computador: não processa sinais contínuos**, mas sequência de números (conjunto enumerável)
- Espectro de sinais periódicos: **a representação em Série de Fourier viabiliza a manipulação computacional**
- Em geral, uma sequência $s[n]$ tem DTFT ou espectro $S(\omega)$ contínuo e periódico com 2π rad/amostra.
 - Algum processo de discretização de $S(\omega)$ se faz necessário para viabilizar processamento computacional no domínio espectral

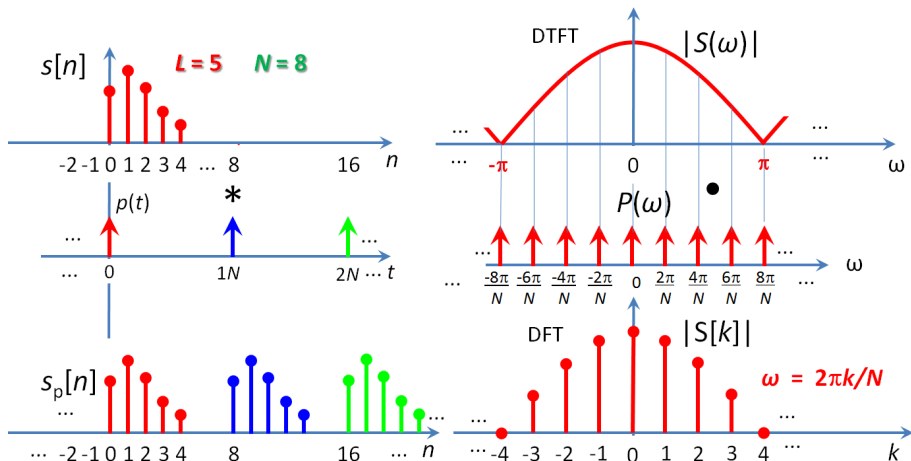
Representações de Fourier

DFT – Discrete Fourier Transform

- Sequências $s[n]$ com **Suporte Finito** (duração finita de L) amostras podem ser feitos artificialmente periódicos com período $N \geq L$
- Pode-se construir $s_p[n] = \sum_i s[n + iN]$
- $s_p[n]$ admite espectro por Série de Fourier e, logo, tratamento computacional na frequência
- Espectro de $s_p[n]$: amostragem de um período (intervalo de 2π rad/amostra) de $S(\omega)$ em N partes iguais.
- Amostragem da DTFT em N partes iguais: DFT_N de N pontos
- DFT_N : $S[k] = S(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$, com $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Representações de Fourier

DTFT vs DFT – Interpretação Gráfica



Representações de Fourier

FFT – Fast Fourier Transform

- **FFT:** Família de algoritmos rápidos para computar a DFT_N de uma sequência de duração finita
- **Restrição:** $N = 2^m$
- Economia computacional (em termos de multiplicações complexas)
 - $DFT_N: \mathcal{O}(N^2)$
 - $FFT_N: \mathcal{O}\left(\frac{N}{2} \log_2 N\right)$

Amostragem Uniforme de Sinais Contínuos

Caso Unidimensional

- **Sinal Analógico:** domínio e contra-domínio contínuos (definidos em \mathbb{R})
- **Sinal Digital:** domínio e contra-domínio discretos (conjunto enumerável de valores)
- **Sinal Discreto:** domínio em \mathbb{Z} e contra-domínio em \mathbb{R} (sem quantização da imagem)
- **Conversor Analógico-Digital (A/D):** realiza a conversão de um sinal analógico para um sinal digital
 - Discretização do domínio: Amostragem
 - Discretização do contra-domínio (imagem): Quantização
- **Conversor Digital-Analógico (D/A):** reconstrói um sinal analógico a partir de um sinal digital

Amostragem Uniforme de Sinais Reais Contínuos

Formalização para o Caso Unidimensional

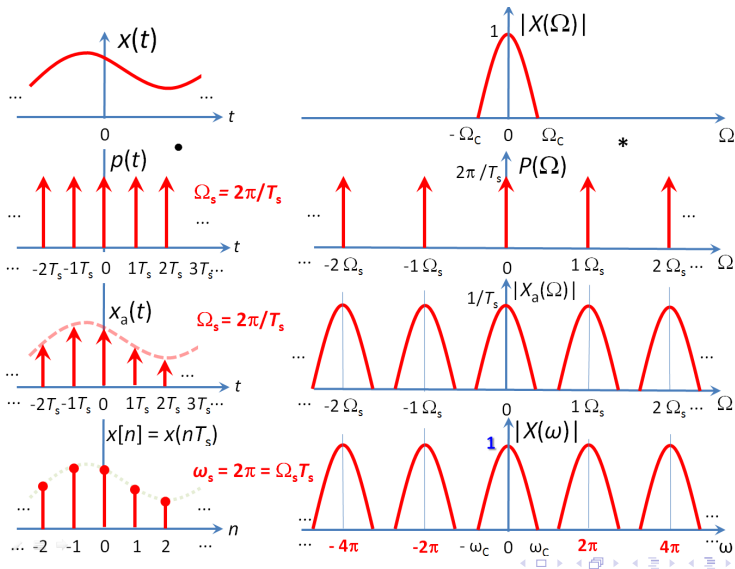
- Para um dado período T de amostragem e $n \in \mathbb{Z}$

$$x[n] = x(t)|_{t=nT}$$

- Sob que condições pode-se garantir a recuperação sem perdas de $x(t)$ a partir de $x[n]$?
 - **Teorema da Amostragem** oferece a resposta
 - Fundamentação do Teorema da Amostragem: Efeito espectral do processo de amostragem

Amostragem Ideal

Multiplicação de $x(t)$ por um Trem de Impulsos Periódico: $x_a(t) = x(t)p(t)$



Amostragem Ideal

Efeitos Espectrais

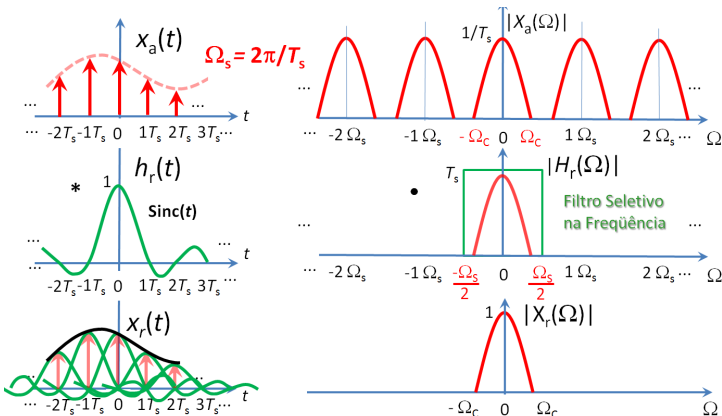
- $X_a(\Omega)$ é constituído por réplicas de $X(\Omega)$ centradas em múltiplos inteiros Ω_s
- Espectro do sinal amostrado é **Periódico** com período $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$
- Como o espectro de sequências tem período 2π rad/amostra, realiza-se um escalamento no eixo de frequências para levar $\Omega_s \rightarrow \omega_s = 2\pi$ rad/amostra

Reconstrução de $x(t)$ a partir de $x[n]$

Interpretação Espectral





Dois estágios:

- Filtragem Seletiva Analógica Ideal: para selecionar apenas um período de $X(\omega)$, centrado em $\omega = 0$
- Escalamento frequencial: para levar $\omega_s \rightarrow \Omega_s$ rad/s



Garantia de Reconstrução Perfeita

Critério de Nyquist em Condições Ideais

- $x(t)$ tem que ser limitado em banda, i.e., $X(\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_c$
- $\Omega_s \geq 2\Omega_c$: Critério de Nyquist (CN)
- Na prática:
 - Evitar o limite mínimo do CN para compensar a não-idealidade dos processos de amostragem (A/D) e reconstrução (D/A)
 - Sistema de amostragem (A/D) com Ω_s inclui um filtro passa-baixas analógico real com frequência de corte $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2}$
- **Violação do CN produz Aliasing** (sobreposição das réplicas espectrais) e a reconstrução perfeita de $x(t)$ é perdida
- Exemplo: Voz (freq. até 8 kHz) + componente FM em 17,5 kHz
 - Amostragem com 48 kHz (máx. freq. representável 24 kHz)  
 - Amostragem com 16 kHz (máx. freq. representável 8 kHz)  
 - A componente em 17,5 kHz vai aparecer centrada em $|8,0 - (17,5 - 8,0)| \text{ kHz} = 1,5 \text{ kHz}$

Transformada- \mathcal{Z}

Definição

- Generalização da DTFT (espectro de Fourier de sequências)
- Projeção de $s[n]$ sobre a função $\phi_{r,\omega}[n] = (re^{j\omega})^n$, com $r \geq 0 \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$
- Para DTFT particulariza-se para $r = 1$ (circunferência unitária)
- Por simplicidade notacional, faz-se $z = re^{j\omega}$, que varre todo o plano complexo
- **Definição:**

$$s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]z^{-n}$$

- $S(z)$ é uma Série de termos complexos (Laurent): $S : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$
- $S(z)$ nem sempre converge
- Quando $S(z)$ converge a região de convergência é tipicamente em um anel centrado na origem do plano complexo

Propriedades e Pares $s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z)$ Úteis

- $s[n] = \delta[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z) = z^{-n_0}$
- Para $n \geq 0$, $s[n] = a^n \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, convergente em $|z| > |a|$
- **Linearidade:** $as_1[n] + bs_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} aS_1(z) + bS_2(z)$
- **Convolução no tempo:** $(s_1 * s_2)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S_1(z)S_2(z)$
- **Modulação:** $z_0^n s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S\left(\frac{z}{z_0}\right)$
- Em geral, $S(z)$ pode ser escrita como uma razão de polinômios em z : $S(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

Transformada- \mathcal{Z} e Modelos MA

- Visão de sistemas lineares: entrada $x[n]$ e saída $y[n]$
- Modelo MA (*Moving-Average*) de ordem M :

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

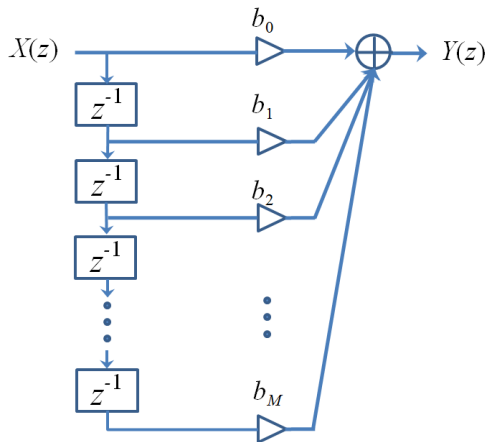
- Interpretação: $y[n]$ no instante presente n é uma média ponderada (por b_m) da amostra atual e M amostras imediatamente anteriores da entrada $x[n]$
- Transformada- \mathcal{Z} : $Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}) X(z) = B(z) X(z)$$

Transformada- \mathcal{Z} e Modelos MA

- Representação por Diagrama de Blocos

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})X(z)$$



Transformada- \mathcal{Z} e Modelos AR

- Modelo AR (*Auto-Regressive*) de ordem N :

$$y[n] = \sum_{k=1}^N -a_k y[n-k]$$

- Interpretação: $y[n]$ no instante presente n é uma média ponderada (por $-a_k$) de N amostras imediatamente anteriores da própria saída
- Transformada- \mathcal{Z} : $Y(z) = \sum_{k=1}^N -a_k z^{-k} Y(z)$

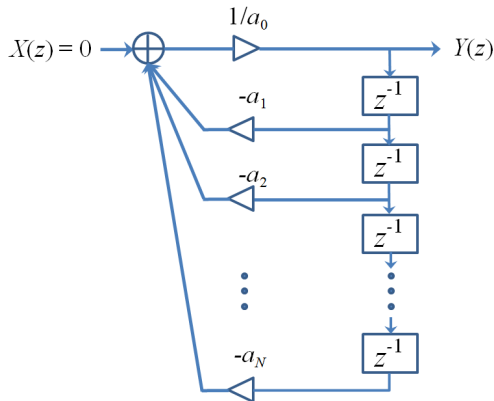
$$Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = 1 \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{A(z)}$$

- $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$

Transformada- \mathcal{Z} e Modelos AR

- Representação por Diagrama de Blocos ($a_0 = 1$)

$$Y(z) = \left(-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N} \right) Y(z)$$



Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA

- Modelo ARMA (*Auto-Regressive*) de ordem $\max\{N, M\}$:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N -a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

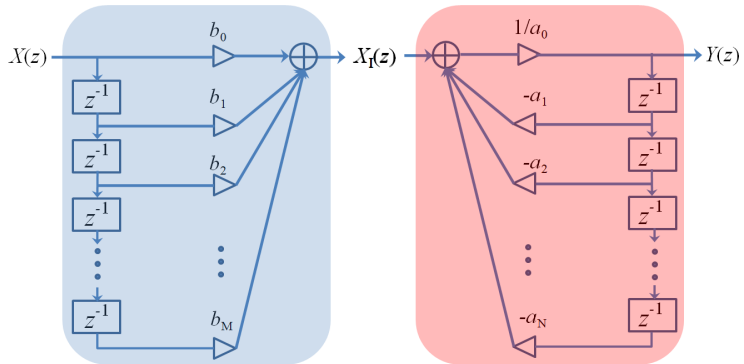
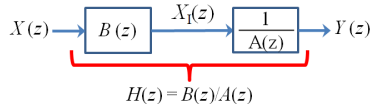
- Transformada- \mathcal{Z} (TZ):

$$Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

- Razão Entrada-Saída: $\frac{Y(z)}{X(z)} \triangleq H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$
- $H(z)$ é chamada de Função de Transferência do sistema ARMA

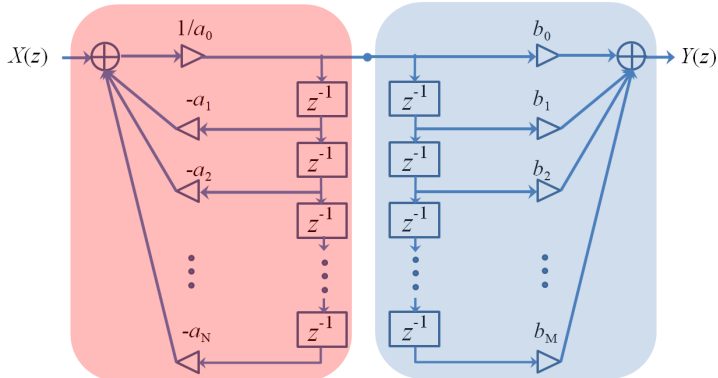
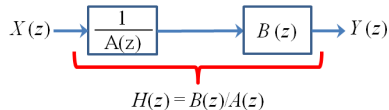
Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA de Ordem $N = M$

- Representação por diagrama de blocos: $H(z) = B(z) \frac{1}{A(z)}$



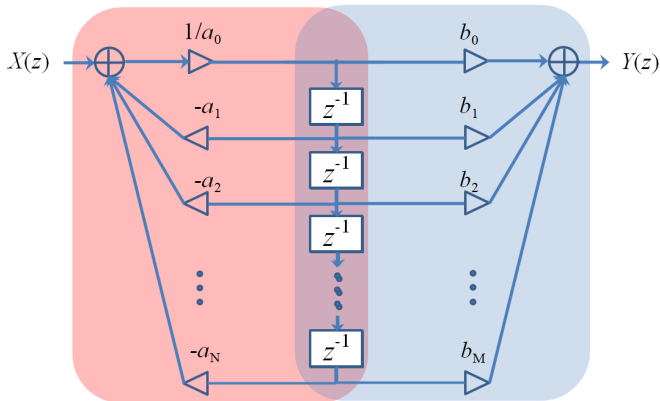
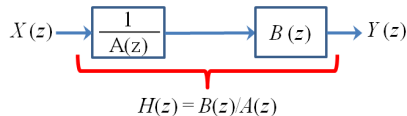
Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA de Ordem $N = M$

- Representação por diagrama de blocos: $H(z) = \frac{1}{A(z)} B(z)$



Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA de Ordem $N = M$

- Representação por diagrama de blocos: $H(z) = \frac{1}{A(z)} B(z)$




Transformada- \mathcal{Z} de $s[n]$ e Seu Espectro $S(\omega)$

- $S(\omega) = S(z)|_{z=e^{j\omega}}$: Avaliação de $S(z)$ sobre a circunferência unitária
- Para uma $S(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ qualquer
 - Raízes de $B(z)$: ZEROS da TZ
 - Raízes de $A(z)$: PÓLOS da TZ
 - A localização dos pólos e zeros de $S(z)$ em relação à circunferência unitária define o espectro $S(\omega)$
 - Pólos próximos à circunferência unitária: picos espectrais no entorno das fases dos pólos
 - Zeros próximos à circunferência unitária: vales espectrais no entorno das fases dos zeros

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Motivação

● Motivação

- Problema: Análise de Sinais Não-estacionários: características espectrais variantes no tempo
- Análise de Fourier captura todo o conteúdo espectral do sinal ocorrido no intervalo temporal sob consideração
- Exemplo: três tons sequenciais 
- **Questão: Como rastrear o comportamento espectral ao longo do tempo?**

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Procedimento para sinais em tempo discreto

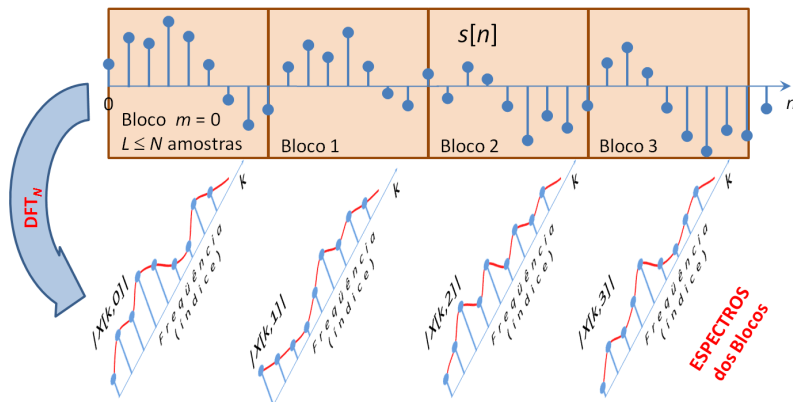
● Espectrograma: Procedimento Básico

- Segmentação temporal de $s[n]$ em trechos curtos de N amostras
 - $x_m[n] = s[n + mN]$, com $n = 0, 1, \dots, N - 1$ (nos quais se assume valer a estacionariedade)
- Cálculo do espectro de Fourier $X[k, m]$, i.e., $\text{DFT}_N\{x_m[n]\}$
 - $k \in \mathbb{Z}$ é o índice da frequência ($2\pi k/N$) e $m \in \mathbb{Z}$ é o índice do bloco (tempo)
- Organização de $|X[k, m]|$ em uma matriz
 - Visualização de $|X[k, m]|$ como imagem: a magnitude é mapeada em escala colorida ou de níveis de cinza

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Ilustração




● Graficamente



Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Efeito do Janelamento

● Efeito do Janelamento

- $x_0[n] = s[n]w[n]$, com $w[n] = 1$, para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, sendo nula caso contrário
- No domínio espectral: $X[k, 0] = S[k] * W[k]$
 - O espectro da janela é convoluido com o espectro original $S[k]$
- Janelamento no tempo \Rightarrow Espalhamento espectral
 - Redução da capacidade de **RESOLVER** componentes espectrais
- Exemplos
 - Espectros da janela retangular 
 - Cossenóide janelada 
 - Duas cossenóides janeladas 




Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Variações do Procedimento

- **Segmentação temporal com blocos justapostos ou sobrepostos**

- Sobreposição (avanço da janela) permite controlar a resolução temporal no plano TF
- Avanços pequenos no tempo
 - Maior resolução temporal
 - Mais blocos para computar o espectro
 - Maior custo computacional

- **Tipos de janelas: Retangular, Hanning, Hamming, etc**

- Balanço: largura do lóbulo principal vs altura dos laterais 
 - Largura do lóbulo principal: afeta a capacidade de resolver componentes próximas na frequência
 - Magnitude dos lóbulos laterais: afeta a capacidade de visualização de componentes de baixa intensidade  

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)








Variações do Procedimento

- **Tamanho do bloco em relação ao tamanho da DFT**

- DFT_N via FFT: $N = 2^p$
- Em geral: $N_{\text{FFT}} \geq N_{\text{bloco}}$
- $N_{\text{FFT}} > N_{\text{bloco}}$: *Zero-padding* ou preenchimento com zeros
 - Maior N_{FFT} : amostragem mais fina da DTFT na frequência
 - Não soluciona do problema de perda de resolução devido ao janelamento

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

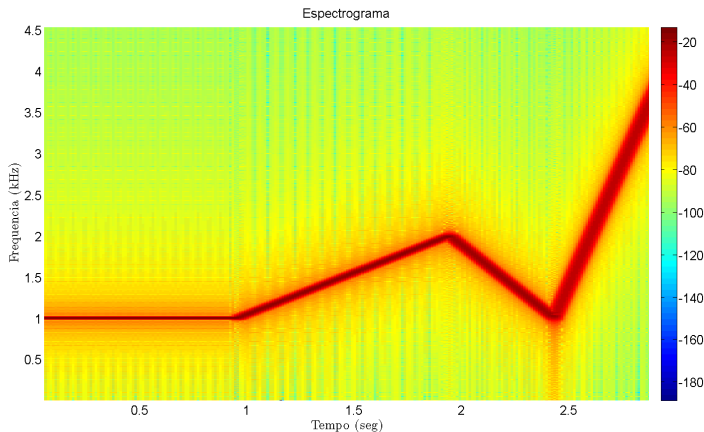
Exemplos

- **Sinal de Teste: sequência de 4 trechos**  
 - Separamento temporal diferente entre os trechos
 - Cada trecho : soma de 3 cossenóides com frequências f_0 , f_1 e f_2
 - $f_0 = 1$ kHz e $f_3 = 2$ kHz; mas $f_2 = \{1001, 1003, 1005 \text{ e } 1010\}$ Hz
- **Espectrogramas**
 - Espectrogramas com parâmetros: N_{bloco} , $N_{\text{FFT}} = 2N_{\text{bloco}}$, $N_{\text{ov}} = \frac{N_{\text{bloco}}}{8}$ (sobreposição de blocos em amostras), janela retangular
 - Espectrograma 1: $N_{\text{bloco}} = 512$ amostras; 
 - Espectrograma 2: $N_{\text{bloco}} = 4096$ amostras;  
 - Espectrograma 3: $N_{\text{bloco}} = 16384$ amostras;  

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Exemplos

- **Sinal de Teste: varreduras senoidais lineares (taxas crescentes)** 🎧
- **Espectrograma:** Idem caso 2 (slide anterior)



Reatribuição no Tempo e na Frequência

Introdução – Motivação

- Espectrograma: segmentação temporal e análise de Fourier
- E se o sinal não for estacionário numa janela de observação?
 - Começa do meio para o fim da janela
 - Termina antes do meio da janela
 - Sua frequência (uma apenas, sem perda de generalidade) é modulada
- **Perguntas:**
 - Centro da janela (no tempo) representa o tempo médio de maior concentração de energia do sinal?
 - Localização do pico espectral representa a frequência no instante correspondente ao centro da janela?
 - **Como ajustar a coordenada tempo-frequência para corresponder ao centróide de massa da distribuição T-F do sinal?**

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- Formulação para da STFT em tempo-contínuo, com janela de observação $h(t)$ real e simétrica com $t = 0$, i.e., $h(t) = h^*(-t)$

$$STFT\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)h(t-t_c)\} = X(t_c, \omega) \triangleq \int x(\tau)h(\tau-t_c)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- A equação acima sugere a interpretação da STFT como o resultado da projeção de $x(t)$ sobre funções generalizadas

$$\phi_\omega(t) = h(t)e^{j\omega t}$$

- Lembrando de projeção como convolução

$$L(t_c, \omega) = \int x(\tau)\phi_\omega(t_c - \tau)d\tau = \int x(\tau)h(t_c - \tau)e^{j\omega(t_c - \tau)}d\tau$$

$$L(t_c, \omega) = e^{j\omega t_c} \int x(\tau)h(\tau - t_c)e^{-j\omega\tau}d\tau = e^{j\omega t_c}X(t_c, \omega)$$



Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- $L(t_c, \omega) = M_{t_c}(\omega) e^{j\phi_{t_c}(\omega)} = e^{j\omega t_c} X(t_c, \omega) = e^{j\omega t_c} M(t_c, \omega) e^{j\phi(t_c, \omega)}$
- Como $M_{t_c}(\omega) = M(t_c, \omega)$

$$\phi_{t_c}(\omega) = \phi(t_c, \omega) + \omega t_c$$

- **Reconstrução de $x(t)$ a partir de $L(t_c, \omega)$:** $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{L(t_c, \omega)\}$

$$x(t) = \iint L(\tau, \omega) \phi_\omega(t - \tau) d\tau d\omega = \iint L(\tau, \omega) h(t - \tau) e^{j\omega(t - \tau)} d\tau d\omega$$

$$x(t) = \iint M_\tau(\omega) e^{j\phi_\tau(\omega)} h(t - \tau) e^{j\omega(t - \tau)} d\tau d\omega$$

$$x(t) = \iint M_\tau(\omega) h(t - \tau) e^{j[\phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau]} d\tau d\omega$$

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- Na fórmula de reconstrução de $x(t)$ os integrandos $M(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções suaves e funcionam como pesos para as exponenciais complexas $e^{j[\phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau]}$
- Princípio da Fase Estacionária:**
 - Variação rápida da fase (em TF): exponenciais serão somadas de modo incoerente e tendem a se cancelar
 - Variação lenta da fase (em TF): exponenciais serão combinadas de modo coerente e tendem somar esforços
- Maior contribuição para a reconstrução de $x(t)$ ocorre quando a fase $\phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau$ é estacionária em TF

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \{ \phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau \} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{ \phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau \} = 0$$

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- Da primeira condição:

$$\frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \omega} + t - \tau = 0$$

$$t = \tau - \frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \omega} = -\frac{\partial \phi(\tau, \omega)}{\partial \omega} = \hat{t}(\tau, \omega)$$

- Da segunda condição:

$$\frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \tau} - \omega = 0$$

$$\omega = \frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \tau} = \omega + \frac{\partial \phi(\tau, \omega)}{\partial \tau} = \hat{\omega}(\tau, \omega)$$

- $\hat{\omega}(\tau, \omega)$ e $\hat{t}(\tau, \omega)$ são, respectivamente, os valores de frequência e tempo reatribuídos

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Implementação Computacional na Prática

- Envolve aproximações para as derivadas da fase em relação ao tempo e frequência
- Para passos Δt e $\Delta \omega$ e **fase desdobrada em ω** :

$$\frac{\partial \phi(t, \omega)}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\phi \left(t - \frac{\Delta t}{2}, \omega \right) - \phi \left(t + \frac{\Delta t}{2}, \omega \right) \right]$$

$$\frac{\partial \phi(t, \omega)}{\partial \omega} \approx \frac{1}{\Delta \omega} \left[\phi \left(t, \omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) - \phi \left(t, \omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) \right]$$

- $2\Delta \omega$ pode ser escolhido como a resolução da DFT_N: $\frac{2\pi}{N}$ rad/amostra
- $2\Delta t$ pode ser escolhido como o tempo associado ao avanço das janelas na STFT

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Implementação Computacional na Prática

- Lembrando que: $\mathcal{F}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = j\omega S(\omega)$ e $\mathcal{F}\{-jts(t)\} = \frac{dS(\omega)}{d\omega}$
- Alternativa para obtenção de $\hat{t}(t, \omega)$ e $\hat{\omega}(t, \omega)$

$$\hat{t}(t, \omega) = t - \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{\mathcal{T}}(t, \omega)}{X(t, \omega)} \right\}$$


$$\hat{\omega}(t, \omega) = \omega + \operatorname{Im} \left\{ \frac{X_{\mathcal{D}}(t, \omega)}{X(t, \omega)} \right\}$$

- $X(t, \omega)$ é a STFT com janela de análise $h(t)$
- $X_{\mathcal{T}}(t, \omega)$ é a STFT com janela de análise $h(t)t$
- $X_{\mathcal{D}}(t, \omega)$ é a STFT com janela de análise $dh(t)/dt$:
- **Pode ser implementado no domínio discreto via 3 DFTs, para cada bloco**

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Exemplos e Observações

● Exemplo

- Sinal: soma de duas senóides de 10 e 20 Hz, amostrado a 70 Hz
- Parâmetros de análise DFT (um bloco): FFT de 256 pontos, janela de Hanning
- Reatribuição das frequências positivas apenas (0 a 35 Hz em passos de 0,28 Hz) 

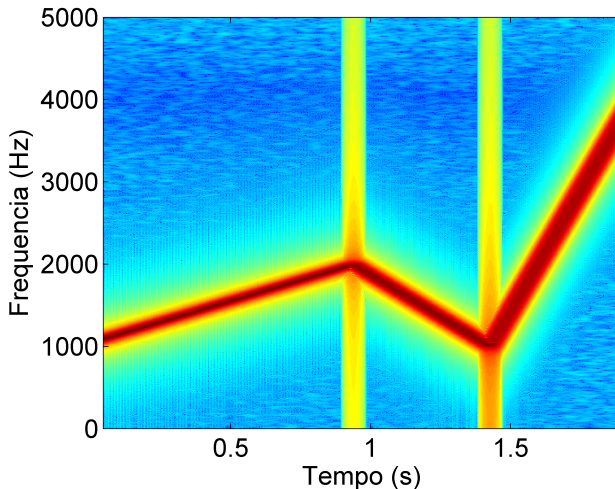
● Observações

- Frequências reatribuídas tendem a se concentrar no entorno dos picos espectrais da DTFT (intra-grade da DFT)
- Frequências reatribuídas podem ser negativas
- Critérios heurísticos podem ser utilizados para selecionar frequências de interesse (e.g. medida de concentração na frequência)

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Espectrograma Reatribuído

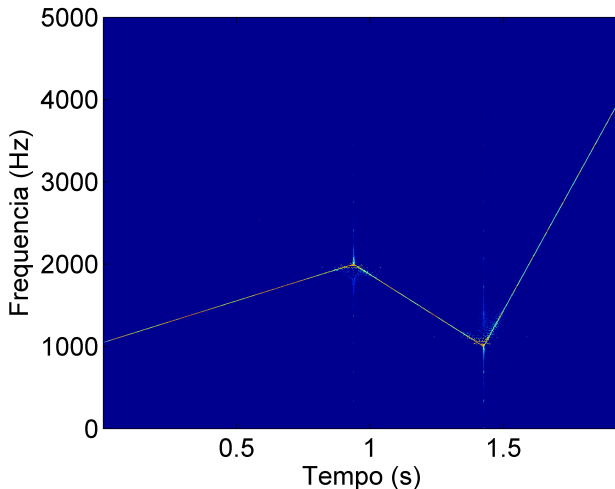
- **Espectrograma Convencional: varredura senoidal**



Reatribuição no Tempo e na Frequência

Espectrograma Reatribuído

- **Espectrograma Reatribuído: varredura senoidal**



Espectrograma Reatribuído

Mais Observações

- São selecionados pares $\{\hat{t}, \hat{\omega}\}$ em regiões do plano TF com grande concentração local de instantes tempo e valores de frequência reatribuídos
- Descartam-se valores reatribuídos $\{\hat{t}, \hat{\omega}\}$ muito diferentes dos valores $\{t, \omega\}$ originais
- **Visualização:** Envolve uma re-quantização do pares selecionados $\{\hat{t}, \hat{\omega}\}$ em uma grade mais fina no plano TF que no caso original
- **Links para toolboxes com códigos e exemplos:**
 - <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21736>
 - <http://people.ece.cornell.edu/land/PROJECTS/ReassignFFT/index.html>

Transformada Fan Chirp (FChT)

Introdução – Motivação

● Motivação

- **Análise de sinais acústicos afinados: quasi-harmônicos**
 - Picos espectrais relacionados harmonicamente: aproximadamente múltiplos inteiros de uma frequência fundamental 🎵 🖼️ 🖼️
 - Variações temporais na frequência da fundamental carregam significado ou expressão em sinais de voz e música 🎵 🖼️
 - **Para janelas de curta duração: variação de frequência da fundamental pode ser bem aproximada por uma função linear**

● Idéia por trás da FChT

- Projetar o sinal harmônico de interesse $x(t)$ sobre exponenciais complexas com variação linear da frequência instantânea

Formulação Matemática da FChT

No Tempo Contínuo

- Para frequência ω e taxa de varredura α (ambas reais)

$$X(\omega, \alpha) = \int x(t) \phi_{\omega, \alpha}(t) dt$$

$$\phi_{\omega, \alpha}(t) = \sqrt{\left| \frac{\partial \psi_{\omega}(t)}{\omega \partial t} \right|} e^{-j(\psi_{\omega}(t))}$$

$$\psi_{\omega}(t) = \omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$X(\omega, \alpha) \triangleq \int x(t) \sqrt{|1 + \alpha t|} e^{-j(\omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2)} dt$$

Formulação Matemática da FChT

Continuação

- **Frequência instantânea das funções exponenciais**

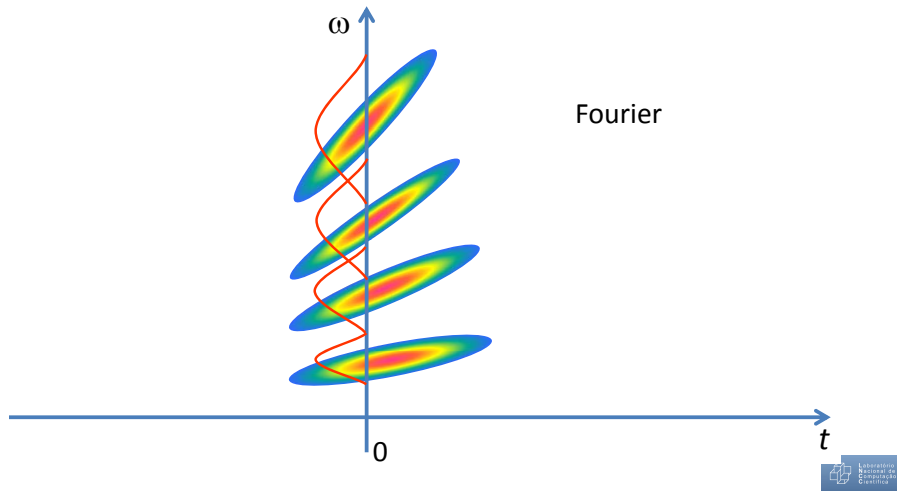
$$\frac{\partial \psi_{\omega}(t)}{\partial t} = v(t) = \omega + \omega \alpha t$$

- **Variação linear no tempo com taxa $\omega\alpha$, i.e., $\propto \omega$**
- Mudança de sinal de $v(t)$ em $t = -\frac{1}{\alpha}$: ponto focal
- **Reconstrução de $x(t)$ a partir de $X(\omega, \alpha)$**
 - Caso $x(t) = 0$ para $t < -\frac{1}{\alpha}$, i.e, nulo para todos os instantes anteriores ao ponto focal

$$X(\omega, \alpha) \triangleq \int x(t) \sqrt{|1 + \alpha t|} e^{j(\omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2)} dt$$

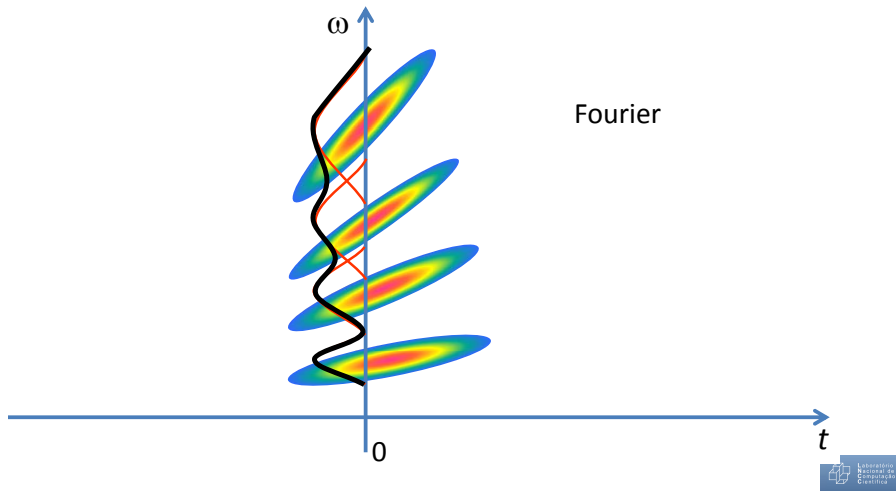
Interpretação Gráfica: Fourier vs FChT

- Transformada de Fourier



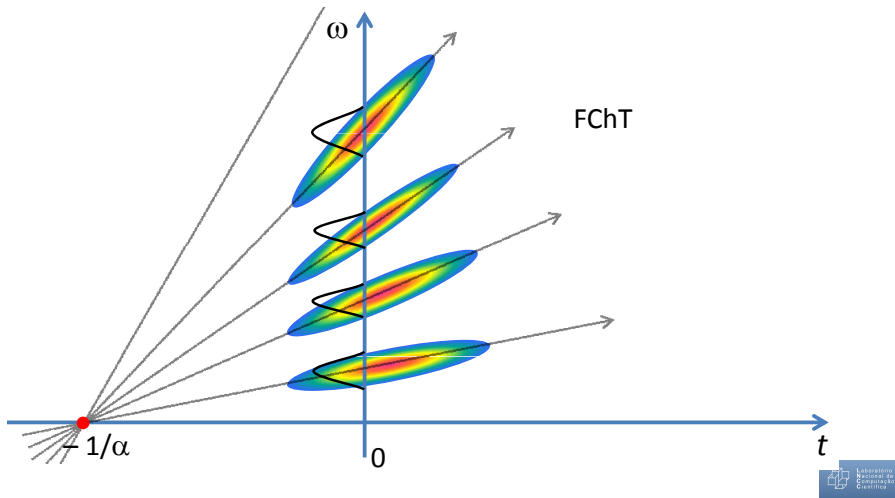
Interpretação Gráfica: Fourier vs FChT

- Transformada de Fourier



Interpretação Gráfica: Fourier vs FChT

- FChT



FChT como Transformada de Fourier de Sinal Deformado no Tempo

Formulação Matemática

- Formulação original

$$X(\omega, \alpha) \triangleq \int x(t) \sqrt{|1 + \alpha t|} e^{j(\omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2)} dt$$

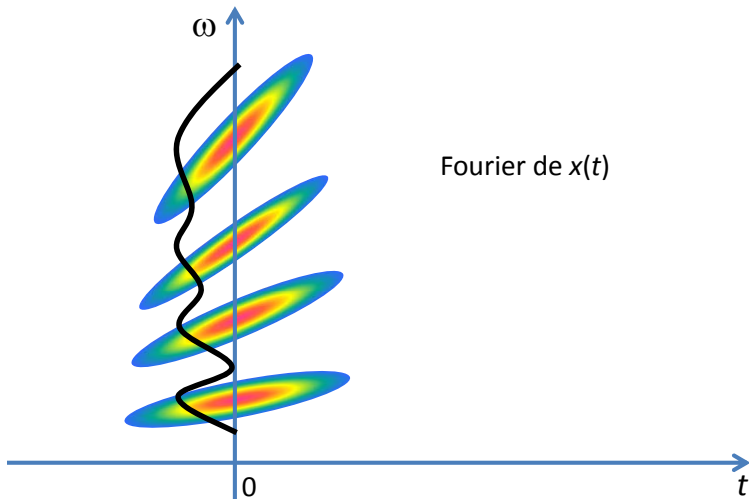
- Fazendo o mapeamento temporal: $\tau = t + \frac{\alpha}{2} t^2 = \tau_\alpha(t)$

$$X(\omega, \alpha) = \int_{-1/2\alpha}^{\infty} [\check{x}_+(\tau) + \check{x}_-(\tau)] e^{j\omega\tau} d\tau = \int \chi(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

- $\vartheta_\alpha^\pm(t) = \tau_\alpha^{-1}(t) = -\frac{1}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{1 \pm 2\alpha t}}{\alpha}$
- $\check{x}_\pm(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{|1 + \alpha t|}} x(\vartheta_\alpha^\pm(t))$
- $\chi(\tau)$ é uma versão de $x(\tau)$ distorcida no domínio temporal pelo mapeamento acima

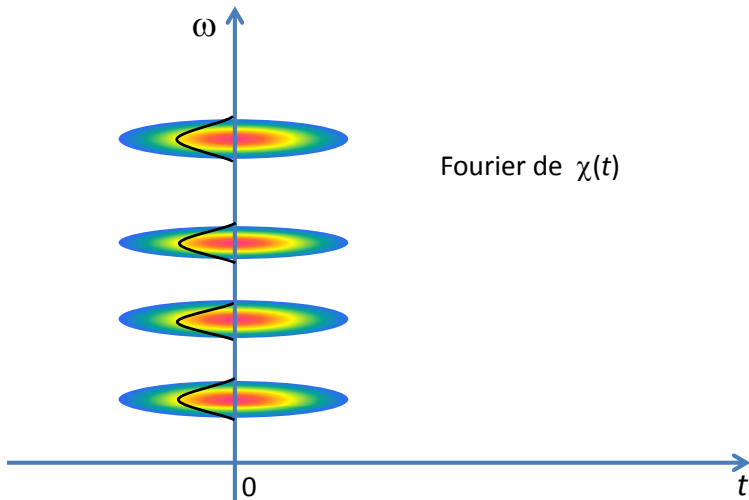
Interpretação Gráfica do Pre-Distorção Temporal

- Densidade TF de $x(t)$ e Espectro de Fourier



Interpretação Gráfica do Pre-Distorção Temporal

- Densidade TF de $\chi(t)$ e Espectro de Fourier



Espectrograma Usando FChT

- Escopo: para sinais predominantemente harmônicos (uma fonte)
- Segmentar $x(t)$ em blocos de curta duração
 - Para garantir variações aproximadamente lineares da frequência fundamental e componentes harmônicas
- Estimar o melhor valor de α para cada bloco
- Aplicar a FChT ao sinal do bloco (índice m)
 - Mapeamento do domínio temporal do sinal janelado, com o α escolhido
 - Transformada de Fourier
- Para cada bloco: amostrar $|X(\omega, \alpha_m)|$ na frequência e organizar os dados em uma matriz para visualização

Espectrograma Usando FChT – Estimativa do α

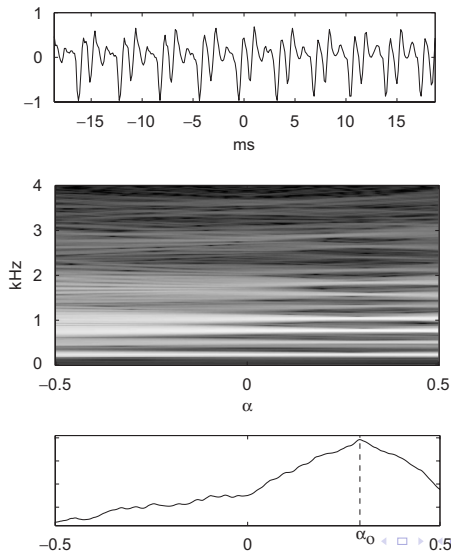
- **Método exaustivo usando um único bloco**

- Construção de um mapa “denso” $|X(\alpha, \omega)|$ para uma faixa predefinida de valores de α
- Marginalização (integração) de $|X(\alpha, \omega)|$ em ω :
 - Sobre todas as frequências: $F(\alpha) = \int |X(\alpha, \omega)| d\omega$
 - Se houver estimativa confiável da fundamental ω_0 :
$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^L |X(\alpha, k\omega_0)|$$
- Seleção do valor ótimo de α para o bloco: $\alpha_o = \max_{\alpha} \{F(\alpha)\}$

- **Há soluções menos custosas computacionalmente**

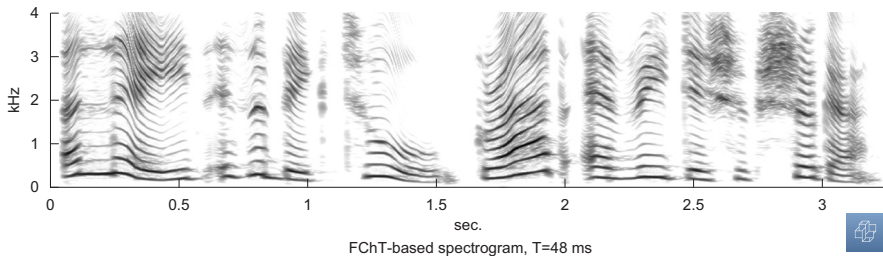
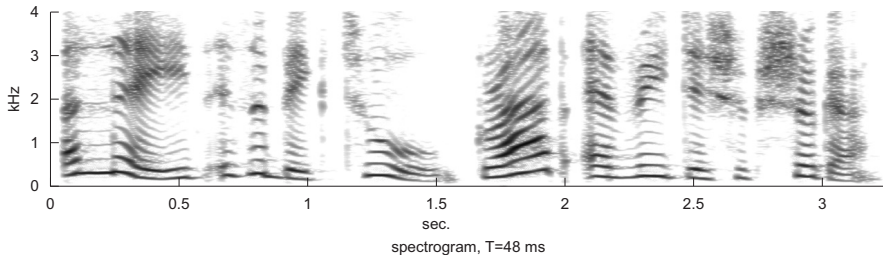
Espectrograma Usando FChT – Estimativa do α

- Exemplo (©Veruaga & Képesi 2007)



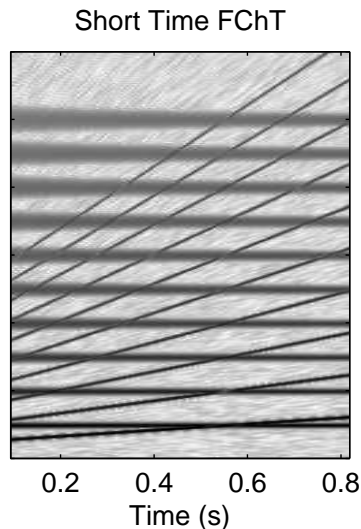
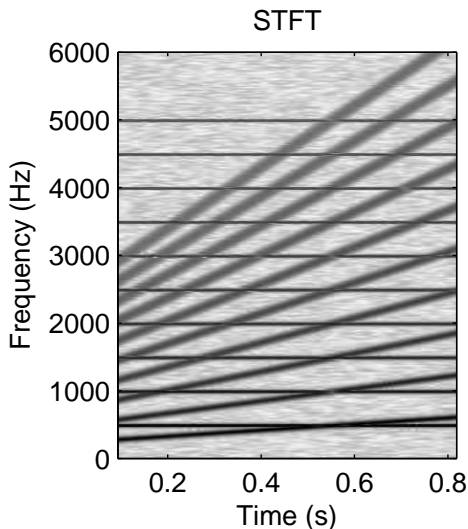
Espectrograma Fourier vs FChT

● Sinal de voz (uma fonte) (©Veruaga & Képesi 2007)




Espectrograma Fourier vs FChT

- Exemplo com duas fontes (©Rocamora 2011)



FChT para Sinais Discretos

Outline do Procedimento

- Aplicar mapeamento de domínio temporal (para algum α) ao sinal discreto: $x[n] \rightarrow \chi[n]$
 - Ajustar funções interpoladoras no tempo contínuo pelas amostras de $x[n]$
 - Interpoladores: linear por partes, polinomial de baixa ordem (splines, Lagrange, etc)
 - Re-amostrar o sinal interpolado nos novos instantes de tempo definidos pelo mapeamento
 - Número de amostras do sinal original tipicamente diferente daquele do sinal reamostrado 
 - Normalização de amplitude
- Cálculo da DFT_N de $\chi[n]$

Transformadas de Wavelets

Introdução – Motivação

- **Origem do nome:** wave (onda) + let (diminutivo em Francês) = pequena onda, “ondinha”, “ondícula” ou “ondaleta”
- **Idéia Central (para sinais em tempo contínuo)**
 - **Análise:** Projeção de um sinal $s(t)$ sobre em funções $\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t)$, que são versões escaladas no tempo (por $\alpha > 0$) e deslocadas no tempo (por $\tau \in \mathbb{R}$) de uma função-mãe $\tilde{\psi}(t)$ (wavelet-mãe)

$$\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t) = \tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)$$

$$S(\alpha, \tau) \triangleq \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t) dt = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) dt$$

- **Síntese:** Expansão de $s(t)$ em função de $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ (que guarda alguma relação com $\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t)$)

$$s(t) \triangleq \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) d\tau d\alpha$$

Transformadas de Wavelets


Observações Conceituais Importantes

- **É uma família de Transformadas**

- **Nomenclatura**

- CWT: Transformada de Wavelets Contínua (para sinais contínuos)
- DWT: Transformada de Wavelets Discreta (para sinais contínuos)
- DTDWT: Transformada de Wavelets Discreta para Sinais Discretos

- **Diferenças essenciais em relação à Fourier**

- O domínio transformado não envolve frequência, mas sim, escala (α) e deslocamento (τ)
- Há inúmeras opções de escolha para as wavelets-mãe 
 - Podem ser ortogonais (formam uma base) ou não. No caso ortogonal: $\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t) = \phi_{\alpha,\tau}(t)$
 - Podem ter suporte temporal compacto (finito) ou não
 - Podem conter várias componentes frequenciais ao mesmo tempo
 - São funções com valor médio nulo: espectro passa-faixas

CWT

Conceitos Relevantes

- Wavelet-mãe com suporte compacto no tempo
 - Evita necessidade de janelamento (requerido na STFT)
 - CWT adequada para representar sinais com transições rápidas ou descontinuidades (e.g. bordas em imagens)
- As funções $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ são auto-semelhantes
- A expansão de $s(t)$ em termos de $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ para todos os valores de $\alpha > 0$ e τ (ambos reais) é imprática
 - Sinais práticos têm suporte temporal finito: desnecessário expandir $s(t)$ em $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ com suporte temporal muito maior que o de $s(t)$
 - Dependendo da aplicação, pode-se definir um limite superior para o nível de detalhamento necessário para representação de $s(t)$
 - Adotam-se limites inferior e superior para a escala (α) na representação de $s(t)$ via wavelets

Transformada de Wavelets Discreta – DWT

Para sinais contínuos

- Diferença em relação à CWT: Discretiza o domínio $\tau - \alpha$
- Discretização usual (com base ortogonal):
 - Escalamento: grade logaritma (base 2), i.e., $\alpha \rightarrow 2^j$ com $j \in \mathbb{Z}$
 - Deslocamento: grade linear, i.e., $t \rightarrow k \in \mathbb{Z}$
 - $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$
 - *wavelet*-mãe de análise e síntese: $\psi_{0,0}(t)$ (escala $j = 0$)
- **Equação de Análise:**

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

- **Equação de Síntese:**

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

- À medida que j cresce, acrescentam-se “detalhes” ao sinal



DWT

Limitação na Escala

- Representar $s(t)$ em todas as escalas 2^j é imprático
- Solução: impor limites inferior e superior para a representação multi-escala
- **Limite inferior:** adotar escala de partida (por convenção, $j = 0$)

$$s(t) = \sum_k \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \underbrace{\sum_k \sum_{j=-1}^{-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)}_{s_g(t)} + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$


- $s_g(t)$ é uma representação grosseira de $s(t)$
- Pode-se mostrar que

$$s_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(t-k) \quad \text{com} \quad c_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi(t-k) dt$$



DWT – Limitação na Escala

Função de Escalamento

- $\varphi(t)$ é a **Função de Escalamento** associada à wavelet $\psi_{0,0}(t)$ 
- $\varphi(t)$ pode ser contruída a partir de $\psi_{0,0}(t)$
- $s_g(t)$ é uma representação aproximada de $s(t)$ via expansão em termos de $\varphi(t)$ (escala única $j = 0$, só deslocamentos temporais)
- **É possível construir uma aproximação para $s(t)$, em uma escala arbitrária $j = J$, como uma expansão de $s(t)$ somente em termos da função de escalamento associada à wavelet $\psi_{J,k}(t)$**
- Como as funções de escalamento são construídas das wavelets, também guardam a propriedade de auto-semelhança, i.e., para uma escala j , $\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k)$
- Representação mono-escala de $s_g(t)$ via funções de escalamento na escala j

$$s_g^j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \varphi_{j,k}(t - k)$$

DWT – Limitação na Escala

Wavelet e Função de Escalamento

- Interesse da DWT é a representação multi-escala
- A representação de $s(t)$ via $\varphi_{j,k}(t)$ é mono-escala
- **Propriedade-chave da decomposição multi-escala**

$$s_g^{j-1}(t) + \underbrace{\sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t)}_{\mathcal{W}^{j-1}(t)} = s_g^j(t)$$

- **A relação acima é recursiva.** Caso se admita para $s(t)$ representação entre as escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$:

$$s(t) = s_g^0(t) + \mathcal{W}^1(t) + \mathcal{W}^2(t) + \cdots + \mathcal{W}^J(t)$$

DWT – Computação Recursivas dos Coeficientes

Wavelet e Função de Escalamento

- Graças à auto-similaridade das funções envolvidas e à relação recursiva entre as representações em escalas diferentes, $c_{j-1,k}$ e $d_{j-1,k}$ podem ser calculados via operações simples sobre $c_{j,k}$

$$c_{j-1,k} = \sum_m h_{pb}[m - 2k]c_{j,m}$$

$$d_{j-1,k} = \sum_m h_{pa}[m - 2k]c_{j,m}$$

- $h_{pb}[n]$ e $h_{pa}[n]$ são sequências finitas que dependem da wavelet-mãe

$$h_{pb}[n] = \sqrt{2} \int \varphi(t)\varphi(2t - n)dt$$

$$h_{pa}[n] = \sqrt{2} \int \psi(t)\varphi(2t - n)dt$$

DWT – Estratégia de Decomposição

Entre escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$

● Procedimento

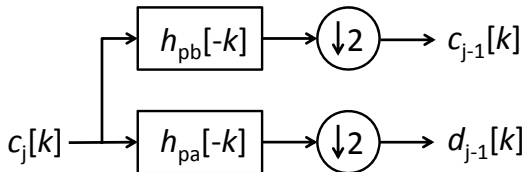
- Projetar $s(t)$ sobre $\varphi_{J,k}(t)$ e obter os coeficientes $c_{J,k}$
- Obter $c_{J-1,k}$ e $d_{J-1,k}$ a partir de $c_{J,k}$ via recursões anteriores
- Continuar o processo até obter $c_{0,k}$ e $d_{0,k}$

● Implementação Prática: sinais e sistemas discretos

- Sistema compressor por M : $y[n] = x[Mn]$



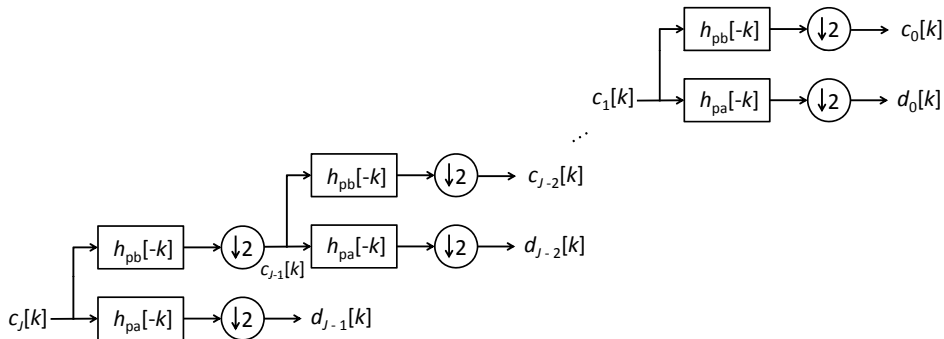
- $c_{j-1,k} = \sum_m h_{pb}[m - 2k]c_{j,m}$ e $d_{j-1,k} = \sum_m h_{pa}[m - 2k]c_{j,m}$



DWT – Implementação via DSP

Entre escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$

- Decomposição entre escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$



DTDWT – DWT para Sinais Discretos

Prática Usual

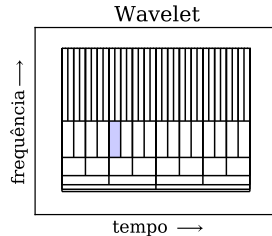
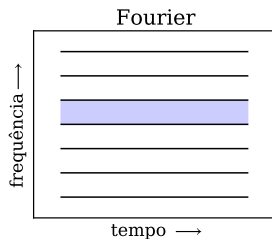
- O sinal de interesse disponível $s[k]$, com $k \in \mathbb{Z}$, já está em tempo discreto, i.e., é uma sequência de números com N amostras
- Assume-se que, na escala mais alta escolhida $j = J$, as funções de escalamento são suficientemente localizadas no tempo para aproximar bem um impulso de Dirac:

$$\varphi_{J,k}(t) = 2^{\frac{J}{2}} \varphi_{0,0}(2^J t - k) \approx \delta(t - k)$$

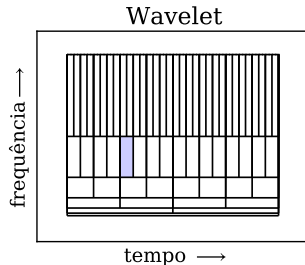
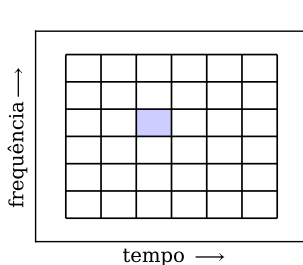
- **Faz-se $c_{J,k} = c_J[k] = s[k]$**
- Aplica-se $c_J[k]$ à entrada do sistema discreto de decomposição para obter $d_j[k]$ e $c_j[k]$ nas escalas mais baixas
 - Se $N = 2^J$, bastam J estágios de decomposição para obter $d_0[k]$ e $c_0[k]$ com apenas uma amostra cada
 - Complexidade computacional da decomposição: $\mathcal{O}(N)$

DTDWT vs DFT_N – Esquadrinhamento do Plano TF

- Análise de um bloco de $N = 2^J$ amostras



- Análise de vários blocos de $N = 2^J$ amostras



Análise Espectral Paramétrica

Introdução – Motivação

● Estratégia de Análise Espectral Paramétrica

- Considerar que um sinal observado $s[n]$ é a resposta ao impulso de um sistema linear invariante no tempo: $h[n]$
- Ajustar os parâmetros do sistema de modo a minimizar uma função-custo relacionada ao erro entre $s[n]$ e $h[n]$
- Tomar a resposta em frequência do sistema $H(\omega) = DTFT\{h[n]\}$ como representativa do conteúdo espectral de $s[n]$

● Vantagens

- Possibilidade de representação compacta da informação: parâmetros do modelo (sistema)
- Para um bloco de sinal com poucas amostras: tende a produzir espectro com maior resolução do que a DTFT
- Mitiga efeitos espectrais da presença de ruído em $s[n]$

Análise Espectral Paramétrica via Sistema Auto-Regressivo

● Outline do Procedimento

- Observa-se uma seqüência discreta $\tilde{y}[n]$ de L amostras
- Assume-se que $\tilde{y}[n]$ é gerado como pelo sistema recursivo (AR) de ordem $N < L$, regido pela Equação de Diferenças (ED)

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k]$$

- Como a ED tem ordem N , são necessárias N condições iniciais para rodar as recursões
- Para inicializar as iterações, usar as N primeiras amostras da observação $\tilde{y}[n]$, i.e. $\tilde{y}[0]$ a $\tilde{y}[N - 1]$
- Obter a saída do modelo $y[N]$ (predição) e medir o erro em relação ao valor observado $\tilde{y}[N]$, i.e. $e[N] = \tilde{y}[N] - y[N]$
- Obter $e[n]$ para $N \leq n \leq L$
- Definir e minimizar uma função-custo envolvendo $e[n]$ com relação aos parâmetros a_k do modelo

Erro de Modelagem ou Aproximação

- Erro de Aproximação: $e[n] = \tilde{y}[n] - y[n]$
- Lembrando que $y[n]$ é a saída do sistema AR

$$e[n] = \tilde{y}[n] - \sum_{k=1}^N -a_k \tilde{y}[n-k], \text{ para } n = N, N+1, \dots, L$$

- Considerando a_k com valores negativos, pode-se escrever em notação matricial:

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{a}, \text{ com}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_N, \tilde{y}_{N+1}, \dots, \tilde{y}_L]^T, \mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T, \mathbf{e} = [e_N, e_{N+1}, \dots, e_L]^T$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{N-1} & \cdots & \tilde{y}_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_{L-1} & \cdots & \tilde{y}_{L-N} \end{pmatrix}$$

Definição e Minização da Função-Custo

- Propósito da Função-Custo: atribuir uma **PENALIZAÇÃO** para erro de modelagem
- Há várias escolhas possíveis para uma função-custo
- Escolha usual: função quadrática do erro (valores reais aqui)

$$\varepsilon = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

- Minimização de ε em relação aos \mathbf{a}

$$\min_{\mathbf{a}} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\} \Rightarrow \mathbf{a}^{\text{LS}}$$

- Pode-se mostrar que

$$\mathbf{a}^{\text{LS}} = \left(\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{y}}$$

Escolha da Ordem N do Modelo AR

- Está relacionada com o número de componentes ressonantes no espectro do sinal $\tilde{y}[n]$.
 - Pode ser inferida por análise espectral não-paramétrica (FFT).
- Obtenível via métodos e heurísticas para a seleção de ordem.
 - Análise do comportamento de $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ em função da ordem N .
- Pode envolver aspectos práticos:
 - Precisão da aproximação \times complexidade computacional.

Outras Observações

- **No Matlab** há várias funções para obter **a**: `ar.m` (implementa vários métodos), `arburg.m`, `aryule.m`, `lpc.m`, `armcov.m`
- O número mínimo L de amostras necessárias para obter uma solução de ordem N varia de acordo com o método escolhido
- Algumas soluções garantem um modelo estável (Burg, Yule-Walker), outras não (LS, Covariância)

Representações em Tempo-Frequência

- Transformada Curta de Fourier
- Distribuição de Wigner-Ville
- Transformada Wavelet
- Análise Espectral de Hilbert

Representações em Tempo-Frequência

- Transformada Curta de Fourier
- Distribuição de Wigner-Ville
- Transformada Wavelet
- Análise Espectral de Hilbert

Análise Espectral de Hilbert

Introduzida por D. Gabor (1946)

Modelo para o sinal

$$x(t) = a(t) \cos \varphi(t)$$

Par conjugado:

$$x_q(t) = a(t) \sin \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \arctan \left[\frac{x_q(t)}{x(t)} \right]$$

Análise Espectral de Hilbert

Introduzida por D. Gabor (1946)

Modelo para o sinal

$$x(t) = a(t) \cos \varphi(t)$$

Par conjugado:

$$x_q(t) = a(t) \sin \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \arctan \left[\frac{x_q(t)}{x(t)} \right]$$

Análise Espectral de Hilbert

Teorema de Bedrosian *

$$\mathcal{H}[a(t) \cos \varphi(t)] = a(t) \mathcal{H}[\cos \varphi(t)] = a(t) \sin \varphi(t)$$

* Se o espectro de $a(t)$ contém frequências mais baixas e não se sobrepõe ao de $\cos \varphi(t)$.

Onde

$$\mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t')}{t' - t} dt$$

é a transformada de Hilbert e P.V. significa que a integral é tomada no sentido do principal valor de Cauchy.

Análise Espectral de Hilbert

Considerando $x(t)$ um sinal real, o **modelo de quadratura** buscado é o

Sinal Analítico

$$x_a(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$$

$$x_a(t) = \mathcal{A}[x(t)] \triangleq x(t) + j\mathcal{H}[x(t)]$$

O Sinal Analítico pode ser obtido por

$$x_a(t) = \mathcal{A}[x(t)] = \mathcal{F}^{-1}[2\Theta(\omega)\mathcal{F}[x(t)]]$$

onde $\Theta(\omega)$ é a função degrau de Heaviside:

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < 0 \\ 1/2, & \text{se } \omega = 0 \\ 1, & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

Análise Espectral de Hilbert

Considerando $x(t)$ um sinal real, o **modelo de quadratura** buscado é o

Sinal Analítico

$$x_a(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$$

$$x_a(t) = \mathcal{A}[x(t)] \triangleq x(t) + j\mathcal{H}[x(t)]$$

O Sinal Analítico pode ser obtido por

$$x_a(t) = \mathcal{A}[x(t)] = \mathcal{F}^{-1}[2\Theta(\omega)\mathcal{F}[x(t)]]$$

onde $\Theta(\omega)$ é a função degrau de Heaviside:

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < 0 \\ 1/2, & \text{se } \omega = 0 \\ 1, & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

Análise Espectral de Hilbert

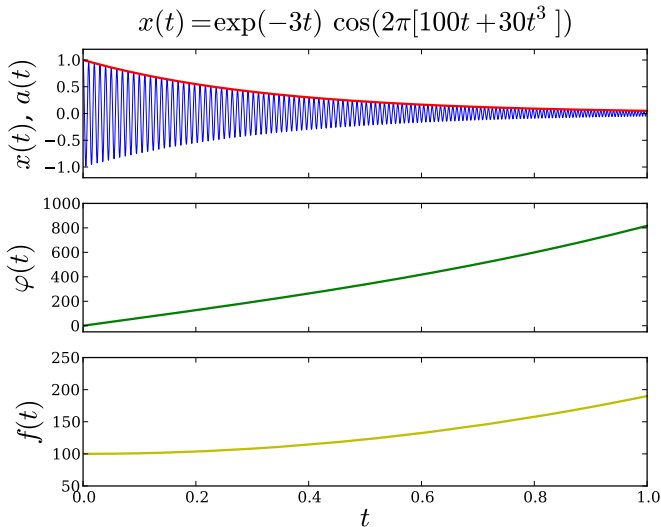
A partir do sinal analítico é possível se obter

$$a(t) = \left(\Re \{x_a(t)\}^2 + \Im \{x_a(t)\}^2 \right)^{1/2}$$

$$\varphi(t) = \arctan \left(\frac{\Im \{x_a(t)\}}{\Re \{x_a(t)\}} \right)$$

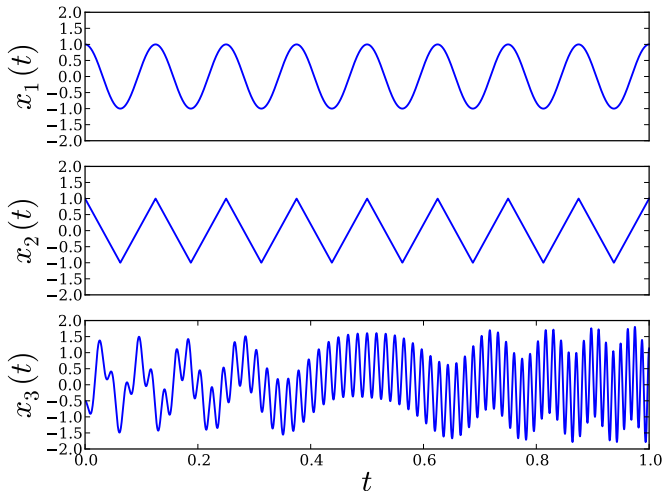
$$\omega(t) = 2\pi f(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

Análise Espectral de Hilbert - Exemplo 1



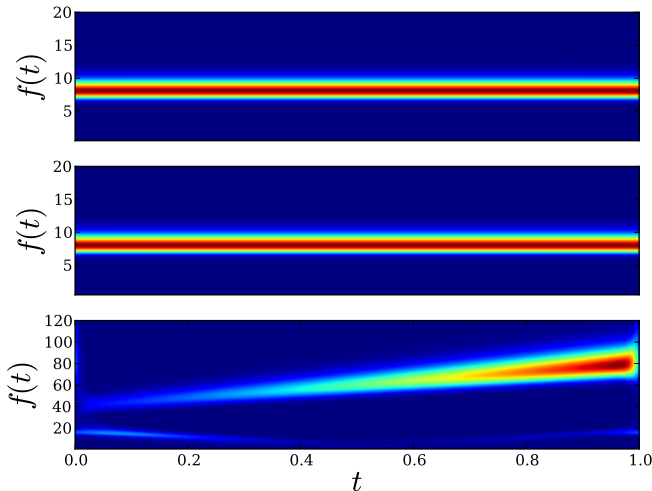
Análise Espectral de Hilbert - Exemplo 2

Sinais.



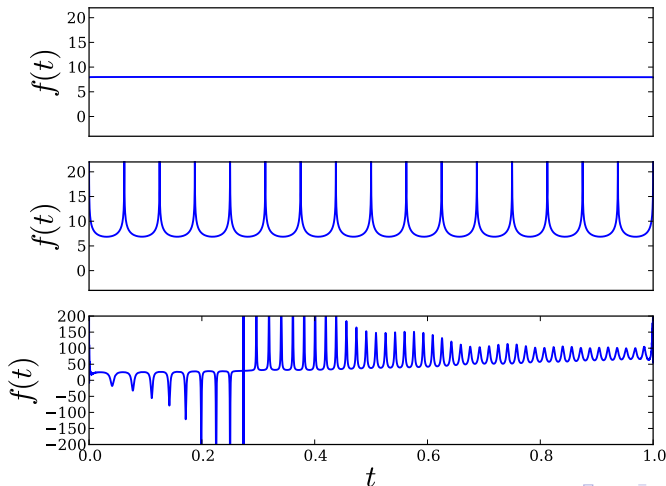
Análise Espectral de Hilbert - Exemplo 2

Análise Transformada Wavelet Contínua. 



Análise Espectral de Hilbert - Exemplo 2

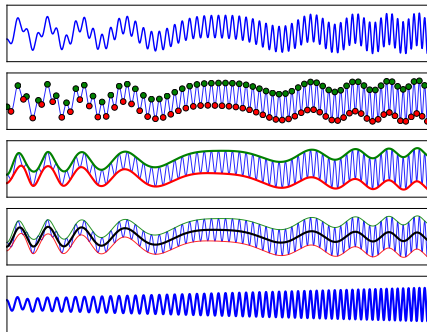
Análise Espectral de Hilbert.



Decomposição Modal Empírica

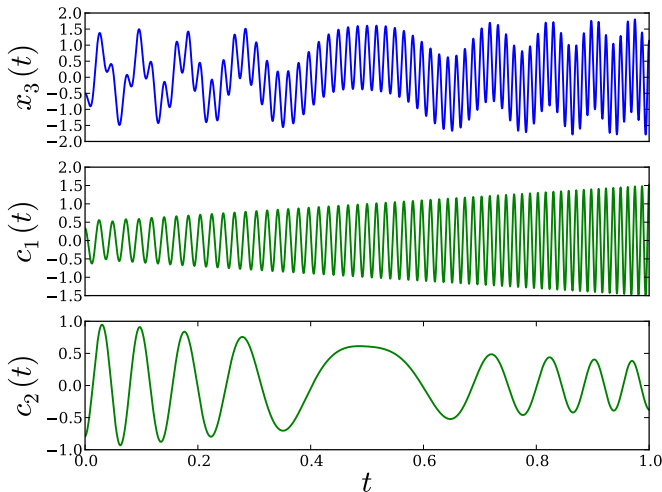
N.E. Huang *et al.* (1998)

- 1 Detectar máximos e mínimos locais do sinal
- 2 Construir envoltórias
- 3 Determinar a média local
- 4 Extrair a média local do sinal



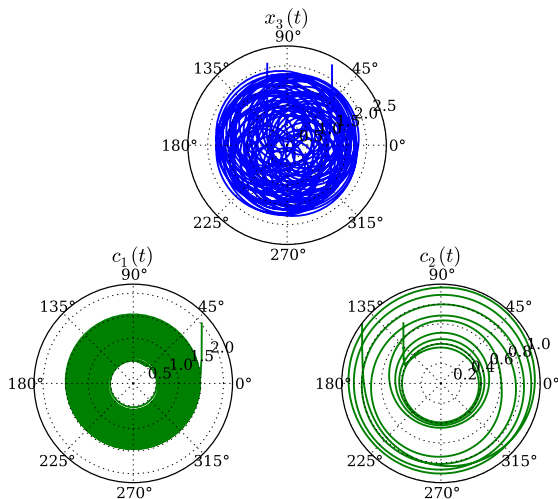
Decomposição Modal Empírica - Exemplo 2

DME do sinal.



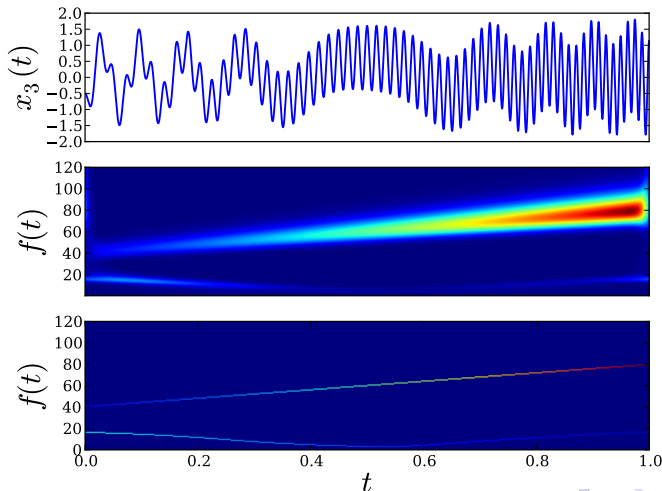
Decomposição Modal Empírica - Exemplo 2

Representação polar do sinal analítico: $x_a(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$.



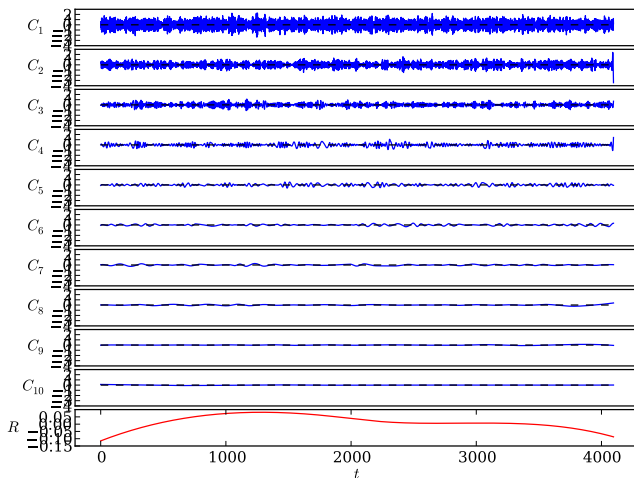
Transformada de Hilbert-Huang - Exemplo 2

Comparação CWT e Transformada de Hilbert-Huang.



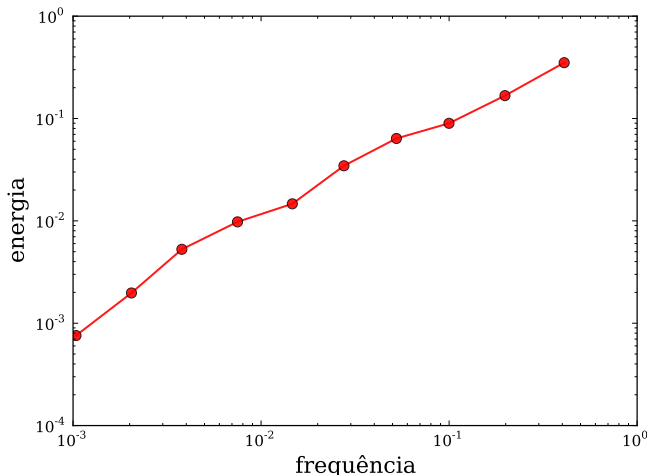
Transformada de Hilbert-Huang - Exemplo 3

DME de ruído branco. $[x(t) = \sum_k c_k(t) + r(t)]$



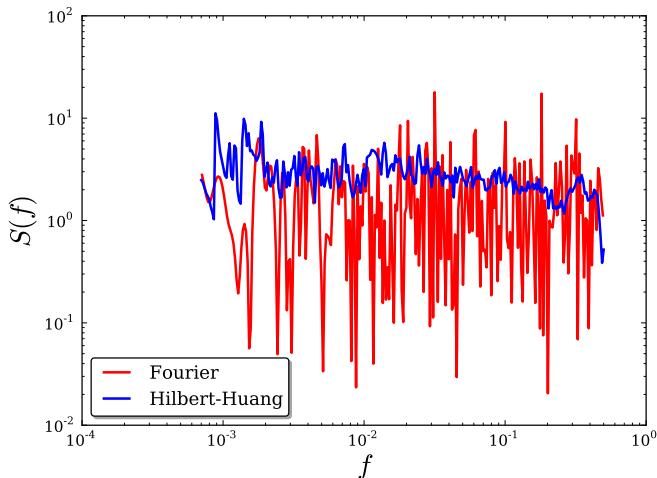
Transformada de Hilbert-Huang - Exemplo 3

Energia e escala entre as componentes.



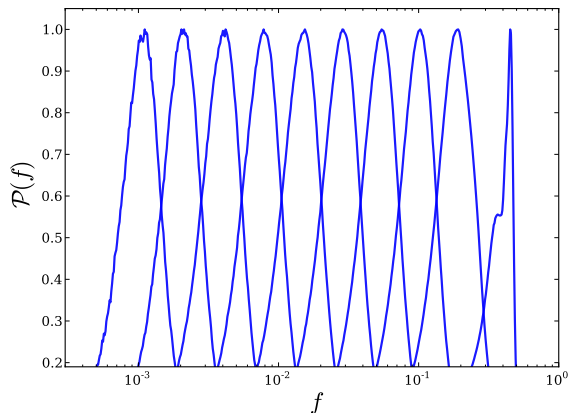
Transformada de Hilbert-Huang - Exemplo 3

Densidade Espectral.



Transformada de Hilbert-Huang - Banco de Filtros

Distribuição de frequência por componente: **Ruído Branco**



Comparação DME e DWT: 

Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

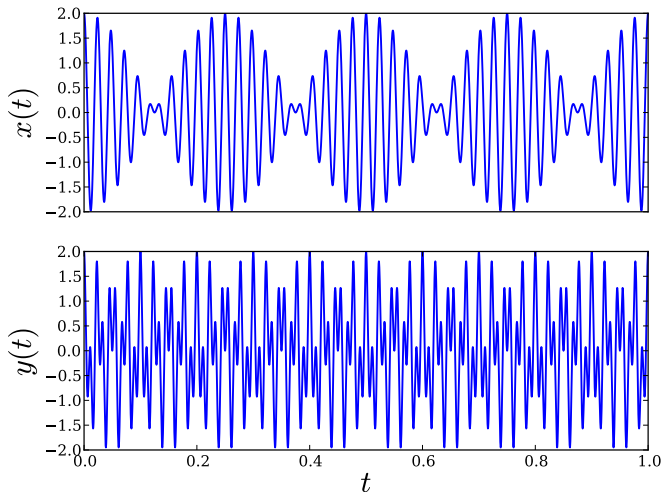
$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

Exemplo

- $x(t)$: $\omega_1 = 40\text{Hz}$, $\omega_2 = 44\text{Hz}$
- $y(t)$: $\omega_1 = 40\text{Hz}$, $\omega_2 = 90\text{Hz}$

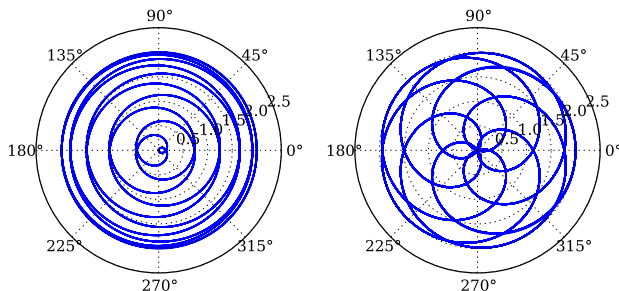
Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

Sinais.



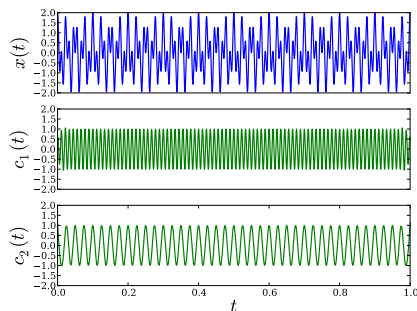
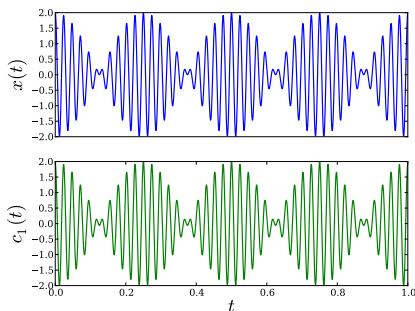
Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

Representação polar dos sinais analíticos de $x(t)$ e $y(t)$.



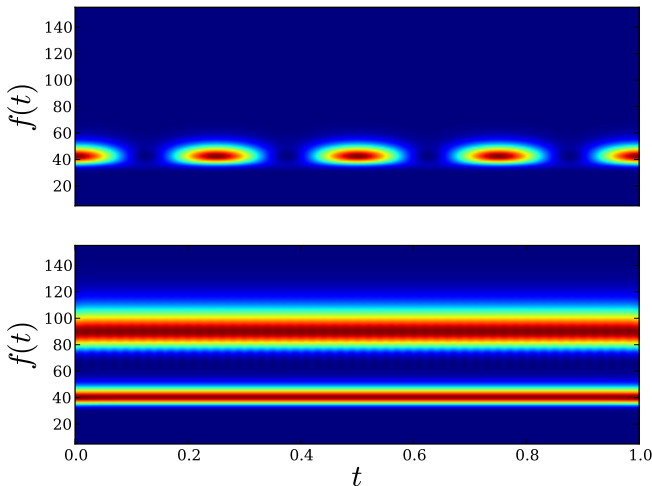
Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

Decomposição.



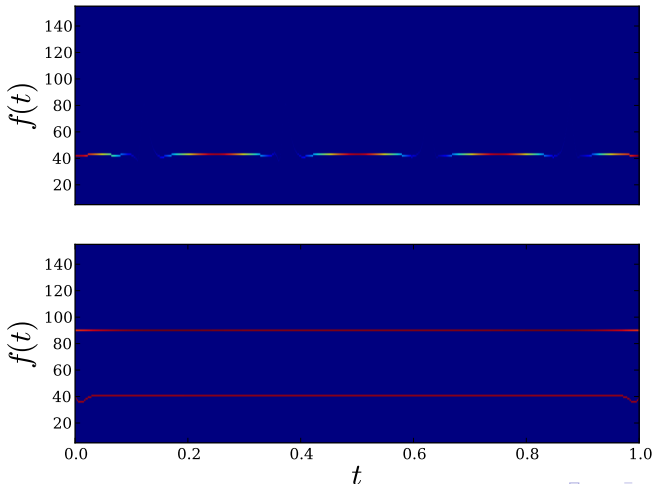
Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

Análise Transformada Wavelet Contínua.



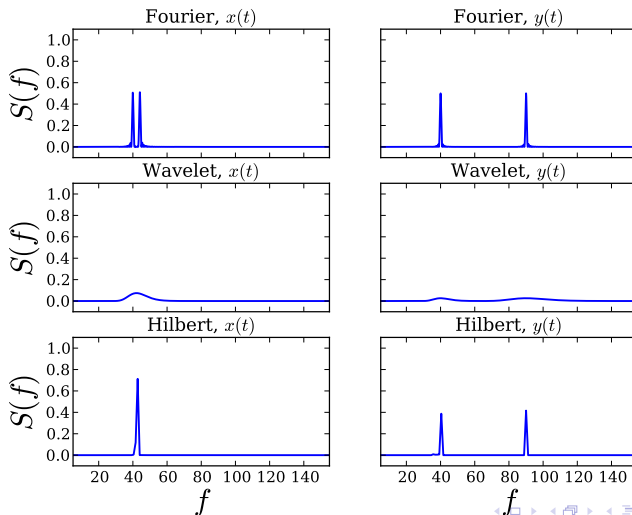
Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

Análise Transformada de Hilbert-Huang.



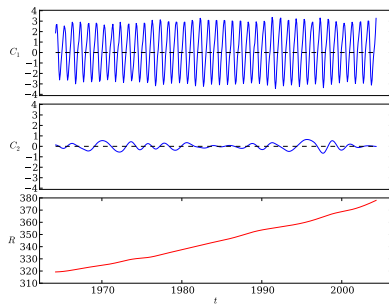
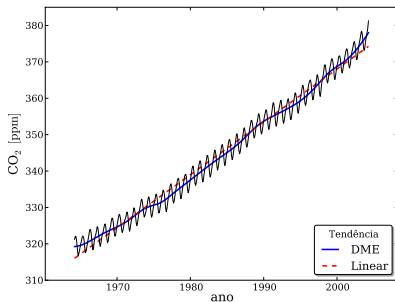
Transformada de Hilbert-Huang - Batimento

Espectros Marginais.



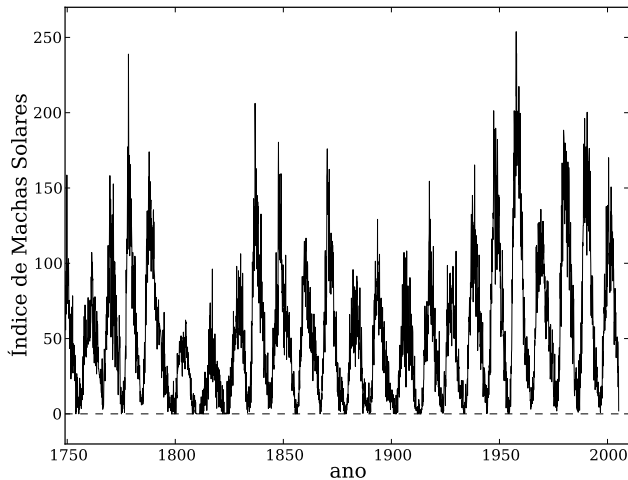
Concentração de CO₂ – Mauna Loa, Havaí

Determinação de tendência



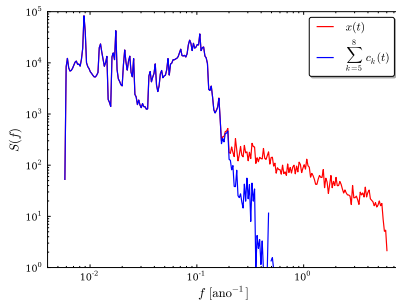
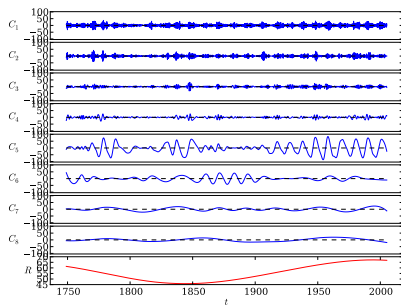
Índice de Manchas Solares

Sinal.



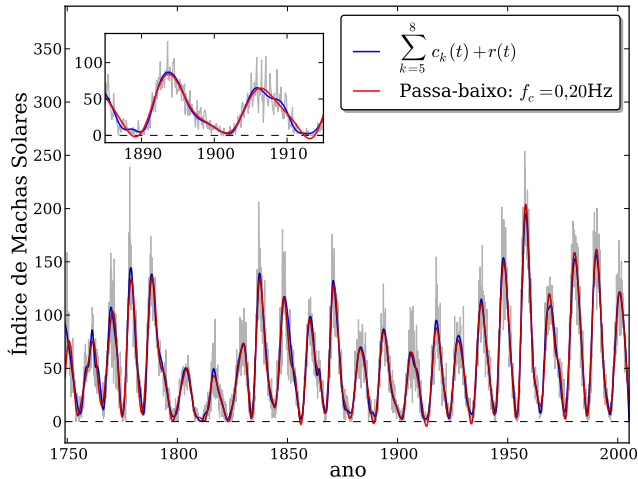
Índice de Manchas Solares

Decomposição e Densidade Espectral.



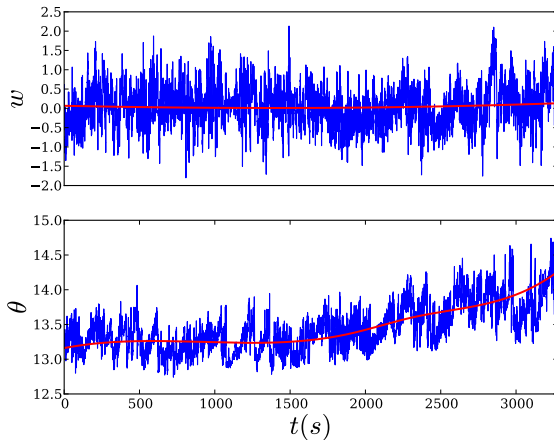
Índice de Manchas Solares

Filtragem



Turbulência na baixa atmosfera

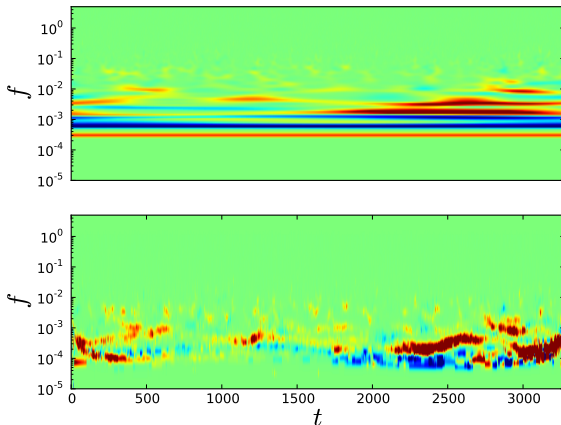
Sinais de velocidade vertical $w(t)$ e temperatura $\theta(t)$.



Turbulência na baixa atmosfera

Coespectro w, θ

Wavelet *versus* Hilbert-Huang:



Fragilidades da DME

- critério de parada
- mistura de modos
- máximos e mínimos
- interpolador
- máximos e mínimos nas extremidades
- robustez na presença de ruído

Variantes da DME

- *Ensemble DME*
 - Wu & Huang (2009)
 - Yeh *et al.* (2010)
- DME Multivariada
 - Rilling *et al.* (2007)
 - Rehman & Mandic (2010)
- *Intrinsic Time-Scale Decomposition*
 - Frei & Osorio (2007)

Referências I



M.G. Frei and I. Osorio.

Intrinsic time-scale decomposition: time–frequency–energy analysis and real-time filtering of non-stationary signals.

Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, 463(2078):321, 2007.



P. Flandrin, G. Rilling, and P. Goncalves.

Empirical mode decomposition as a filter bank.

Signal Processing Letters, IEEE, 11(2):112–114, 2004.



D. Gabor.

Theory of communication. part 1: The analysis of information.

Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering, Journal of the Institution of, 93(26):429–441, 1946.

Referências II



N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung, and H.H. Liu.

The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis.

Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 454(1971):903, 1998.



N.E. Huang, Z. Shen, and S.R. Long.

A new view of nonlinear water waves: The hilbert spectrum.

Annual Review of Fluid Mechanics, 31(1):417–457, 1999.



G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves, and J.M. Lilly.

Bivariate empirical mode decomposition.

Signal Processing Letters, IEEE, 14(12):936–939, 2007.

Referências III



N. Rehman and DP Mandic.

Multivariate empirical mode decomposition.

Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, 466(2117):1291, 2010.



Z. Wu and N.E. Huang.

Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method.

Advances in Adaptive Data Analysis, 1(1):1–41, 2009.



J.I.A.R. Yeh, J.S. Shieh, N.E. Huang, Qin Wu, S.D.

Riemenschneider, S.M.A. Bhuiyan, J.F. Khan, R.R. Adhami, S.T.G.R. Kanth, T.Y. Kong, et al.

Complementary ensemble empirical mode decomposition: A novel noise enhanced data analysis method.

JIA, 2(2), 2010.

