Animação Computacional de Fluidos via Métodos Baseados em Partículas

Gilson Antonio Giraldi

Antonio Lopes Apolinário Junior

Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC/MCTI

Universidade Federal da Bahia - UFBA

Fev 21th, 2017

Roteiro do Mini-Curso

1. Primeiro Dia
2. Introdução e Apresentação dos Professores
3. Fluxo de Dados na Animação Computacional de Fluids
    1. Modelo da Cena
    2. Simulação de Fluidos
    3. Técnicas de Rendering
4. Segundo Dia
5. Método SPH
    1. Equações de Navier-Stokes para Animação de Fluidos
    2. Aproximação via Núcleos de Suavização
    3. Interação com a Fronteira
6. Método de Lattice Boltzmann
    1. Aproximação BGK
    2. Função de Distribuição de Equilíbrio
    3. Modelos 2D e 3D
    4. Condições de Contorno

Objetivo e Motivação

O objetivo do minicurso é a apresentação das técnicas de SPH e LBM para animação de fluidos, bem como de métodos apropriados de rendering para a geração de efeitos visuais a partir das simulações executadas.

Motivação: Onde queremos chegar?

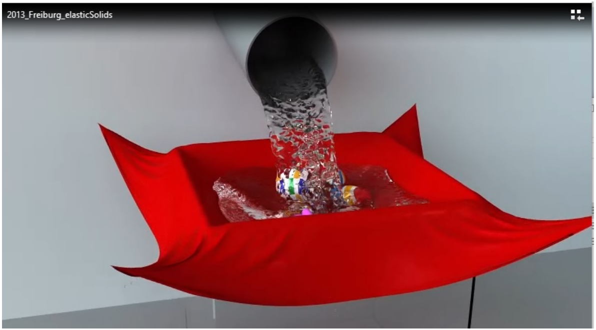


Figura: Gerada na Universidade de Freiburg. Ver Video01.

Motivação: Onde estamos?

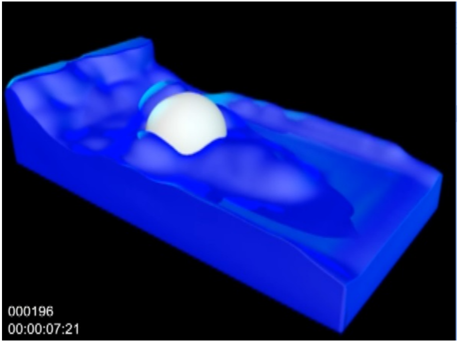


Figura: Web site: http://visfluid.lncc.br/videos.html. Ver Video02.

Aplicações: Efeitos visuais para cinema, televisão, industria de jogos eletrônicos, visualização científica e simuladores [Siggraph, 2015, Pixar, 2016]

Aplicações: Visualização Científica em Medicina

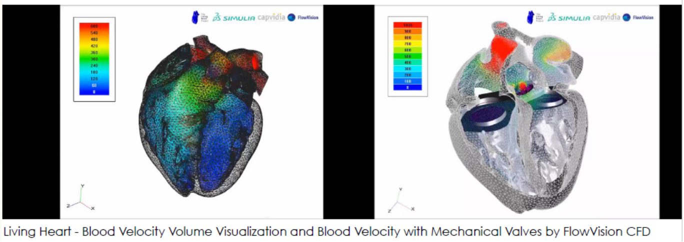


Figura: Animação de campos escalares/vetoriais em hemodinâmica computacional. Ver Video03.

Aplicações: Visualização Científica em Medicina

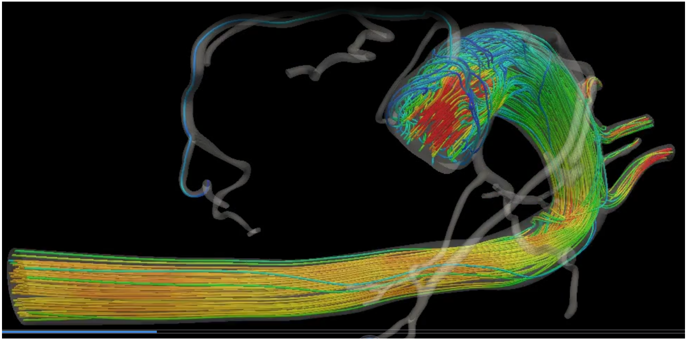


Figura: Animação de campos escalares/vetoriais em hemodinâmica para simuladores.

Aplicações: Visualização Científica em Engenharia

- Engenharia

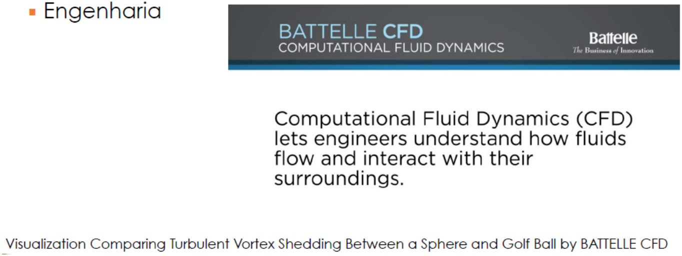


Figura: Animação de campos escalares/vetoriais em engenharia.

Aplicações: Visualização Científica em Engenharia

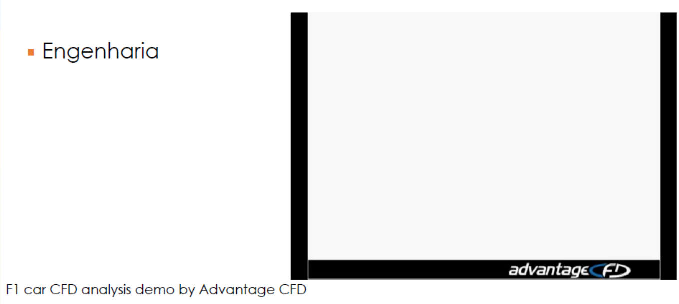


Figura: Animação de campos escalares/vetoriais em engenharia automobilística.

Aplicações: Efeitos artisticos

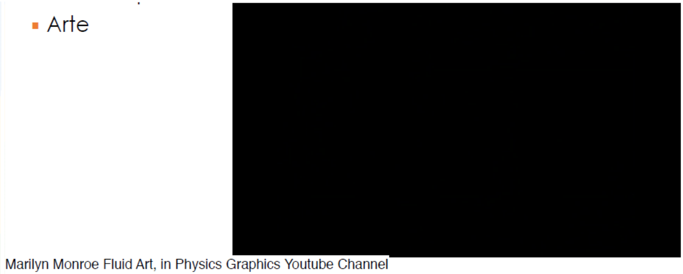


Figura: Geração de efeitos visuais via animação de fluidos.

Aplicações: Efeitos visuais para Propagandas

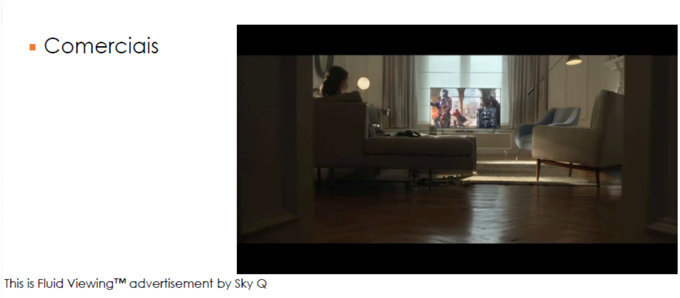


Figura: Geração de efeitos visuais, via animação de fluidos, para propagandas.

Aplicações: Efeitos visuais para Jogos

Figura: Geração de efeitos visuais, para jogos via animação de fluidos.

Aplicações: Efeitos visuais para Cinema

Figura: Geração de efeitos visuais, para filmes via animação de fluidos.

Animação: Conferencias, Web Sites e Livros

- Siggraph 2016 [ACM, 2016]
- Sibgrapi 2016 [SBC, 2016]
- Pixar [Pixar, 2016]
- ACM Trans. on Graphics [Siggraph, 2015]
    - Livros:
    - The Art of Fluid Animation [Stam, 2015]
    - Fluid simulation for computer graphics [Bridson, 2008]
    - Fluid Frames: Experimental Animation with Sand, Clay, Paint, and Pixels [Parks, 2015]
    - Foundations of Physically Based Modeling and Animation[House and Keyser, 2016]
    - Physics-based Animation [Erleben et al., 2005]
    - Physically Based Rendering: From Theory To Implementation [Pharr and Humphreys, 2010]

Animação: Softwares e Bibliotecas

- RenderMan [Pixar, 2017]
- POV-Ray [POV-Ray, 2017]
- Physics for Rendering [PBRT, 2016]
- Blender [Fundation, 2017, Motion, 2015]
- RealFlow [Limit, 2016]

Figura: Pixar's PhotoRealistic RenderMan and 'Finding Nemo'.

Animação de Fluídos

Fluxo de Dados em Animação de Fluídos

- Modelo Geométrico da Cena
- Modelo Físico de Fluidos
  - Equações de Navier-Stokes e Diferenças/Elementos Finitos
  - Método *Lattice-Boltzmann* (LBM)
  - Método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH)
  - Outros.
- Modelos de iluminação (rendering)

Modelagem da Cena

Representação da geometria dos objetos

- Malhas poligonais e subdivisão espacial

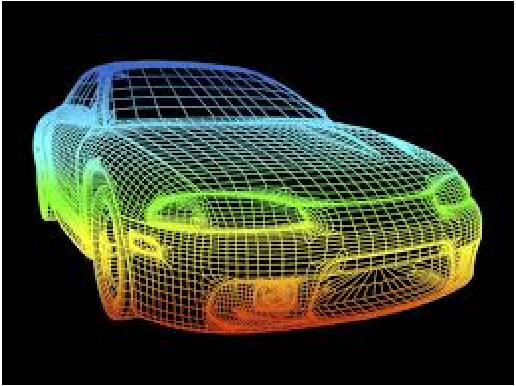


Figura: From https://www.lifewire.com/

Representação da geometria dos objetos

- Nuvens de Pontos

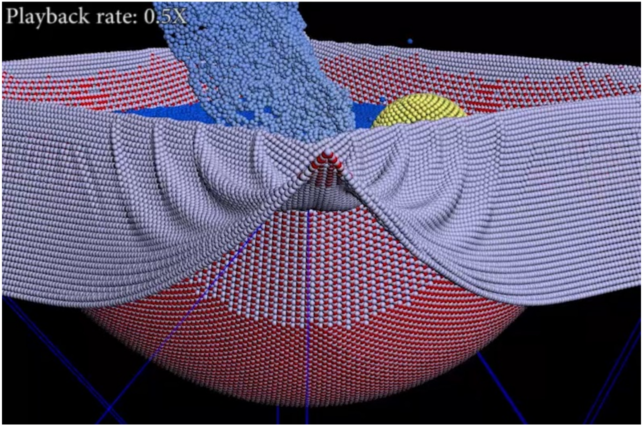


Figura: From Freiburg University. Ver Video01.

Representação da geometria dos objetos

- Superfícies NURBS

Figura: From https://www.behance.net/.

Modelos Físicos e Simulação de Fluidos

- Definição de domínio
- Interação com fronteira do dominio
- Interação com objetos da cena
- Modelo de fluido
- Inicialização do fluido
- Simulação do sistema
- Resultado: Campos escalares e/ou vetoriais

Figura: https://youtu.be/6hiyYoKSXQ0. Ver Video04.

Convertendo dados em Imagens

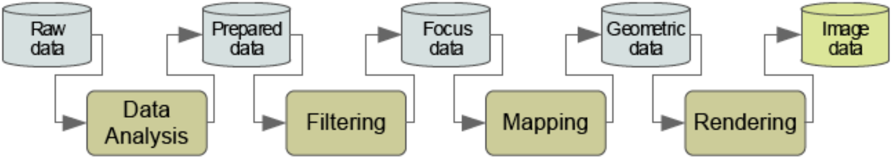


Figura: Pipeline generico para geração de imagens a partir de dados numericos.

Modelos de Iluminação: Rendering

Slides Prof. Antonio Lopes

Breve Histórico

- Um trabalho pioneiro na área de animação de fluidos via DFC foi o de [Foster and Metaxas, 1997], usando diferenças finitas.
- Em 1999 Jos Stam propõe uma solução para o custo computacional elevado do método de Foster e Metaxas [Stam, 1999]
- Patrick Witting considerou um modelo mais completo que os anteriores, onde o fluido (gás) é compressível e o modelo matemático envolve equações termodinâmicas [Witting, 1999].
- Trabalho de Müller at. al. (2003) que usou o SPH com métodos com interação entre líquidos e sólidos.
- LBM para simulação de sistemas complexos [Chopard et al., 1998]

Animação de Fluidos Baseada em Física

- Consiste em aplicar técnicas de dinâmica de fluidos computacional (DFC) computação gráfica na geração de efeitos visuais.
- O nível de realismo depende do tipo de animação.
- Área interdisciplinar.
- Envolve conceitos em Dinâmica de Fluidos, Rendering e Modelagem Geométrica.
- Desenvolvimento de aplicativos com interfaces gráficas convenientes, permitindo o uso dos recursos desenvolvidos por animadores e *designers*.
- Aplicações para simuladores em medicina

Campos Escalares

$$s = f(x, y, z); \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

- Volume discretizado
  - voxels
- Amostragem
- Reconstrução

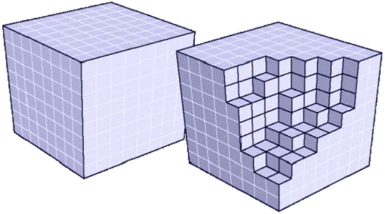


Figura: Conceitos fundamentais em campos escalares.

Campos Vetoriais

- Campo Vetorial

$$X : I \times \Delta \rightarrow \Re^3$$

- Caso Estacionário

$$X : \Delta \rightarrow \Re^3$$

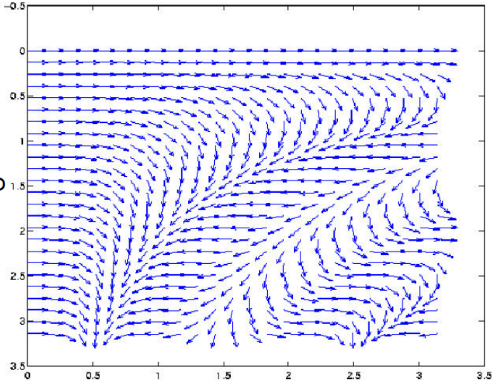


Figura: Conceitos fundamentais em campos vetoriais.

Visualização de Campos Vetoriais

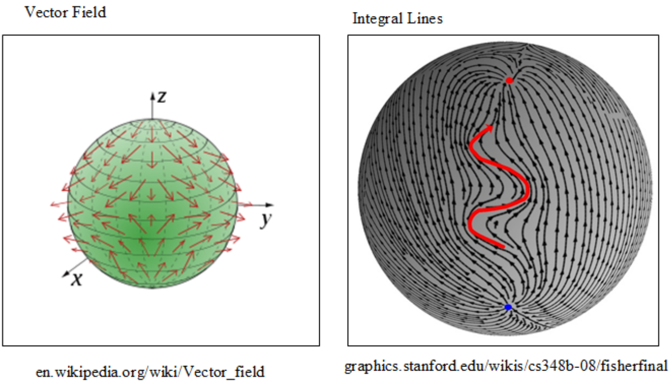


Figura: Visualização de campos vetoriais [Rosenblum et al., 1994].

Equações da Dinâmica de Fluidos

Equações de Navier-Stokes: Caso Escoamento incompressível:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Onde:

- $-\nabla p$ é o fluxo oriundo de regiões de alta pressão em direção à região de baixa pressão.
- $\nu \Delta \mathbf{u}$ é um termo dissipativo, com $\nu = \mu/\rho$ sendo a viscosidade cinemática.

Equações da Dinâmica de Fluidos

Condições Iniciais e de contorno

$$\mathbf{v}(x, y, z, 0) = \mathbf{v}_0(x, y, z), \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_{\partial\Omega} = g, \tag{4}$$

onde $\partial\Omega$ denota a fronteira do domínio Ω do fluido e g é uma função definida em $\partial\Omega$.

Equações de Navier-Stokes (Formulação Lagrangiana)

Equação da Continuidade

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

Equação do Momento

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}), \tag{6}$$

onde $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ é chamado derivada material.

Para fluidos incompressíveis, temos $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$

Teoria Cinética para Fluidos

Equação de *Boltzmann*

$$\partial_t f + \vec{v}\partial_{\vec{x}} f + \vec{F}\partial_{\vec{v}} f = \int dv_1' dv_2' dv_2 (f_1' f_2' - f_1 f_2) P_{12\to 1'2'}, \tag{7}$$

- $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é a velocidade microscópica,
- $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ indica posição no espaço,
- $\vec{F}$ é a distribuição de forças externas,
- f é distribuição de densidade de partículas,
- Termo de colisão: membro direito de (7)

Teoria Cinética para Fluidos

Equação de *Boltzmann*

Em [Wagner, 2008] demonstra-se que a dinâmica da Equação de *Boltzmann* evolui no sentido de minimizar o Funcional H, dado por:

$$H(t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) \log(f(\vec{x}, \vec{v}, t)) dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3. \quad (8)$$

Distribuição de Equilíbrio

Distribuição f^{eq} que minimiza o Funcional H, para um sistema confinado em um volume V, sob certas restrições de densidade e energia:

$$f^{eq} = \frac{n}{(2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{v} - \vec{u})^2}{2\theta}\right]. \quad (9)$$

Teoria Cinética para Fluidos

Simplificação do Termo de Colisão: Modelo BGK

Parêmetro de de relaxação τ:

$$\int dv_1' dv_2' dv_2 (f_1' f_2' - f_1 f_2) P_{12\to 1'2'} \approx \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f). \tag{10}$$

Equação de *Boltzmann* Simplificada

$$\partial_t f + \vec{v}\partial_{\vec{x}} f + \vec{F}\partial_{\vec{v}} f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f). \tag{11}$$

Modelo para Atualização da distribuição f

$$\partial_t f + \vec{v}\partial_{\vec{x}} f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) - \vec{F}\partial_{\vec{v}} f. \tag{12}$$

Métodos para Animação de Fluidos

Baseados na discretização das equações contínuas de Navier-Stokes:

- Elementos Finitos
- Volumes Finitos
- Diferenças Finitas
- Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

Baseados na dinâmica de micro-partículas:

- Autômato Celular do tipo *Lattice-Gas* (LGCA)
- Método *Lattice-Boltzmann* (LBM)

Métodos para Animação de Fluidos

Autômato Celular do tipo *Lattice-Gas* (LGCA):

- Classe de Autômato Celular.
- Partículas pontuais movendo-se em um reticulado.
- Regras apropriadas para imitar dinâmica molecular discreta.

Métodos FHP: Caso particular de LGCA

- Introduzido por Frisch, Hasslacher e Pomeau em 1986.
- Abstração de um fluido bidimensional em escala microscópica.
- Reticulado Triangular (por razões de simetria).

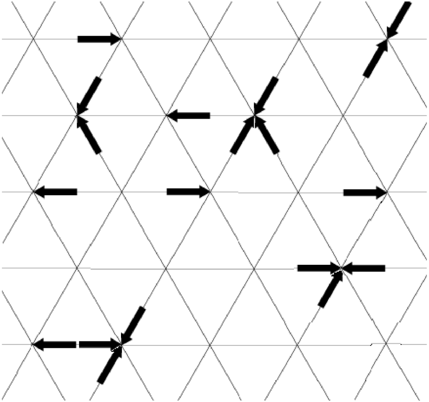


Figura: FHP micro-dinamica e Lattice.

FHP - Regras

- Em geral, as partículas movem-se pelas arestas da malha.
- Princípio de exclusão.
- Condições de fronteira.

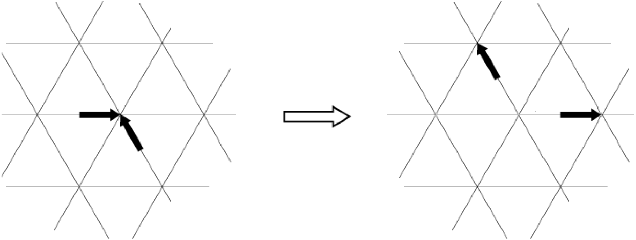


Figura: FHP Evolução de duas partículas do FHP após um passo de tempo.

FHP - Regras de Colisão

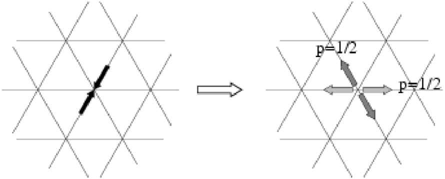


Figura: Colisão de duas partículas no FHP.

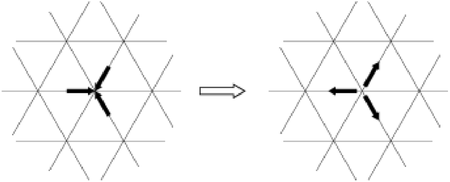


Figura: Colisão de três partículas no FHP.

FHP - Velocidades

- Representação das direções das partículas.

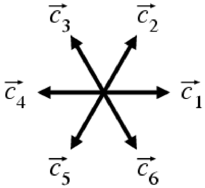


Figura: Representação das direções no FHP.

- Cada $\vec{c}_i$ é dado por

$$\vec{c}_i = \left(\cos\frac{2\pi i}{6}, \sin\frac{2\pi i}{6}\right). \tag{13}$$

FHP - Microdinâmica

- Definimos os números de ocupação:

$$n_i\left(\vec{r}, t\right)$$

  como sendo o número de partículas entrando na célula $\vec{r}$ no instante t com velocidade na direção $\vec{c}_i$, onde $i = 1, 2, \ldots, 6$.
- Os números n_i podem ser 0 ou 1.
- Passo de tempo: Δ_t
- Passo de espaço: Δ_r.

FHP - Microdinâmica

- Equação de evolução das partículas:

$$n_i\left(\vec{r} + \Delta_r \vec{c}_i, t + \Delta_t\right) = n_i\left(\vec{r}, t\right) \tag{14}$$

onde não estamos considerando colisões.

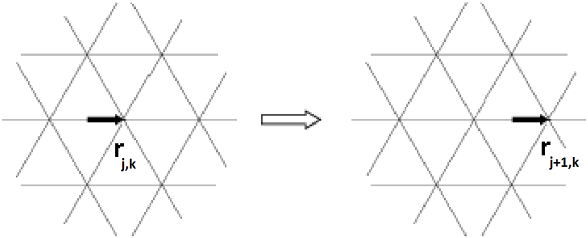


Figura: Movimento de uma partícula no FHP.

FHP - Microdinâmica com Colisão

- $$n_i\left(\vec{r}+\Delta_r\vec{c}_i, t+\Delta_t\right) = n_i\left(\vec{r}, t\right)+\Omega_i \tag{15}$$

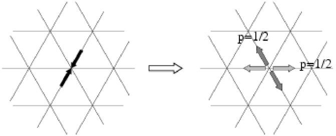


Figura: Colisão de duas partículas no FHP.

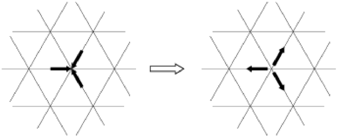


Figura: Colisão de três partículas no FHP.

FHP - Quantidades Macroscópicas

- Média:

$$N_i\left(\vec{r},t\right) = \left\langle n_i\left(\vec{r},t\right)\right\rangle \tag{16}$$

- Densidade média de partículas:

$$\rho\left(\vec{r},t\right) = \sum_{i=0}^{z} N_i\left(\vec{r},t\right). \tag{17}$$

FHP - Quantidades Macroscópicas

- Corrente de partículas:

$$\rho\left(\vec{r},t\right)\vec{u}\left(\vec{r},t\right)=\sum_{i=0}^{z}\vec{v}_i N_i\left(\vec{r},t\right). \tag{18}$$

- Tensor de momentum

$$\Pi_{\alpha\beta}=\sum_{i=0}^{z}\vec{v}_{i\alpha}\vec{v}_{i\beta}N_i\left(\vec{r},t\right). \tag{19}$$

- A partir da definição dessas quantidades e da Expansão Multiescala de Chapman-Enskog pode-se obter as equações de Continuidade e Navier-Stokes para fluidos.
- **FHP videos [Kralj, 2010]. Ver Video08.**

Métodos para Animação de Fluidos

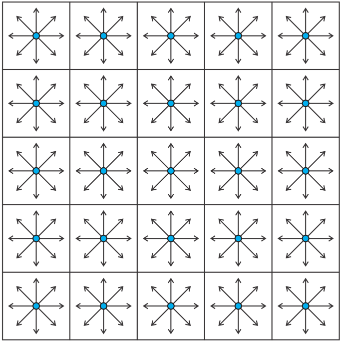
Método *Lattice-Boltzmann* (LBM):

- Aplicado com sucesso em simulações de fluidos e fenômenos de transporte associados.
- Aplicado em animação computacional.
- Simulação acontece em malhas regulares, com regras de evolução simples.
- Fácil paralelização do algoritmo.

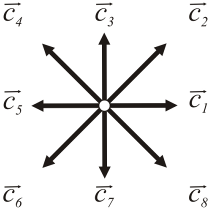
Método de *Lattice-Boltzmann*

- LBM:
  - Método numérico baseado em equações cinéticas formuladas em uma escala mesoscópica.
  - Simula a dinâmica de fluidos em uma escala macroscópica.
- Originou-se dos Autômatos Celulares do tipo *Lattice-Gas* (LGCA).
- Extensão da dinâmica booleana dos autômatos celulares para se trabalhar diretamente com valores numéricos reais representando probabilidades de presença de partículas (McNamara e Zanetti, 1988).

Método de *Lattice-Boltzmann*



Modelo D2Q9:



- O domínio é discretizado em uma malha regular.
- Cada célula armazena distribuições de probabilidade de partículas (f_i) em cada direção de movimento ($\mathbf{c}_i$).

Método de *Lattice-Boltzmann*

- No LBM a dinâmica é dada por:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)), \tag{20}$$

onde:

  - f_i é a função de distribuição de probabilidade de partículas,
  - $\mathbf{c}_i$ representa as possíveis direções de movimento,
  - Ω_i é o operador de colisão.

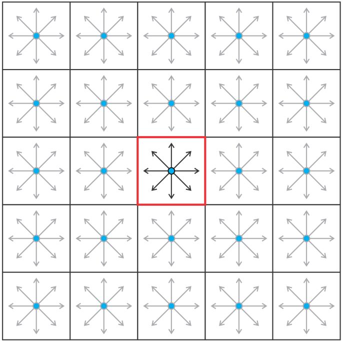
- O operador de colisão com aproximação BGK é dado por:

$$\Omega_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = -\frac{1}{\tau}\left(f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)\right), \tag{21}$$

onde:

  - τ é o termo de relaxamento, o qual está relacionado com os fenômenos difusivos no problema (viscosidade do fluido),
  - f_i^{eq} é a função de distribuição de equilíbrio local.

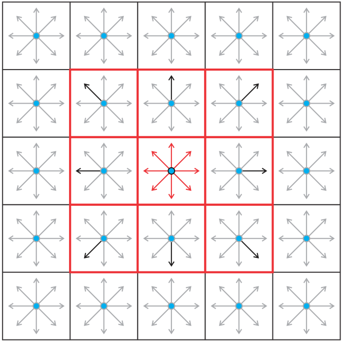
Método de *Lattice-Boltzmann*



- Dinâmica: etapa de colisão.

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t)[1 - \frac{1}{\tau}] + \frac{1}{\tau} f_i^{eq}(\mathbf{x}, t). \quad (22)$$

Método de *Lattice-Boltzmann*



- Dinâmica: etapa de espalhamento.

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t). \tag{23}$$

Modelo D2Q9

- A função de distribuição de equilíbrio é dada por:

$$f_i^{eq} = \rho\omega_i \left[1 + 3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right], \qquad (24)$$

onde:

$$\omega_0 = \frac{4}{9}, \quad \omega_i = \frac{1}{9}, \ (i = 1, 3, 5, 7), \quad \omega_i = \frac{1}{36}, \ (i = 2, 4, 6, 8).$$

- As quantidades macroscópicas de massa específica (ρ) e velocidade ($\mathbf{u}$) são dadas respectivamente por:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{8} f_i(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=1}^{8} f_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_i.$$

Inicialização do LBM

- O processo de inicialização utilizado é atribuir como valor inicial, a cada uma das 9 f_i's em cada célula, a própria função de equilíbrio:

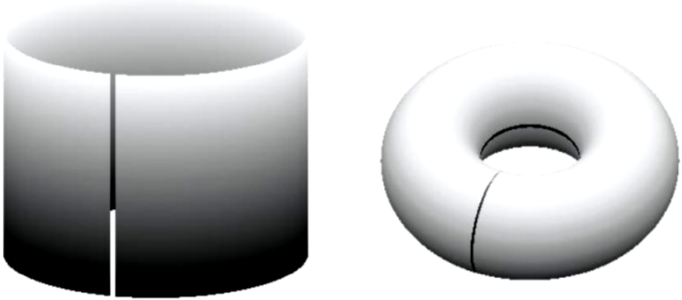
$$f_i(x, y, 0) = f_i^{eq}(\rho(x, y, 0), \mathbf{u}(x, y, 0)), \tag{25}$$

onde as quantidades macroscópicas em $t = 0$ são conhecidas (valores dados).

- A condição de contorno implementada é a que impõem valores de velocidade (não necessariamente nula) nas células da fronteira (Zou e He, 1997).

Condição de Fronteira

- Bounce-back: reflexão na fronteira.
- Condição de fronteira periódica (Figura 51)

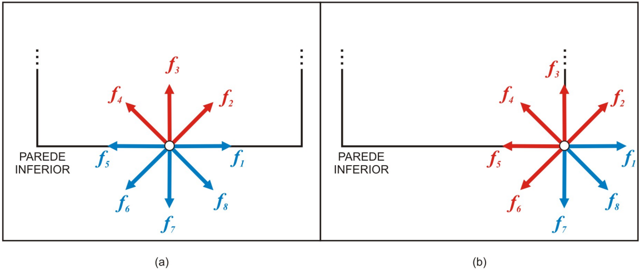


Condição de Fronteira

- Condição de fronteira baseada em equações de concervação:

$$f_i - f_i^{eq} = f_{i+z/2} - f_{i+z/2}^{eq}, \tag{26}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{8} f_i(\mathbf{x}, t), \qquad \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{8} f_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_i.$$



Análise Multi-Escala

- Expansão de Chapman-Enskog

$$f_i(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta x, t+\Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_t^n f_i(\vec{x},t) \tag{2.61}$$

$$f_i(\vec{x},t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_i^{(n)}(\vec{x},t) \tag{2.62}$$

$$\partial_t = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \partial_{t_n} \tag{2.63}$$

onde $\varepsilon = \Delta t$, $D_t = (\partial_t + \vec{e}_i \cdot \nabla)$ e D_t^n indica a n-ésima aplicação de D_t, onde $D_t^0 = 1$.

Análise Multi-Escala

- Propriedades de Simetria e Tensoriais da Lattice 3D

seguintes propriedades do *lattice* $D3Q19$,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i = 2v^2\mathbf{I}^{(2)}\\ \displaystyle\sum_{i=7}^{18}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i = 8v^2\mathbf{I}^{(2)}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{3}v^2\mathbf{I}^{(2)}, \qquad (2.69)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i = 2v^2\mathbf{I}^{(4)}\\ \displaystyle\sum_{i=7}^{18}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i = 4v^2(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}^{(4)})\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}^{(4)} = \frac{1}{9}v^4\mathbf{\Lambda} \qquad (2.70)$$

- Questão Interessante: Multi-Escala Física $\times$ Multi-Escala Visual

Métodos para Animação de Fluidos

Método *Lattice-Boltzmann* (LBM):

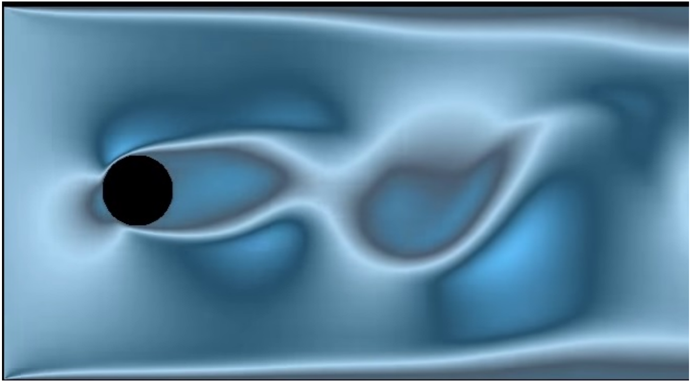


Figura: LBM for fluid simulation [Softology, 2010]. Ver Video09.

Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH

Os elementos fundamentais do método SPH são os núcleos de interpolação $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ e um sistema de partículas $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \ldots, M$, que representa uma versão discreta do fluido.

Propriedades do Núcleo

$$\int W\left(x - x', h\right) dx' = 1 \tag{27}$$

onde a constante h é usada para definir o suporte do núcleo de suavização. Além disto, W deve possuir *suporte compacto*, ser *monotonicamente decrescente*, ou seja, $W\left(x_i\right) \geq W\left(x_j\right)$, para $|x_i| < |x_j|$, ser uma função par e suave, bem como se comportar como a função Delta de Dirac para $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} W\left(x - x', h\right) = \delta\left(x - x'\right). \tag{28}$$

Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH

Representação via Núcleo no Continuo

Partindo destas propriedades, dada uma função escalar f, o método SPH aproxima esta função partindo da sua representação via o núcleo de suavização W:

$$\langle f(x) \rangle = \int f\left(x'\right) W\left(x - x', h\right) dx'. \tag{29}$$

Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH

Representação Discreta via Núcleo

Se $f(x)$ é conhecida apenas em alguns pontos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ do seu domínio:

$$f(x') = \sum_{j=1}^{N} \delta(x' - x_j) f(x_j) (dx)_j \,, \tag{30}$$

Inserindo esta expressão na equação (29), e substituindo o elemento de volume por:

$$(dx)_j = \frac{m_j}{\rho(r_j)},$$

onde $\rho(r_j)$ é a densidade na posição r_j, obtem-se:

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho(r_j)} f(x_j) W(x - x_j, h) \tag{31}$$

Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH

Os elementos fundamentais do método SPH são os núcleos de interpolação $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ e um sistema de partículas $\mathbf{q}^i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \ldots, M$, que representa uma versão discreta do fluido.

Aproximação de uma função A e seu gradiente via SPH

$$\langle A(\mathbf{q}^i) \rangle = \sum_{j=1}^{M} \frac{m_j}{\rho(\mathbf{q}^j)} A(\mathbf{q}^j) W(\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^j, h), \tag{32}$$

$$\langle \nabla A(\mathbf{q}^i) \rangle = \sum_{j=1}^{M} \frac{m_j}{\rho(\mathbf{q}^j)} A(\mathbf{q}^j) \nabla_i W(\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^j, h), \tag{33}$$

A partir de agora usaremos $\nabla_i W_{ij} = \nabla_i W(\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^j, h)$, h é o suporte do núcleo e $\rho\left(\mathbf{q}^j\right)$, a massa específica da partícula na posição $\mathbf{q}^j$.

SPH Descrito em [Müller et al., 2003]

Densidade, Forças de Pressão e Viscosidade

$$\langle \rho(x) \rangle = \sum_{j=1}^{N} m_j W(x - x_j, h), \tag{34}$$

$$f_i^{pressao} = -\langle \nabla p \rangle = -\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{p(x_j) + p(x_i)}{\rho(x_j)} \right) \nabla_x W(x_i - x_j, h), \tag{35}$$

$$f_i^{visc} = \mu \left\langle \nabla^2 \vec{v}(x,t) \right\rangle = \mu \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\frac{\vec{v}(x_j) - \vec{v}(x_i)}{\rho(x_j)} \right] \nabla_x^2 W(x_i - x_j, h). \tag{36}$$

SPH Descrito em [Müller et al., 2003]

Equação de Estado e Interação com Fronteiras

- Equação de Estado

$$p = k\left(\rho - \rho_0\right), \tag{37}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e ρ_0 é a densidade inicial.

- Tensão Superfícial

$$t^{slivre} = \sigma\kappa\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}, \tag{38}$$

onde σ é um parâmetro, κ é a curvatura

- Condição de Fronteira: Reflexão

SPH Descrito em [Müller et al., 2003]

Esquema Numérico: Leapfrog

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = Q_i^t, \tag{39}$$

onde:

$$Q_i^t = \frac{f_i^{pressao} + f_i^{visc} + \rho_i^t \vec{g}_i + t_i^{slivre} + F_i^{fronteira}}{\rho_i^t} \tag{40}$$

Leapfrog

$$\vec{v}_i^{t+\Delta t} = \vec{v}_i^t + \frac{\delta t}{2} Q_i^t, \tag{41}$$

$$r_i^{t+\Delta t} = r_i^t + (\delta t) \cdot \vec{v}_i^{t+\Delta t}, \tag{42}$$

onde δt é o passo no tempo.

Modelo Implementado em [da Silva, 2016]: Aceleração da Partícula i

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = -\frac{\nabla p^i}{\rho^i} + \frac{1}{\rho^i}\left(\mu\Delta\mathbf{v}^i + \sum_{j\in V_i} m_j \Pi^{ij}\nabla_i W_{ij} + \mathbf{S}^i + \Gamma^{ig} + \mathbf{F}_i\right).$$

Modelo Implementado em [da Silva, 2016]: Aceleração da Partícula i

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = \boxed{-\frac{\nabla p^i}{\rho^i}} + \frac{1}{\rho^i}\left(\mu\Delta\mathbf{v}^i + \sum_{j\in V_i} m_j \Pi^{ij}\nabla_i W_{ij} + \mathbf{S}^i + \Gamma^{ig} + \mathbf{F}_i\right).$$

- Gradiente de Pressão

$$\boxed{-\frac{\nabla p^i}{\rho^i} = -\sum_{j\in V_i} m_j \left(\frac{p^i}{(\rho^i)^2} + \frac{p^j}{(\rho^j)^2}\right)\nabla_i W_{ij}}$$

Modelo Implementado em [da Silva, 2016]: Aceleração da Partícula i

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = -\frac{\nabla p^i}{\rho^i} + \frac{1}{\rho^i}\left(\boxed{\mu \Delta \mathbf{v}^i} + \sum_{j \in V_i} m_j \Pi^{ij} \nabla_i W_{ij} + \mathbf{S}^i + \Gamma^{ig} + \mathbf{F}_i \right).$$

- Gradiente de Pressão
- Termo de viscosidade

$$\mu \Delta \mathbf{v}^i = 2\mu \sum_{j \in V_i} \frac{m_j}{\rho^j} \mathbf{v}^{ij} \frac{\mathbf{x}^{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{\left(r^{ij}\right)^2}$$

$$\mathbf{v}^{ij} = \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^j \text{ e } \mathbf{x}^{ij} = \mathbf{q}^i - \mathbf{q}^j$$

Modelo Implementado em [da Silva, 2016]: Aceleração da Partícula i

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = -\frac{\nabla p^i}{\rho^i} + \frac{1}{\rho^i}\left(\mu\Delta\mathbf{v}^i + \sum_{j\in V_i} m_j\, \boxed{\Pi^{ij}}\, \nabla_i W_{ij} + \mathbf{S}^i + \Gamma^{ig} + \mathbf{F}_i\right).$$

- Gradiente de Pressão
- Termo de viscosidade
- Viscosidade artificial

$$\Pi^{ij} = \begin{cases} \dfrac{-2(a\varphi_{ij}c + b\varphi_{ij}^2)}{\rho^i + \rho^j}, & \mathbf{v}^{ij}\cdot\mathbf{x}^{ij} < 0 \\ 0, & \mathbf{v}^{ij}\cdot\mathbf{x}^{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{(\mathbf{v}^{ij}\cdot\mathbf{x}^{ij})}{\|\mathbf{x}^{ij}\|^2 + 0.01\,h^2}$$

Modelo Implementado em [da Silva, 2016]: Aceleração da Partícula *i*

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = -\frac{\nabla p^i}{\rho^i} + \frac{1}{\rho^i}\left(\mu\Delta\mathbf{v}^i + \sum_{j\in V_i} m_j \Pi^{ij}\nabla_i W_{ij} + \boxed{\mathbf{S}^i} + \Gamma^{ig} + \mathbf{F}_i\right).$$

- Gradiente de Pressão
- Termo de viscosidade
- Viscosidade artificial
- Superfície livre

$$\mathbf{S}^i = -\frac{\kappa}{m^i}\sum_{j\in V_i} m^j W_{ij}\mathbf{x}^{ij}$$

Modelo Implementado em [da Silva, 2016]: Aceleração da Partícula i

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = -\frac{\nabla p^i}{\rho^i} + \frac{1}{\rho^i}\left(\mu\Delta\mathbf{v}^i + \sum_{j\in V_i} m_j \Pi^{ij}\nabla_i W_{ij} + \mathbf{S}^i + \Gamma^{ig} + \mathbf{F}_i\right).$$

- Gradiente de Pressão
- Termo de viscosidade
- Viscosidade artificial
- Superfície livre
- Tratamento de Fronteira

$$\Gamma^{ig} = \begin{cases} D\left[\left(\frac{r_0}{r^{ig}}\right)^{n_1} - \left(\frac{r_0}{r^{ig}}\right)^{n_2}\right] & \frac{r_0}{r^{ig}} \leq 1 \\ 0 & \frac{r_0}{r^{ig}} > 1 \end{cases}$$

Interação com a Fronteira

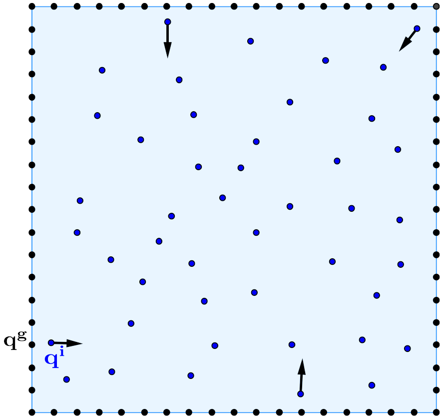


Figura: Força de repulsão sobre $\mathbf{q}^i$ nas proximidades das partículas de fronteira $\mathbf{q}^g$.

Aceleração da Partícula i

$$\mathbf{a}^i = \frac{D\mathbf{v}^i}{Dt} = -\frac{\nabla p^i}{\rho^i} + \frac{1}{\rho^i}\left(\mu\Delta\mathbf{v}^i + \sum_{j\in V_i} m_j \Pi^{ij}\nabla_i W_{ij} + \Gamma^{ig} + \boxed{\mathbf{F}_i}\right).$$

- Gradiente de Pressão
- Termo de viscosidade
- Viscosidade artificial
- Tratamento de Fronteira
- Superfície livre
- Força externa

Cálculo da Velocidade e Posição no SPH

Leap-Frog definido por:

$$\mathbf{v}^{i}_{k+1} = \mathbf{v}^{i}_{k-1} + \Delta t \mathbf{a}^{i}_{k},$$

Cálculo da Velocidade e Posição no SPH

Leap-Frog definido por:

$$\mathbf{v}^i_{k+1} = \mathbf{v}^i_{k-1} + \Delta t \mathbf{a}^i_k,$$

$$\mathbf{v}^i_{k+1} := \mathbf{v}^i_{k+1} + \varepsilon \sum \frac{2m}{\rho^i + \rho^j}(\mathbf{v}^j + \mathbf{v}^i)$$

Cálculo da Velocidade e Posição no SPH

Leap-Frog definido por:

$$\mathbf{v}^i_{k+1} = \mathbf{v}^i_{k-1} + \Delta t \mathbf{a}^i_k,$$

$$\mathbf{v}^i_{k+1} := \mathbf{v}^i_{k+1} + \varepsilon \sum \frac{2m}{\rho^i + \rho^j}(\mathbf{v}^j + \mathbf{v}^i)$$

$$\mathbf{q}^i_{k+1} = \mathbf{q}^i_k + \Delta t \mathbf{v}^i_{k+1}$$

Animação de Fluids via SPH

- Fluido SPH e interação com objetos da cena

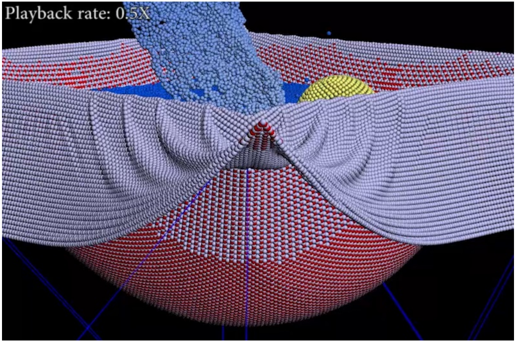


Figura: From Freiburg University. Ver Video01.

Animação de Fluids via SPH

- Visualizando apenas particulas

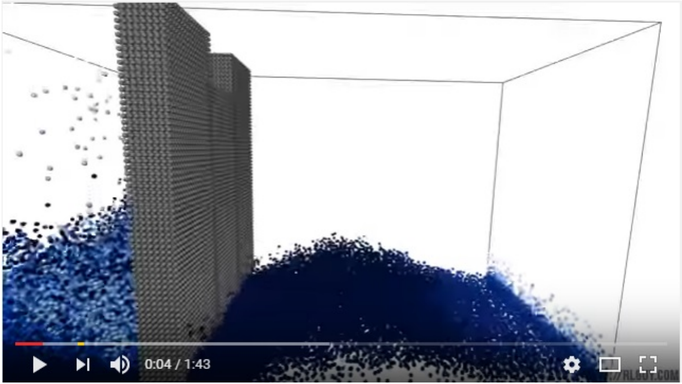


Figura: Fonte [RLGUY, 2015].Ver Video10.

Visualização de Campos Escalares: Isosuperfícies

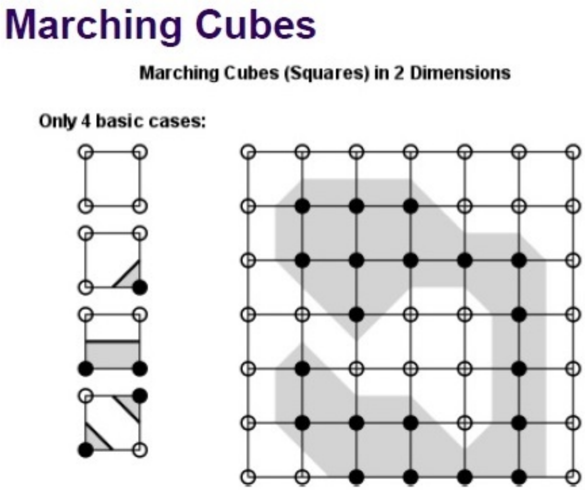


Figura: Conceitos fundamentais em visualização científica [Giraldi et al., 2005].

Aplicação de Isosuperfícies: Animação Envolvendo Superfícies Livres

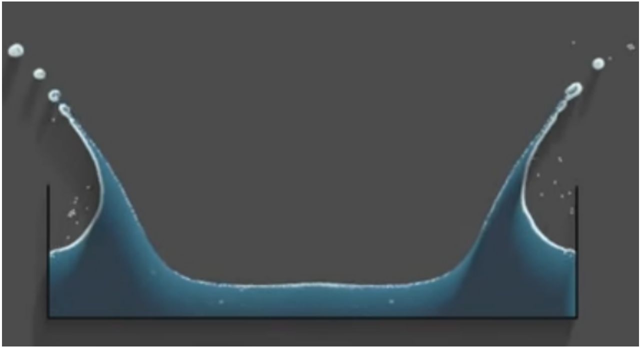


Figura: Conceitos de visualização científica para animação [Giraldi et al., 2005, Belin, 2013]. Ver Video05.

Problema: Extração de Superficie Livre no SPH

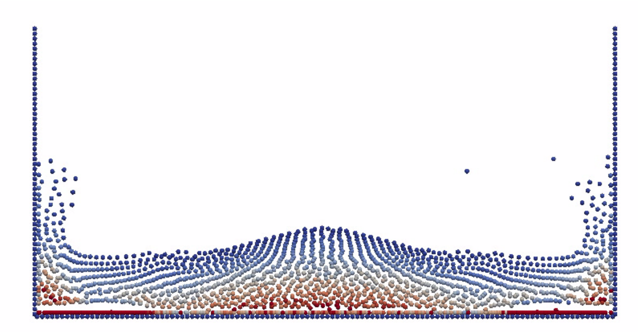


Figura: Conceitos de visualização científica para animação [da Silva, 2016]. Ver Video06.

Animação de Fluidos com Superficie Livre

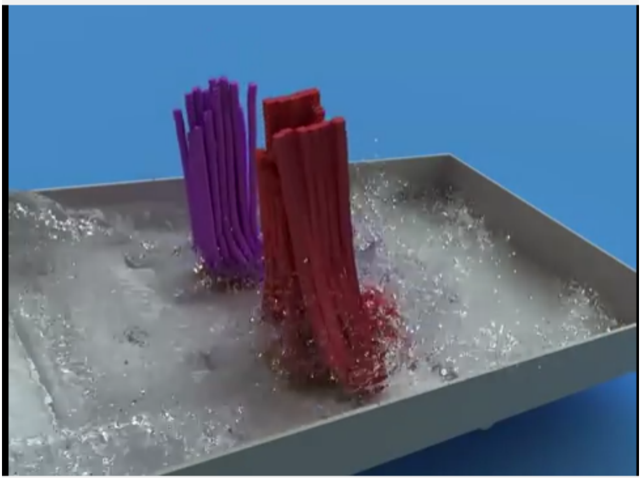


Figura: SPH 3D para animação com superfície livre [N. Akinci, 2013]. Ver Video07.

Experimento *N-roll mill* no SPH

- Histórico: Exp. de Laboratório e Teoria de Catástrofes
- Simulação do *N-roll mill* via SPH
- Visualização usando LIC
- Analise de estruturas topológicas: Singularidades Morse e Não-Morse

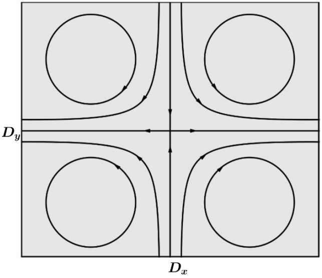


Figura: Esquema da simulação do *N-roll mill* [da Silva, 2016].

Visualização de Campos Vetoriais: Line Integral Convolution

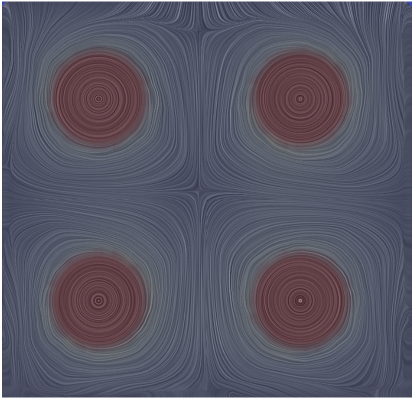


Figura: Campo de velocidades do SPH para o *N-roll mill* [da Silva, 2016].

Rendering de Fluidos

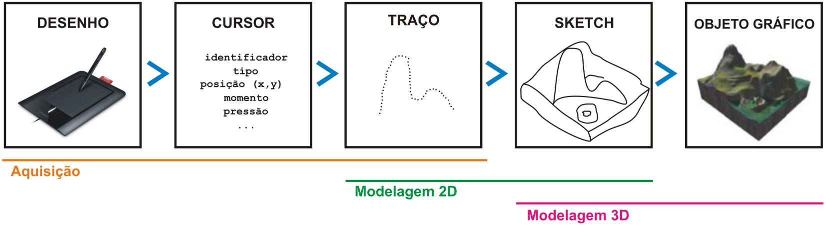
1. Métodos Baseados em Física
2. Modelos de Iluminação
3. Métodos Baseados em Textura

Perspectivas

1. Sketching de fluidos: Interpretar desenhos do usuário como linhas de campo (streamlines)
2. Simulação em superfícies com curvatura

Modelagem Baseada em Sketching

- *Sketch-Based Modeling*: Processo no qual especifica-se modelos geométricos através de desenhos livres realizados pelo usuário.



Modelagem Baseada em Sketching

Sequência de pontos que precisam ser **analisados** e **interpretados** da maneira correta.

- Dispositivos de dados de entrada:
  - *Mouse*
  - Teclado
- Dificuldade de manuseio dos dispositivos:
  - Pouca ou muita informação de entrada.
  - Possível ruídos nos dados iniciais.
- Tratamento dos Dados: Através do uso de filtros.
- Interface Gráfica: Especificar restrições impostas ao usuário.

Visualização de Campos Vetoriais e Sketching

- Streamlines

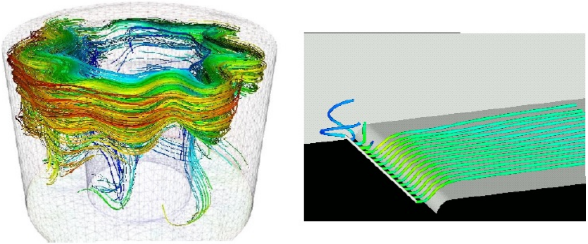
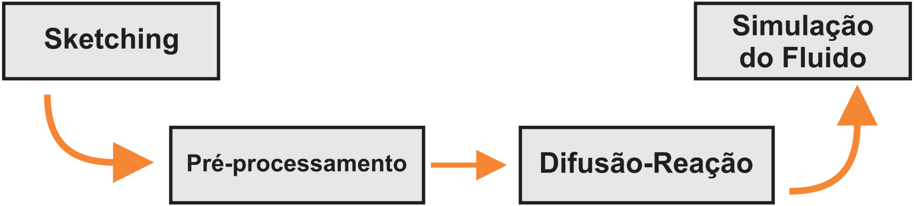


Figura: Diferentes padrões de streamlines.

Sketching de fluidos

- Apresentamos uma metodologia envolvendo inicialização de fluidos bidimensionais usando técnicas de *sketching* juntamente com equações do tipo difusão-reação.

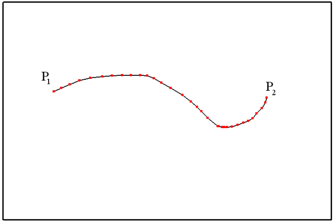


Metodologia Desenvolvida

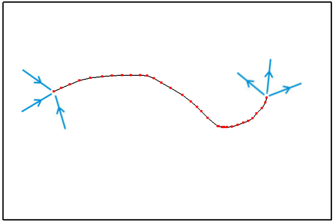
Etapa de Pré-processamento:

- Objetivo é interpretar o *sketching* como linhas de corrente do campo inicial do fluido.
- A ideia é usar o desenho do usuário como suporte para definir uma linha de corrente que atenda os pré-requisitos geométricos e dinâmicos em sua vizinhança.
- Assim, definiremos um campo de velocidades sobre a curva c desenhada pelo usuário.
- Projeção sobre a malha.
- Aplica-se um operador gaussiano sobre o campo obtido na projeção para garantir a suavidade desejada.
- Aplicação de técnicas de difusão-reação.

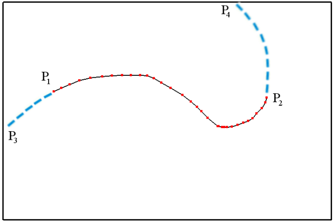
Metodologia Desenvolvida



Sketch do usuário com pontos extremos no interior do fluido.



(a) Criação de pontos singulares.



(b) Prolongamento até a fronteira.

Gradient Vector Flow

- O campo vetorial GVF pode ser encontrado ao se resolver:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{v^0})|\mathbf{v^0}|^2, \qquad (43)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano e $\mathbf{v^0}$ é o campo vetorial inicial.

- O parâmetro μ é um parâmetro de regularização, o qual governa a compensação entre o primeiro termo e o segundo.
- A solução iterativa para o GVF é encontrado aproximando-se as derivadas parciais através de diferenças finitas.

Resultados: *Streamline* simples

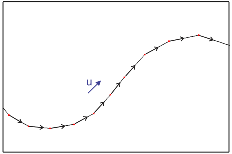


Figura: Sketching: streamline simples.

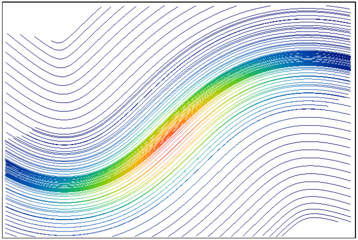


Figura: Linhas de campo do GVF.

Resultados: *Streamline* simples

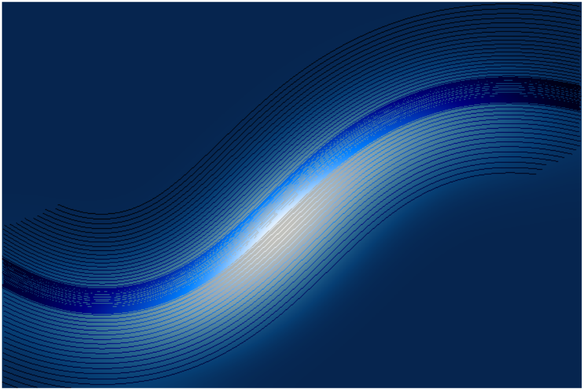


Figura: Visualização do GVF para streamline simples. Ver Video11.

Resultados: Singularidade

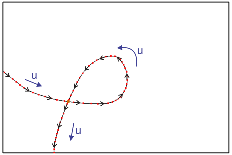


Figura: Sketching: singularidade.

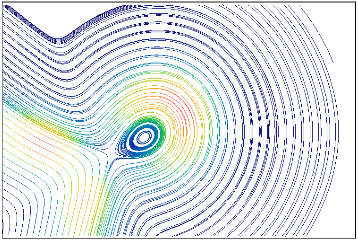


Figura: Linhas de campo do GVF para singularidade.

Resultados: Singularidade: Linhas de campo do GVF

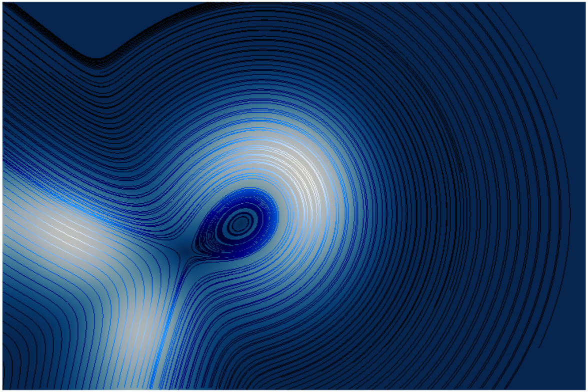


Figura: Visualização do GVF para singularidade. Ver Video12.

Perspectivas em Sketching de fluidos

- Preservação de singularidades pelos métodos de reação-difusão
- Influencia das condições de fronteira
- Estabilidade das singularidades
- Sketching de fluidos em $3D$
- Desenvolvimento de software

Simulação em superfícies via LBM e SPH

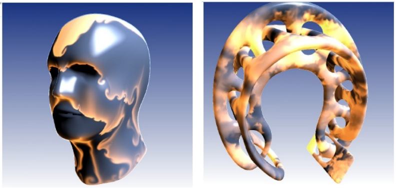


Figura: Navier-Stokes in Catmull-Clark surfaces (source[Stam, 2003])

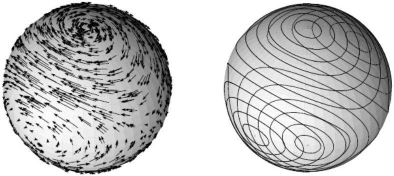


Figura: Campos sobre superfícies genéricas.

Conclusão

- Pesquisas em animação de fluidos envolvem:
  - Métodos matemáticos.
  - Modelos físicos
  - Métodos computacionais
  - Desenvolvimento de software
- Necessidade de HPC
- Aplicações no LNCC: Simuladores para medicina
- Perspectivas no LNCC
  - Sketchingde fluídos
  - Animação de fluidos em superfícies

ACM (2016).
Siggraph.
http://s2016.siggraph.org/programs.

Belin, J. (2013).
SPH 2D with free surface model.
https://www.youtube.com/watch?v=Daxzw1j7kgU.

Bridson, R. (2008).
Fluid simulation for computer graphics.
CRC Press, New York.

Chopard, B., Luthi, P., and Masselot, A. (1998).
Cellular automata and lattice boltzmann techniques: An approach to model and simulate complex systems.
In *Advances in Physics*.

da Silva, L. T. (2016).

Simulação de Fluidos via Smoothed Particle Hydrodynamics: Formulação Variacional, Variação de Parâmetros e Extração de Características Visuais.
PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC). Orientador: Gilson Antonio Giraldi.

Erleben, K., Sporring, J., Henriksen, K., and Dohlman, K. (2005).
Physics-based Animation (Graphics Series).
Charles River Media, Inc., Rockland, MA, USA.

Foster, N. and Metaxas, D. (1997).
Modeling the motion of a hot, turbulent gas.
In *Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '97, pages 181–188, New York, NY, USA. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

Fundation, B. (2017).
Blender: Free and Open Software.
https://www.blender.org/.

Giraldi, G. A., JR., A. L. A., Oliveira, A. A. F., and Feijóo, R. A. (2005).
Animação de fluidos via técnicas de visualização científica e mecânica computacional.
Technical report, LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, Brasil.

House, D. and Keyser, J. (2016).
Foundations of Physically Based Modeling and Animation.
CRC Press.

Kralj, S. (2010).
FHP Simulation.
https://www.youtube.com/watch?v=MuJr69IVvgg.

Limit, N. (2016).
RealFlow.
http://www.realflow.com/.

Motion, M. (2015).

Most Realistic Fluid Settings in Blender.
https://www.youtube.com/watch?v=m-kDn3ODtZM&list=PLE_CMDJXhPQ5tuhHNVTsMXOq9VmkctM8r.

Müller, M., Charypar, D., and Gross, M. H. (2003).
Particle-based fluid simulation for interactive applications.
In *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 154–159.

N. Akinci, M. Ihmsen, G. A. B. S. M. T. (2013).
Versatile Rigid-Fluid Coupling for Incompressible SPH.
https://www.youtube.com/watch?v=chnS24QfgNY.

Parks, C. (2015).
Fluid Frames: Experimental Animation with Sand, Clay, Paint, and Pixels.
Taylor & Francis.

PBRT (2016).
Physics Models for Rendering.

http://www.pbrt.org/.

Pharr, M. and Humphreys, G. (2010).
Physically Based Rendering, Second Edition: From Theory To Implementation.
Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2nd edition.

Pixar (2016).
Pixar On-Line Library.
http://graphics.pixar.com/library/.

Pixar (2017).
RenderMan.
https://rmanwiki.pixar.com/display/REN/RenderMan.

POV-Ray (2017).
Persistence of Vision Raytracer.
http://www.povray.org/.

RLGUY (2015).

SPH particles Animation.
https://www.youtube.com/watch?v=iHACAlfYeiQ.

Rosenblum, L., Earnshaw, R., Encarnacao, J., Hagen, H., Kaufman, A., Klimenko, S., Nielson, G., Post, F., and Thalmann, D. (1994).
Scientific Visualization: Advances and Challenges.
Academic Press.

SBC (2016).
Sibgrapi 2016.
http://gibis.unifesp.br/sibgrapi16/.

Siggraph (2015).
ACM Trans. Graph., 34(4).

Softology (2010).
LBM fluid simulation.
https://www.youtube.com/watch?v=ro4OvF-v00E.

Stam, J. (1999).
Stable fluids.

In *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '99, pages 121–128, New York, NY, USA. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

Stam, J. (2003).
Flows on Surfaces of Arbitrary Topology.
ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2003, 22(3):724.

Stam, J. (2015).
The Art of Fluid Animation.
CRC Press.

Wagner, A. (2008).
A practical introduction to the lattice boltzmann method.
Dept. of Physics, North Dakota State University.

Witting, P. (1999).
Computational fluid dynamics in a traditional animation environment.

In *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '99, pages 129–136, New York, NY, USA. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.