

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Novos Métodos de Elementos Finitos Multi-Escalas:
Teoria e Aplicações**

Por
Diego Paredes Concha

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

JULHO DE 2013

**NOVOS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MULTI-ESCALAS:
TEORIA E APLICAÇÕES**

Diego Paredes Concha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECES-
SÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIENCIAS EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Frédéric Gerard Christian Valentin, Dr.
(Presidente)

Prof. Abimael Dourado Loula, D.Sc.

Prof. Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D.

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

Prof. Philippe Remy Bernard Devloo, Ph.D.

Prof. Rodolfo Antonio Araya Duran, Dr.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
JULHO DE 2013

Paredes Concha, Diego

P227n Novos métodos de elementos finitos multi-escalas: teoria e aplicações /
Diego Paredes Concha. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação
Científica, 2014.

xii, 193 p. : il.; 29 cm

Orientador: Frédéric Gerard Christian Valentin

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2014.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Métodos multi-escalas. 3. Méto-
dos Híbridos. 4. Modelos de Meios Porosos. I. Valentin, Frédéric Gerard
Christian. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 518.25

“Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values. In itself mathematics is an indivisible organism uniting theoretical contemplation and active application.”
(Richard Courant, 1888–1972).

Aos meus muitos Mestres.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer ao Dr. Frédéric Valentin por compartilhar comigo quatro anos de pesquisa séria e de qualidade. Através das instâncias criativas e do árduo trabalho, aprendi com o Fred, a importância da disciplina, da perseverança e do trabalho em equipe. Valores que sem dúvida, procurarei carregar pelo restante da minha vida profissional. Agradeço profundamente a sua integridade, sinceridade e apoio nos momentos difíceis.

Aproveito esta oportunidade para reconhecer a grande influência que, desde o início da minha graduação, teve o Dr. Rodolfo Araya sobre a minha vida acadêmica. Embora não tenha existido um vínculo formal de orientação, credito a ele a inspiração e a motivação na escolha deste caminho. Agradeço a confiança que depositou em mim, a sua ajuda desprendida em diferentes oportunidades e a sua amizade.

No marco profissional devo ainda agradecer a alguns acadêmicos que participando de discussões, contribuíram de diferentes formas a este projeto. Destaco o enorme apoio recebido do meu grande amigo o Dr. Christopher Harder, que muitas vezes assumiu como próprios os desafios deste trabalho, contribuindo enormemente à qualidade da pesquisa. Agradeço também, os diferentes pontos de vista explorados nas discussões com o Dr. Antônio Tadeu, que sempre mostrou entusiasmo nas extensões multidisciplinares abertas por este trabalho. Demonstro igualmente minha gratidão pela ajuda que sempre me ofereceu o Dr. Marcio Borges na definição das possibilidades de aplicação.

Quero agradecer à *Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica* (CONICYT) do Chile, pelo apoio financeiro provido através do seu programa

de bolsas de doutorado no estrangeiro, “Becas-Chile”, possibilitando a realização desta Tese.

Eu não teria conseguido chegar até aqui sem a companhia dos meus seres amados mais próximos. Preciso agradecer a motivação que recebi desde a minha infância por parte do meu Pai, Carlos, que sempre me desafiou a ser o meu próprio concorrente; a compreensão, paciência e amor que, desde as minhas prematuras noites em claro, me entregou minha Mãe, Orene; o sentido crítico que meu irmão Gonzalo despertou em mim, me fazendo questionar as minhas certezas; e a admiração e confiança que sempre demonstrou meu irmão Karlos, me fazendo sentir confiante e privilegiado. Sem dúvida o final deste caminho foi marcado pela companhia amorosa, paciente e fiel da Karine, que esteve presente em todos os momentos de crise e foi a inspiração do meu sorriso nos momentos de alegria. Sem o seu amor o meu fardo teria sido impossível de carregar.

Agradeço aos meus amigos, aqueles que sempre estão disponíveis para fazer companhia sob quaisquer circunstâncias. Meus amigos de infância, Patricio, Mauricio e Mairon, que sempre acreditaram cegamente no sucesso deste trabalho e constantemente me incentivaram a seguir em frente. Aqui no Brasil, encontrei uma amizade sincera em Carla e Rafael, que foram pra mim um suporte emocional fundamental estes anos, e que sempre me beneficiaram com a sua lealdade, generosidade e simpatia. Sempre levarei comigo as muitas noites de discussões interessantes e animadas (regadas por vinho e cachaça).

Finalmente, certo da impossibilidade de incluir nestas poucas linhas todas as pessoas que me acompanharam de uma forma ou outra neste caminho, e ciente da fragilidade da minha memória, agradeço a inspiração, o ânimo, o apoio, a confiança e o carinho de todos aqueles que são anônimos para estas folhas mas certamente lutaram bravamente do meu lado. Sem vocês este trabalho não existiria.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

NOVOS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MULTI-ESCALAS: TEORIA E APLICAÇÕES

Diego Paredes Concha

Julho, 2013

Orientador: Frédéric Gerard Christian Valentin, Dr.

Neste trabalho desenvolvemos e analisamos matematicamente novos métodos de elementos finitos para modelos de fluidos e de transporte com características multi-escalas. Os novos métodos são localmente conservativos, minimizam instabilidades numéricas e são naturalmente adaptados a uma implementação massivamente paralela. Construídos a partir da hibridização dos modelos contínuos, os novos métodos multi-escalas, denominados de MHM (Multiscale Hybrid-Mixed), são inicialmente aplicados à equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos e à equação de transporte com comportamento singularmente perturbado. É apresentada uma análise numérica dos métodos MHM para os quais são demonstradas estimativas de erro a priori e a posteriori. A análise de erro a posteriori é usada na construção de uma nova estratégia de adaptação, própria dos métodos MHM. A motivação para o desenvolvimento dos métodos numéricos e as ferramentas computacionais propostas neste trabalho é sua aplicação à simulação computacional de escoamentos em meios porosos.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

**NEW MULTISCALE FINITE ELEMENT METHODS: THEORY
AND APPLICATIONS**

Diego Paredes Concha

July, 2013

Advisor: Frédéric Gerard Christian Valentin, Dr.

In this work we develop and analyze new finite element methods for fluid and transport models. The new multiscale methods are locally conservative, minimize numerical instabilities and are naturally massively parallelizable. Constructed using a hybridization of the original model, the new Multiscale Hybrid-Mixed (MHM) methods are first applied to solve the Darcy problem with a highly heterogeneous coefficient and then to the transport equation. An *a-priori* and *a-posteriori* numerical analysis of the MHM methods is presented. The *a-posteriori* estimator is used in the construction of a new adaptive strategy which is unique to the MHM methods. The methods proposed in this work are intended to be used in the computational simulation of flows in porous media.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Estrutura da Tese	4
1.2	Notações e definições	5
2	Método MHM para a equação de Darcy	11
2.1	Introdução	11
2.2	Modelo e hibridização	15
2.2.1	Problema de Darcy	15
2.2.2	Formulação híbrida	16
2.2.3	Forma híbrida equivalente: localidade	17
2.2.4	Formulação mista alternativa	20
2.3	Método de elementos finitos multi-escalas	23
2.3.1	Espaços de aproximação	23
2.3.2	Funções de base multi-escalas	24
2.3.3	Relação com métodos existentes	28
2.3.4	Sumário do método MHM	31
2.4	Validações numéricas	33
2.4.1	Problema <i>quarter five-spot</i>	33
2.4.2	Coeficiente de permeabilidade oscilatório	40
2.4.3	Permeabilidade multi-escalas	45
2.5	Conclusões	48

3	Análise Numérica para o método MHM	52
3.1	Introdução	52
3.2	Método híbrido-misto multi-escalas	53
3.3	Definições e resultados preliminares	55
3.4	Existência e unicidade de solução	60
3.5	Melhor aproximação	63
3.6	Análise de erro	69
3.6.1	Estimativas de erro <i>a-priori</i>	69
3.6.2	Estimativas de erro <i>a-posteriori</i>	72
3.7	Validações numéricas	78
3.7.1	Estimativas de erro <i>a-priori</i>	78
3.7.2	Estimativas de erro <i>a-posteriori</i>	81
3.7.3	Caso com coeficiente descontínuos	82
3.7.4	Problema <i>quarter five-spot</i>	86
3.8	Conclusões	89
4	Método MHM para a equação reação-advecção-difusão	91
4.1	Introdução	91
4.2	Modelo e hibridização	93
4.2.1	Problema de reação-advecção-difusão	93
4.2.2	Formulação híbrida	94
4.2.3	Forma híbrida equivalente: localidade	95
4.2.4	Formas alternativas	97
4.2.5	Condições de contorno	98
4.3	Método de elementos finitos multi-escalas	101
4.3.1	Espaços de aproximação	101
4.3.2	Funções de base multi-escalas	106
4.3.3	Sumário do MHM	110
4.3.4	Indicador de erro e adaptividade	111
4.4	Análise numérica	113

4.4.1	Existência e unicidade de solução	113
4.4.2	Melhor aproximação	116
4.4.3	Estimativas de erro <i>a-priori</i>	121
4.4.4	Estimativas de erro <i>a-posteriori</i>	123
4.5	Validações numéricas	125
4.5.1	Validação da convergência	126
4.5.2	Problema da fonte unitária	141
4.5.3	Problema <i>skew-advection</i>	147
4.6	Transporte passivo em um meio altamente heterogêneo	156
4.6.1	Problema de transporte	157
4.6.2	Discretização temporal	159
4.6.3	Resultados numéricos	159
4.7	Conclusões	162
5	Conclusões e perspectivas	164
	Referências Bibliográficas	167
	Apêndice	
A	Resultados clássicos	176
A.1	Desigualdades	176
A.2	Resultados abstratos	179
B	Considerações de implementação	184
B.1	Problemas locais	184
B.2	Problema global	186
B.3	Discretização temporal	187
B.4	Desempenho	189

Capítulo 1

Introdução

A solução de modelos baseados em equações diferenciais pode apresentar uma variabilidade muito alta em pequenas regiões espaciais ou em curtos períodos de tempo. Neste caso dizemos que a solução possui um *comportamento multi-escalas*. Comportamentos multi-escalas são frequentes em diversos problemas e diferentes áreas das ciências e engenharia, como por exemplo: em ciência de materiais [72, 66, 67, 47], hemodinâmica computacional [70], física aplicada [2], geofísica espacial [73], geociência [48, 51], meteorologia [28], neurociência [53], processamento de sinais [1], e química aplicada [9], apenas para citar alguns.

Métodos numéricos em geral apresentam dificuldades em aproximar a solução de problemas com comportamentos multi-escalas. Nestes casos, é necessário usarmos uma discretização tão fina quanto a menor escala (ou com maior variabilidade) do problema, pois caso contrário, a solução tende a apresentar instabilidades numéricas. Logo, obter uma solução numérica de boa qualidade implica necessariamente em um custo computacional muito alto que pode inviabilizar a sua obtenção. Isto motiva a pesquisa sobre métodos que tratem o comportamento multi-escalas de forma mais eficiente. Para tal propósito, nos últimos anos, tem-se desenvolvido métodos numéricos que exploram a ideia de “capturar” o comportamento multi-escalas do problema usando malhas grossas, através de estratégias de sub-malhas. Destacamos duas grandes famílias de métodos numéricos que objetivam a incorporação de aspectos multi-escalas da solução: os *métodos de volumes*

finitos multi-escalas (ver [45, 46, 48, 51]) e os *métodos de elementos finitos multi-escalas* (ver [41, 69, 56, 21]). Neste trabalho de tese nosso foco são os métodos de elementos finitos multi-escalas.

Embora as ideias e os fundamentos matemáticos que possibilitam a construção do método de elementos finitos foram expostos por R. Courant nos anos quarenta (ver [24]), a origem deste método remonta aos anos cinquenta, como uma estratégia de aproximar numericamente a solução das equações que modelam problemas da mecânica de estruturas aplicados à aeronáutica. Desde então, o método de elementos finitos tem sido usado na resolução de problemas oriundos das diversas áreas do conhecimento, e tem ganho popularidade frente às outras opções. As características que tornam o método de elementos finitos competitivo são: sua precisão em resolver problemas em geometrias complexas, possuir um embasamento teórico bem estabelecido e sua propriedade local que induz sistemas lineares esparsos tornando-os computacionalmente atrativos. De modo geral, o custo computacional depende do número de elementos da malha e dos espaços de aproximação usados. Assim, quando aplicados à resolução de problemas com comportamento multi-escalas, o custo computacional pode se tornar proibitivo.

Dois exemplos clássicos de modelos com soluções multi-escalas, e que estão presentes em diversas áreas das ciências e engenharia, são: a equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos e a equação de transporte do tipo reação-advecção-difusão singularmente perturbada. No caso da equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos, os aspectos multi-escalas da solução são induzidos pelos dados do problema. Na equação de reação-advecção-difusão, mesmo que os dados sejam homogêneos, características multi-escalas podem estar presentes na solução. De fato, quando o coeficiente de difusão é “muito menor” do que o coeficiente de reação e/ou o coeficiente de advecção, a solução desenvolve regiões de fortes gradientes denominadas *camadas limite*. Tais regiões são conhecidas por serem fonte de instabilidades numéricas (oscilações espúrias). *Este trabalho de tese objetiva o desenvolvimento e análise de novos métodos de elementos finitos multi-*

escalas para a equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos e para a equação reação-advecção-difusão singularmente perturbada.

A partir da ideia apresentada por Babuška e Osborn nos anos oitenta (ver [8]), que define o conceito de *funções de base generalizadas* com o objetivo de capturar o comportamento multi-escalas do problema, tem-se desenvolvido novos métodos de elementos finitos multi-escalas que exploram diferentes abordagens (ver [41, 69, 56, 21, 26]). A ideia fundamental dos métodos de elementos finitos multi-escalas é capturar o comportamento multi-escalas do problema através de problemas locais definidos pelo operador do problema original. Porém a construção de tais problemas locais não é perfeitamente compreendida e constitui ainda tema de pesquisas. Especificamente, a definição da condição de contorno (ou interface) de cada problema local é feita de forma arbitrária e sem justificativa formal.

Nesta tese propomos uma nova família de métodos de elementos finitos multi-escalas denominados *Multiscale Hybrid-Mixed* (ou abreviadamente MHM). Assumimos como ponto de partida a forma elíptica da equação. A continuidade da solução é relaxada e imposta fracamente através de multiplicadores de Lagrange. Em seguida a solução exata é decomposta em uma coleção de funções que satisfazem o problema original com condições de contorno de Neumann definidos localmente em função dos multiplicadores de Lagrange. Uma proposta similar foi apresentada pela primeira vez em [29] no contexto de enriquecimento de espaços. Esta abordagem induz naturalmente a continuidade forte do fluxo nas faces internas, uma vez que este é representado pelo multiplicador Lagrange univocamente determinado em cada face. Conseqüentemente, essa metodologia reproduz variáveis duais com componente normal contínua, obtidos a partir de um pós-processamento do fluxo em cada elemento. Desta forma, a metodologia induz uma nova caracterização da solução exata em termos da solução dos problemas locais, satisfazendo condições de contorno locais perfeitamente justificadas.

A partir da formulação em dimensão infinita descrita acima, a família de métodos de elementos finitos MHM segue utilizando-se o método de Galerkin, onde

os espaços de dimensão finita para o multiplicador de Lagrange induz os espaços de aproximação para as variáveis primal e dual. Os métodos MHM possuem as seguintes características:

- Definem espaços de aproximação $\inf - \sup$ estáveis (no caso da equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos);
- Incorporam um processo de *upscaling* através de funções de base definidas por elemento. Tais funções incorporam as características multi-escalas ou de alto contraste dos coeficientes, permitindo soluções precisas em malhas grossas;
- São naturalmente adaptados a computação massivamente paralela;
- Fornece soluções numéricas localmente conservativas. Esta é uma característica fundamental para a resolução de problemas multi-física [54];
- Define um estimador erro *a-posteriori* residual definido apenas nas faces da partição, que dirige a adaptatividade de malhas no sentido clássico, e também induz uma nova estratégia de *adaptatividade de espaços*;
- Propõe uma sequência de soluções numéricas que convergem para a solução exata com taxa ótima nas normas naturais.

Tais características tornam esta nova proposta competitiva tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista prático.

1.1 Estrutura da Tese

O desenvolvimento e a análise numérica dos métodos MHM se divide em três capítulos. Cada capítulo possui sua própria introdução onde contextualizamos em detalhes seu objetivos. Uma conclusão parcial é incluída no final de cada capítulo. No capítulo 2 construímos os métodos MHM para a equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos. Cada passo do desenvolvimento é devidamente motivado, justificado e relacionado com diferentes métodos multi-escalas

da literatura. São apresentados diversos experimentos numéricos com a finalidade de validar a capacidade do MHM em se aproximar corretamente os aspectos multi-escalas das soluções. Este capítulo foi publicado em [40]. Em seguida, no capítulo 3, analisamos a família de métodos introduzida no capítulo 2: provamos a existência e unicidade de solução para o método MHM, estimativas de erro *a-priori* e *a-posteriori*, e apresentamos validações numéricas adicionais. Este capítulo faz parte de um artigo submetido a SINUM. O capítulo 4 é dedicado aos métodos MHM para a equação reação-advecção-difusão. Apresentamos uma adaptação das técnicas do capítulo 2 ao modelo de transporte, e propomos uma análise matemática e validações numéricas. Validamos o método MHM para problemas singularmente perturbados e para o problema com aspectos multi-escalas (meio heterogêneo).

No apêndice A, apresentamos os resultados teóricos clássicos usados neste trabalho. Incluímos no apêndice B, considerações práticas sobre a implementação do MHM, os aspectos computacionais gerais do método MHM como por exemplo discussões sobre os métodos de dois níveis utilizados, e apontando as possibilidades do ponto de vista da paralelização.

A seguir introduzimos as notações e definições comuns a todos os capítulos, salientando que notações e definições específicas adicionais serão introduzidas em cada capítulo.

1.2 Notações e definições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, um aberto limitado de fronteira poligonal Γ , com normal externa \mathbf{n}^Γ . Consideramos a divisão $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, onde Γ_D e Γ_N denotam fronteiras disjuntas, com condição de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Consideremos $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família regular de partições para Ω . Definimos o conjunto de fronteiras $\partial\mathcal{T}_h := \{\partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$; o conjunto de faces Dirichlet, $\mathcal{E}^D := \{\partial K \cap \Gamma_D : \partial K \in \partial\mathcal{T}_h\}$; o conjunto de faces Neumann, $\mathcal{E}^N := \{\partial K \cap \Gamma_N : \partial K \in \partial\mathcal{T}_h\}$; o conjunto de faces externas, $\mathcal{E}^\Gamma := \mathcal{E}^D \cup \mathcal{E}^N$; o conjunto de faces internas $\mathcal{E}^0 := \{\partial K_1 \cap \partial K_2 : \partial K_1, \partial K_2 \in \partial\mathcal{T}_h\}$; e o conjunto total de faces $\mathcal{E} := \mathcal{E}^\Gamma \cup \mathcal{E}^0$.

Para cada $\partial K \in \partial\mathcal{T}_h$ é definido $\mathcal{E}^{\partial K} = \{F \cap \partial K : F \in \mathcal{E}\}$ e a normal $\mathbf{n}^{\partial K}$, externa a ∂K . Sobre cada face $F \in \mathcal{E}$ é definido $\mathcal{T}_h^F := \{K \in \mathcal{T}_h : F \in \mathcal{E}^{\partial K}\}$ e a normal \mathbf{n}_F , se $F \in \mathcal{E}^\Gamma$ então $\mathbf{n}_F := \mathbf{n}^\Gamma|_F$, se $F \in \mathcal{E}^0$ então $\mathbf{n}_F = \mathbf{n}^{\partial K}|_F$ para $K \in \mathcal{T}_h^F$ fixado arbitrariamente; para cada $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ e $K \in \mathcal{T}_h$ estabelecemos a notação $\mathbf{n}_F^{\partial K} := \mathbf{n}^{\partial K}|_F$.

Seja \mathcal{V} um espaço de funções definidas sobre um aberto limitado $A \subseteq \Omega$. Sempre que a definição de A e a regularidade de $v \in \mathcal{V}$ permitam, denotaremos:

- $v^K := v|_K$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$;
- $v^{\partial K} := v|_{\partial K}$, para cada $\partial K \in \partial\mathcal{T}_h$;
- $v_F^{\partial K} := v^{\partial K}|_F$, para cada $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ e $\partial K \in \partial\mathcal{T}_h$.

Seja ∂A a fronteira Lipchitz de A com normal externa $\mathbf{n}^{\partial A}$, e $\mathbb{M}(A)$ o espaço das funções $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis no sentido de Lebesgue. Definimos,

$$L^p(A) := \{f \in \mathbb{M}(A) : \|f\|_{L^p(A)} < +\infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1.1)$$

equipado das normas $\|\cdot\|_{L^p(A)} : L^p(A) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\|f\|_{L^p(A)} := \begin{cases} [\int_A |f|^p]^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in A} |f(\mathbf{x})|, & \text{se } p = +\infty. \end{cases} \quad (1.2)$$

Definimos o espaço de funções localmente integráveis $L_{\text{loc}}^1(A)$ como

$$L_{\text{loc}}^1(A) := \{f \in \mathbb{M}(A) : f|_K \in L^1(K), \forall K \subset A, K \text{ compacto}\}, \quad (1.3)$$

e o espaço de funções de $L^p(A)$ com média nula em A , $L_0^p(A)$, como

$$L_0^p(A) := \left\{ f \in L^p(A) : \int_A f = 0 \right\}. \quad (1.4)$$

O caso $p = 2$ é especialmente interessante, para o qual definimos o produto interno

$(\cdot, \cdot)_A : L^2(A) \times L^2(A) \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$(f, g)_A := \int_A f g, \quad (1.5)$$

que induz a norma de $L^2(A)$ através da relação $\|f\|_{0,A} = \sqrt{(f, f)_A}$ para todo $f \in L^2(A)$.

Considere o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ de ordem $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ denotamos por $\mathcal{C}^m(A)$ o espaço vetorial das funções $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tal que as derivadas parciais $\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ de ordem $|\alpha| = m$ são contínuas. Definimos o espaço $\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}^m(A)$ e o espaço $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ das funções em $\mathcal{C}^\infty(A)$ com suporte compacto em A . Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ ao espaço $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ munido de uma topologia adequada (ver detalhes em [52], página 255), e por $\mathcal{D}(A)'$ ao espaço dual (no sentido topológico) de $\mathcal{D}(A)$. Seja $f \in \mathcal{D}(A)'$, definimos a *derivada* $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}(A)'$ por

$$\langle \partial^\alpha f, v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)} = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A), \quad (1.6)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}(A)' \times \mathcal{D}(A)} : \mathcal{D}(A)' \times \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ representa o *produto de dualidade* entre $\mathcal{D}(A)'$ e $\mathcal{D}(A)$. Em particular, $u \in L^1_{\text{loc}}(A)$ pode ser identificada com o funcional $f_u \in \mathcal{D}(A)'$ definido por

$$\langle f_u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)} = \int_A u v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A), \quad (1.7)$$

e o funcional $\partial^\alpha f_u \in \mathcal{D}(A)'$ é denominado a *derivada distribucional* de u . Em caso de existir $w_u \in L^1_{\text{loc}}(A)$ tal que a derivada distribucional $\partial^\alpha f_u \in \mathcal{D}(A)'$ possa ser representada através da relação

$$\langle \partial^\alpha f_u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)} = \int_A w_u v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A), \quad (1.8)$$

então a função w_u é denominada a *derivada fraca* (ou *distribucional*) de u e deno-

tamos $\partial^\alpha u := w_u$. Substituindo (1.7) e (1.8) em (1.6) obtemos a identidade

$$\int_A \partial^\alpha u v = (-1)^{|\alpha|} \int_A u \partial^\alpha v, \forall v \in \mathcal{D}(A). \quad (1.9)$$

Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ definimos o espaço de Sobolev

$$H^m(A) := \{u \in L^2(A) : \partial^\alpha u \in L^2(A), |\alpha| \leq m\}, \quad (1.10)$$

munido do produto interno $(\cdot, \cdot) : H^m(A) \times H^m(A) \rightarrow \mathbb{R}$, o qual está definido por

$$(u, v)_{m,A} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_A, \quad (1.11)$$

e induz a norma $\|\cdot\|_{m,A} : H^m(A) \rightarrow \mathbb{R}$ através da relação $\|\cdot\|_{m,A} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{m,A}}$. Seja $u \in L^2(A)$, definimos o *gradiente de u* como a função vetorial $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d})$, e o *divergente de $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_d) \in [L^2(A)]^d$* como a função escalar $\nabla \cdot \sigma := \sum_{i=1}^d \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}$. Note que, $u \in H^1(A)$ se e somente se $\nabla u \in [L^2(A)]^d$, definimos uma relação análoga para $\nabla \cdot \sigma$ através do espaço

$$H(\text{div}; A) := \{\sigma \in [L^2(A)]^d : \nabla \cdot \sigma \in L^2(A)\}. \quad (1.12)$$

Associamos a $H^1(A)$ o espaço de restrições sobre o contorno ∂A , definido por

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial A) := \{v|_{\partial A} : v \in H^1(A)\}, \quad (1.13)$$

onde $v|_{\partial A}$ representa o *traço* da função v . O espaço dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial A)$ é denotado por $H^{-\frac{1}{2}}(\partial A)$ e a seguinte identidade é satisfeita (ver [14], páginas 91 e 92)

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial A) = \{\sigma|_{\partial A} \cdot \mathbf{n}^{\partial A} : \sigma \in H(\text{div}; A)\}. \quad (1.14)$$

Definimos o *produto de dualidade* $(\cdot, \cdot)_{\partial A} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial A) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial A) \rightarrow \mathbb{R}$, através da

operação

$$(\mu, \lambda)_{\partial A} := (\boldsymbol{\sigma}, \nabla v)_A + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, v)_A, \quad (1.15)$$

onde, $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}; A)$ tal que $\boldsymbol{\sigma}|_{\partial A} \cdot \mathbf{n}^{\partial A} = \mu$ e $v \in H^1(\Omega)$ tal que $v|_{\partial A} = \lambda$. A seguir definimos os espaços de funções sobre uma partição \mathcal{T}_h de Ω . O espaço $L^2(\mathcal{T}_h)$ é definido por

$$L^2(\mathcal{T}_h) = \{f \in \mathbb{M}(\Omega) : f|_K \in L^2(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (1.16)$$

e é munido do produto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{T}_h} : L^2(\mathcal{T}_h) \times L^2(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$(f, g)_{\mathcal{T}_h} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, g)_K. \quad (1.17)$$

Para $m \in \mathbb{N}$, os espaços $H^m(\mathcal{T}_h)$ são definidos por

$$H^m(\mathcal{T}_h) := \{f \in \mathbb{M}(\Omega) : f|_K \in H^m(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.18)$$

Para $s \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, definimos o espaços $H^s(\partial\mathcal{T}_h) := \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^s(\partial K)$, e consideramos o *produto de dualidade* $(\cdot, \cdot)_{\partial\mathcal{T}_h} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T}_h) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$(\mu, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\lambda, \mu)_{\partial K}. \quad (1.19)$$

Consideramos os subespaços $H^s(\mathcal{E}) \subset H^s(\partial\mathcal{T}_h)$, definidos por

$$H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{E}) := \left\{ \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T}_h) : \mu_F^{\partial K_2} + \mu_F^{\partial K_1} = 0, \forall F \subseteq \partial K_1 \cap \partial K_2 \in \mathcal{E}^0 \right\}, \text{ e}$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{E}) := \left\{ \mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{T}_h) : \exists \boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega) \text{ tal que } \mu^{\partial K} = \boldsymbol{\sigma}^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Finalmente consideramos funções definidas sobre as faces $F \in \mathcal{E}$. Seja $u \in H^1(\mathcal{T}_h)$. Definimos a função vetorial *salto* de u por

$$\llbracket u \rrbracket_F := \begin{cases} u_F^{\partial K_1} \mathbf{n}_F^{\partial K_1} + u_F^{\partial K_2} \mathbf{n}_F^{\partial K_2}, & \text{se } F = \partial K_1 \cap \partial K_2 \in \mathcal{E}^0, \\ u_F^{\partial K} \mathbf{n}_F^{\partial K}, & \text{se } F \subset \partial K \text{ e } F \in \mathcal{E}^\Gamma. \end{cases} \quad (1.20)$$

Seja $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega)$. Definimos a função escalar *salto* de $\boldsymbol{\sigma}$ por

$$[[\boldsymbol{\sigma}]]|_F := \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_F^{K_1} \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K_1} + \boldsymbol{\sigma}_F^{K_2} \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K_2}, & \text{se } F = \partial K_1 \cap \partial K_2 \in \mathcal{E}^0, \\ \boldsymbol{\sigma}_F^K \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}, & \text{se } F \subset \partial K \text{ e } F \in \mathcal{E}^\Gamma. \end{cases} \quad (1.21)$$

Capítulo 2

Método MHM para a equação de Darcy

2.1 Introdução

A simulação numérica de escoamento de fluidos em meios porosos, como os encontrados em aquíferos salinos ou reservatórios de petróleo, é de fundamental importância quando se trata da gestão de recursos hídricos ou da extração de petróleo. Com respeito a este último, o comportamento do fluido no interior do reservatório depende fortemente do estado atual da recuperação do petróleo [20]. A recuperação primária é geralmente modelada através de um escoamento monofásico, enquanto que a recuperação secundária supõe um escoamento bifásico constituído por fluidos imiscíveis como forma de modelar a injeção de água em poços. No entanto, as ineficiências decorrentes da saturação durante a recuperação secundária tem levado os engenheiros a buscar miscibilidade através da injeção de CO_2 , aumentando, assim, a recuperação de petróleo [63]. Recentemente, esta estratégia tem ganho uma particular atenção em razão do reservatório ser considerado como um local de armazenamento do gás indefinidamente, com possíveis benefícios para o ambiente. Cada etapa da recuperação do óleo é dirigida por diferentes conjuntos de equações diferenciais parciais. Entre elas está a equação Darcy com coeficientes altamente heterogêneos, que forma parte dos modelos em todas as fases de recuperação, e é responsável pela definição da velocidade do fluido através de uma relação linear com o gradiente da pressão. O modelo de Darcy também pode ser interpretado como a forma mista da equação de Laplace, após uma modificação do

termo de fonte.

Como resultado da natureza mista do problema, a resolução numérica através do método de elementos finitos para a equação de Darcy requer espaços discretos que satisfaçam uma condição de $\text{inf} - \text{sup}$ (ou de compatibilidade) [14]. Exemplos de pares de espaços de interpolação estáveis para a equação de Darcy existem desde os anos setenta [60]. Destacamos a família de elementos, RT (Raviart-Thomas), BDM (Brezzi Douglas-Marini) e BDDM (Brezzi-Douglas-Duran-Marini), ver [14] para mais detalhes. Como consequência da utilização de funções de base polinômiais descontínuas, tanto para a pressão como para a velocidade e, graus de liberdade nas faces para a velocidade, estes métodos fornecem uma aproximação para a velocidade que é localmente conservativa com componentes normais contínuas através de todas as faces. Por outro lado, a precisão do método pode ser seriamente deteriorada quando a solução apresenta um comportamento multi-escalas ou com alto contraste devido a coeficientes heterogêneos. Tal questão, foi abordada pela primeira vez em [8] para um problema elíptico unidimensional e gerou o conceito de funções de base generalizadas, e desde então esta abordagem tem sido utilizada por diferentes grupos de pesquisa [60, 19, 65]. Em geral, esses trabalhos estão baseados na perturbação de pares estáveis de espaços de interpolação, com objetivo de incorporar aspectos multi-escalas ou de alto contraste oriundos do problema. Embora cada abordagem seja diferente, estes trabalhos compartilham a estratégia de incorporar aspectos multi-escalas através da solução de problemas locais definidos em cada elemento. Portanto, não é surpreendente que exista alguma relação entre os diferentes métodos. Por exemplo, *Petrov-Galerkin enriched* (PGEM) [11, 35, 12, 34, 4] e *residual-free bubbles* (RFB) [15, 32] são abordagens que podem ser reunidas na variedade dos métodos de elementos finitos multi-escalas (MsFEM) [41] (ver [65, 31] para mais detalhes), embora MsFEM não seja construído através de um processo de enriquecimento de espaços. Para problemas mistos, o método proposto em [5] explora a ideia de decompor os espaços, em soma direta de espaços de dimensão infinita, com o objetivo de dirigir a escolha dos subespaços de dimen-

são finita. O MsFEM [19], quando aproxima o fluxo por constantes nas faces, pode ser visto como um caso particular desta abordagem (ver [60]).

O uso de problemas de valor de contorno definidos em cada elemento, para alcançar a estabilidade e produzir soluções livres de oscilações corresponde a uma técnica moderna para construir métodos do tipo Galerkin descontínuo (DG) [13, 23]. Nesta abordagem, as condições de contorno locais são incógnitas do problema e escolhidas de forma que a continuidade da solução e o fluxo numérico através das faces sejam pontualmente e fracamente impostas, respectivamente. Esta ideia é novamente explorada em [25], mas com o intuito de prescrever fortemente a continuidade tanto da pressão como do fluxo através das faces. Isso resulta em um método descontínuo do tipo Petrov-Galerkin (DPG) com quatro campos.

O presente trabalho propõe uma nova família de métodos de elementos finitos mistos para a equação de Darcy especialmente construído para lidar com coeficientes heterogêneos. Diferente da estratégia padrão para o desenvolvimento de métodos mistos, neste trabalho assumimos como ponto de partida a equação de Laplace na sua forma elíptica, para a qual a regularidade da solução é relaxada usando espaços de Sobolev definidos por elementos (como proposto em [13]). A continuidade então é fracamente imposta através de multiplicadores de Lagrange. Este processo é conhecido como hibridação e foi proposto pela primeira vez em [59, 58], para em seguida ser analisada em [61]. Exploramos uma abordagem diferente, onde usamos uma estratégia de upscaling, inerente ao problema. Mais precisamente, a pressão exata é decomposta em termos de:

- Uma coleção de funções que satisfazem problemas locais elípticos com condições de contorno de Neumann em função dos multiplicadores de Lagrange; e
- Função constante por partes oriunda de um problema definido globalmente.

Além da continuidade fraca para a pressão, a abordagem induz naturalmente continuidade forte para o fluxo nas faces internas, uma vez que é representado por

um multiplicador Lagrange unicamente determinado em cada face. Consequentemente, essa metodologia fornece um campo de velocidade com componente normal contínua através de um pós-processamento do fluxo em cada elemento. A partir da formulação em dimensão infinita descrita acima, construímos uma família de métodos de elementos finitos, com as seguintes propriedades:

- Estável, com precisão de alta ordem usando a família de elementos $V_0 \times \Lambda_h^{(l)}$, onde V_0 representa o espaço das constantes por partes para a pressão e $\Lambda_h^{(l)}$ o espaço dos polinômios de ordem menor ou igual $l \in \mathbb{N}_0$ para o multiplicador de Lagrange;
- Incorpora um processo de *upscaling* através de funções de base definidas por elemento, que incorporam as características multi-escalas ou de alto contraste dos coeficientes. Isto permite ao método ser preciso em malhas grossas e naturalmente adaptado a computação massivamente paralela;
- Fornece campos de velocidade que são localmente conservativos. Esta é uma característica fundamental para a resolução de problemas multi-física.

Usando os espaços $\Lambda_h^{(l)}$, alguns elementos finitos conhecidos (ou uma versão dos mesmos) podem ser recuperados, por exemplo, o elemento de RT de mais baixa ordem, é recuperado assumindo $l = 0$ (constante em cada aresta), ou o método em [5], assumindo $l = 1$ (linear). No caso de serem utilizadas interpolações de ordem superior ($V_0 \times \Lambda_h^{(l)}$ com $l > 1$), os métodos podem ser relacionados com os propostos em [25], embora a teoria sob a qual o método foi desenvolvido, assim como a sua forma final, são intrinsecamente diferentes. Além disso, devido ao fato dos métodos híbridos primais em [61] não serem inf – sup estáveis para $V_0 \times \Lambda_h^{(l)}$, observamos que o método proposto pode ser interpretado como um método híbrido primal estabilizado.

Além de apresentar a construção dos novos métodos, este capítulo propõe uma cuidadosa validação numérica, a partir de qual pretende-se avaliar a capacidade dos métodos em lidar com os problemas com características multi-escalas e

coeficientes com alto contraste tanto em malhas estruturadas, quanto em malhas não estruturadas.

O capítulo está organizado em três seções; a seção 2.2 é dedicada a formulação híbrida do problema, com a caracterização da solução exata em termos da solução de problemas locais; a seção 2.3 utiliza a caracterização construída na seção 2.2 para, através de uma discretização de espaço, obter o método de elementos finitos MHM; finalmente, na seção 2.4 estudamos o desempenho do método MHM em problemas acadêmicos e realistas.

2.2 Modelo e hibridização

2.2.1 Problema de Darcy

Consideremos o seguinte problema elíptico: *achar p tal que*

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p) &= f \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{K} \nabla p \cdot \mathbf{n}^\Gamma &= 0 \text{ em } \Gamma_N, \\ p &= g \text{ em } \Gamma_D, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

onde f e g são funções dadas suficientemente regulares. O coeficiente de *permeabilidade* $\mathcal{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$ é um tensor simétrico e uniformemente elíptico, i.e., existe $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 |\xi|^2 \leq \xi^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \xi \leq c_2 |\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ e para todo $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Observação 2.1 *Se existe uma condição de contorno Neumann não-homogênea $-\mathcal{K} \nabla p \cdot \mathbf{n} = g_N$ sobre Γ_N , então supomos que existe uma função p^N que satisfaz tal condição de contorno de modo que a solução se decomponha como $p = \hat{p} + p^N$, onde \hat{p} satisfaz (2.1) com a modificação $f + \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla p^N)$ no termo de fonte. Além disso, no caso de existir apenas condições de Neumann, assumimos a condição de compatibilidade $(f, 1)_\Omega = (g_N, 1)_\Gamma$.*

2.2.2 Formulação híbrida

Nosso objetivo é obter uma aproximação precisa para $p \in H^1(\Omega)$ e para a velocidade de Darcy $\boldsymbol{\sigma}(p) \in H(\text{div}, \Omega)$ dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(p) := -\mathcal{K}\nabla p. \quad (2.2)$$

A presença de coeficientes heterogêneos envolvidos no modelo faz com que seja de particular interesse, construir a solução p e a velocidade $\boldsymbol{\sigma}(p)$ a partir de problemas locais, como forma de “capturar” as escalas finas em paralelo. Tal abordagem foi explorada nos trabalhos de Hou e Wu [41] e Arbogast [5]. No presente trabalho, adotamos uma perspectiva diferente: procuramos p como a solução de uma equação elíptica em um espaço onde a continuidade da solução é relaxada. Mais especificamente, utilizamos a seguinte formulação híbrida do problema (2.1):

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (p, \lambda) \in V \times \Lambda \text{ tal que} \\ & (\mathcal{K}\nabla p, \nabla q)_{\mathcal{T}_h} + (q, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (p, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F, \\ & \text{para todo } (q, \mu) \in V \times \Lambda, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

onde, $V := H^1(\mathcal{T}_h)$ e $\Lambda := \{\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{E}) : \mu|_F = 0, \forall F \in \mathcal{E}^N\}$. A formulação variacional híbrida (2.3) pode ser interpretada como um *problema de ponto de sela* onde a continuidade da solução em $\partial K \in \partial\mathcal{T}_h$ é relaxada e imposta fracamente usando o multiplicador de Lagrange $\lambda \in \Lambda$. Agora, observe que assumindo regularidade suficiente da solução exata, e integrando por partes sobre cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ obtemos da primeira equação em (2.3) que $(p, \lambda) \in V \times \Lambda$ satisfaz o seguinte problema local:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p) - f, q)_K + (\boldsymbol{\sigma}(p) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} - \lambda, q)_{\partial K} = 0, \forall q \in H^1(K) \quad (2.4)$$

em cada $K \in \mathcal{T}_h$. Logo, usando argumentos clássicos a formulação em (2.4) corresponde ao problema forte:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p) &= f \text{ em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(p) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} &= \lambda^{\partial K} \text{ em } \partial K, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

para todo $K \in \mathcal{T}_h$. Por outro lado, testando (2.3) contra $(0, \mu) \in V \times \Lambda$ a formulação (2.3) implica que:

$$\llbracket p \rrbracket|_F = \mathbf{0}, \quad \forall F \in \mathcal{E}^0, \quad (2.6)$$

$$p|_F = g, \quad \forall F \in \mathcal{E}^D. \quad (2.7)$$

Adicionalmente, de (2.5) e da definição do espaço Λ , obtemos

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}(p) \cdot \mathbf{n} \rrbracket|_F = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}^0 \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(p)|_F \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}^N. \quad (2.9)$$

Note que (2.5) define um problema mal posto, pois se $p \in V$ é solução de (2.5) então $p + c \in V$ com $c \in \mathbb{R}^+$ também é solução de (2.5). Portanto com o objetivo de localizar o cômputo da solução (ou parte dela) localmente, propomos a seguir uma forma híbrida equivalente a (2.3). Esta abordagem está baseada no trabalho [61], no qual se demonstra que, se (p, λ) é solução de (2.3) então $p \in H^1(\Omega)$ é solução do problema original (2.1), e $\lambda^{\partial K} = -\mathcal{K} \nabla p \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$.

2.2.3 Forma híbrida equivalente: localidade

Consideremos o subespaço de dimensão finita $V_0 \subset V$ definido por

$$V_0 := \{q_0 \in V : q_0|_K \in \mathbb{R}, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.10)$$

e o seu complemento ortogonal com respeito ao produto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{T}_h}$, $V_0^\perp := \{q^\perp \in V : (q^\perp, 1_K)_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. Estes espaços induzem naturalmente a

decomposição em soma direta

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp. \quad (2.11)$$

Assim, cada elemento $q \in V$ admite a representação

$$q = q_0 + q^\perp, \quad (2.12)$$

onde $q_0 \in V_0$ e $q^\perp \in V_0^\perp$ são determinados unicamente.

Observação 2.2 *Note que podemos interpretar (2.12) em termos de aspecto multi-escalas. De fato, a decomposição $p = \bar{p} + p^\perp$ da solução do problema (2.1) naturalmente identifica em \bar{p} e p^\perp duas escalas diferentes. A parte $\bar{p} \in V_0$ é uma constante sobre cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ e captura apenas “informação” da escala da partição \mathcal{T}_h , enquanto que $p^\perp \in V_0^\perp$ captura escalas tão finas quanto necessário. Esta observação inspira o desenvolvimento da formulação MHM a seguir.*

Usando a representação (2.12) para as funções testes da formulação (2.3), obtemos a seguinte formulação equivalente a (2.3): achar $(\bar{p}, p^\perp, \lambda) \in V_0 \times V_0^\perp \times \Lambda$ tal que

$$(q_0, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q_0)_{\mathcal{T}_h}, \quad \forall q_0 \in V_0, \quad (2.13)$$

$$(\mathcal{K}\nabla p^\perp, \nabla q^\perp)_{\mathcal{T}_h} + (q^\perp, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q^\perp)_{\mathcal{T}_h}, \quad \forall q^\perp \in V_0^\perp, \quad (2.14)$$

$$(\bar{p}, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} + (p^\perp, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F, \quad \forall \mu \in \Lambda. \quad (2.15)$$

Notemos que o sistema de equações (2.13)-(2.15) é composto por um *problema global*, definido pelas equações (2.13) e (2.15), que envolve todas escalas do problema e um conjunto de *problema locais*, definidos pela equação (2.14), que fornece ao problema global “informações” multi-escalas. De (2.14) vemos que, dado $K \in \mathcal{T}_h$ a variável local $p^\perp|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K)$ depende apenas de $\lambda|_{\partial K} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial K)$ e f . Assim a equação (2.14) pode ser reescrita formalmente através de um problema em cada $K \in \mathcal{T}_h$, definido

por

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } p^\perp|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ & (\mathcal{K}\nabla p^\perp, \nabla w)_K = (f, w)_K - (\lambda, w)_{\partial K}, \\ & \text{para todo } w \in H^1(K) \cap L_0^2(K). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Agora, pela linearidade de (2.16), decomponos $p^\perp = T\lambda + p_f$ onde $T : \Lambda \rightarrow V_0^\perp$ e tal que, dado $\lambda \in \Lambda$, associamos $T\lambda$, solução de:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } T\lambda|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ & (\mathcal{K}\nabla T\lambda, \nabla w)_K = -(\lambda, w)_{\partial K}, \\ & \text{para todo } w \in H^1(K) \cap L_0^2(K). \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

e $p_f \in V_0^\perp$ e tal que:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } p_f|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ & (\mathcal{K}\nabla p_f, \nabla w)_K = (f, w)_K, \\ & \text{para todo } w \in H^1(K) \cap L_0^2(K). \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Logo o problema global definido pelas equações (2.13) e (2.15) pode ser reescrito como:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\bar{p}, \lambda) \in V_0 \times \Lambda \text{ tal que} \\ & (q_0, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q_0)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (\bar{p}, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} + (T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F - (p_f, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\ & \text{para todo } (q_0, \mu) \in V_0 \times \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Assim, a formulação (2.3) é equivalente ao sistema acoplado (2.17)-(2.18)-(2.19) e temos que a solução exata pode ser caracterizada por:

$$p = \bar{p} + T\lambda + p_f, \quad (2.20)$$

e por consequência a variável dual se escreve como

$$\sigma(p) = \sigma(T\lambda) + \sigma(p_f). \quad (2.21)$$

Observação 2.3 Note que apesar de considerar o espaço de dimensão finita V_0 na formulação (2.19) nenhuma discretização foi introduzida. Logo, a solução representada em (2.20) ainda pertence ao espaço de dimensão infinita V e corresponde à **solução exata** do problema (2.1).

2.2.4 Formulação mista alternativa

O problema local (2.17) é equivalente ao seguinte problema forte: Achar $T\lambda|_K$ tal que

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\lambda) &= c_K^\lambda, \text{ em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(T\lambda) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} &= \lambda, \text{ em } \partial K, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

onde a constante c_K^λ é definida como:

$$c_K^\lambda := \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \lambda. \quad (2.23)$$

Analogamente, o problema local em (2.18) pode ser escrito na sua forma forte: Achar $p_f|_K$ tal que

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p_f) &= f_K^\perp, \text{ em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(p_f) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} &= 0, \text{ em } \partial K, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

onde a função $f_K^\perp \in L_0^2(K)$ é definida como:

$$f_K^\perp := f - \frac{1}{|K|} \int_K f \quad (2.25)$$

A constante $c_K^\lambda \in \mathbb{R}$ e a função $f_K^\perp \in L_0^2(K)$ foram introduzidas com a finalidade de satisfazer a condição de compatibilidade dos problemas (2.22) e (2.18). Observe que, como de (2.19) temos $c_K^\lambda = \frac{1}{|K|} \int_K f$, este procedimento não altera o problema original.

Observação 2.4 O procedimento acima pode ser aplicado recursivamente aos problemas (2.22) e (2.18). A utilidade em se repetir tal procedimento múltiplas vezes justifica-se quando modelos físicos admitem mais de duas escalas. Um exemplo de tal situação é apresentado em [54].

Em seguida, usamos os problemas locais (2.17) e (2.18) e as suas respectivas formas fortes (2.22) e (2.24) com a finalidade de reescrever cada termo da formulação (2.19) usando apenas produtos internos relativos a cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$.

- (1) Usando a definição em (2.23), e em seguida o problema local (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}
(q_0, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (q_0, \lambda)_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (q_0, c_K^\lambda)_K \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (q_0, \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\lambda))_K \\
&= (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\lambda), q_0)_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

A identidade $(\bar{p}, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = (\bar{p}, \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\mu))_{\mathcal{T}_h}$ é imediata.

- (2) Notando que $T\lambda|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K)$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$, e usando o problema local (2.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (T\lambda, \mu)_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -(\nabla T\lambda, \mathcal{K}\nabla T\mu)_K \\
&= -(\mathcal{K}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(T\lambda), \boldsymbol{\sigma}(T\mu))_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

- (3) Notando que $T\mu|_K, p_f|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K)$ para cada $K \in \mathcal{T}_h$, e usando o

problema local (2.17), a simetria de \mathcal{K} , e o problema local (2.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
(p_f, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_f, \mu)_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -(\nabla p_f, \mathcal{K} \nabla T \mu)_K \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -(\mathcal{K} \nabla p_f, \nabla T \mu)_K \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -(f, T \mu)_K \\
&= -(f, T \mu)_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

Assim, usando (1), (2) e (3), temos que (2.19) é equivalente a:

$$\left. \begin{aligned}
&\text{Achar } (\bar{p}, \lambda) \in V_0 \times \Lambda \text{ tal que} \\
&\qquad (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\lambda), q_0)_{\mathcal{T}_h} = (f, q_0)_{\mathcal{T}_h}, \\
&\qquad -(\mathcal{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(T\lambda), \boldsymbol{\sigma}(T\mu))_{\mathcal{T}_h} + (\bar{p}, \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\mu))_{\mathcal{T}_h} = (f, T\mu)_{\mathcal{T}_h}, \\
&\text{para todo } (q_0, \mu) \in V_0 \times \Lambda.
\end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Observação 2.5 Note que, de (2.21) e (2.24), temos que:

$$\int_K \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p) = \int_K \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\lambda). \quad (2.27)$$

Usando as funções testes $(q_0, 0) \in V_0 \times \Lambda$ tal que $q_0|_K = 1$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$ e (2.27), obtemos que a formulação (2.26) impõe naturalmente a lei de conservação de massa local

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p) = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(T\lambda) = \frac{1}{|K|} \int_K f, \quad (2.28)$$

para cada $K \in \mathcal{T}_h$.

2.3 Método de elementos finitos multi-escalas

Na sub-seção 2.2.3 estudamos como a solução do problema (2.1) pode ser expressada como a solução dos problemas locais (2.17) e (2.18) acoplados ao problema global (2.19). Tanto os problemas locais como o problema global citados anteriormente foram construídos a partir da formulação híbrida (2.3) sobre uma partição \mathcal{T}_h dada. Nesta seção, propomos uma discretização do espaço Λ no problema (2.19), o que induz um novo método de elementos finitos onde as funções de base são definidas pelos problemas locais (2.17).

2.3.1 Espaços de aproximação

Como mencionado no início deste capítulo, nosso objetivo é obter uma aproximação precisa para $p_h \approx p \in H^1(\Omega)$ e para a velocidade de Darcy $\sigma(p_h) \approx \sigma(p) \in H(\text{div}, \Omega)$. Do problema global (2.19) observamos que precisamos apenas escolher um subespaço $\Lambda_h \subset \Lambda$ para propormos uma formulação completamente discreta. Logo, substituindo em (2.19) Λ por Λ_h , obtemos o método MHM:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\bar{p}_h, \lambda_h) \in V_0 \times \Lambda_h \text{ tal que} \\ & \qquad (q_0, \lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q_0)_{\mathcal{T}_h}, \\ & \qquad (\bar{p}_h, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h} + (T\lambda_h, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu_h)_F - (p_f, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\ & \text{para todo } (q_0, \mu_h) \in V_0 \times \Lambda_h. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Assim, a representação (2.20) tem uma versão discreta dada por

$$p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h + p_f, \quad (2.30)$$

onde, $T\lambda_h \in V_0^\perp$ representa a solução exata do problema (2.17), substituindo λ por λ_h , e $p_f \in V_0^\perp$ representa a solução exata do problema (2.18). Neste ponto temos total liberdade de escolha para o espaço Λ_h , assumindo que este tenha boas propriedades de aproximação.

Neste trabalho escolhemos os espaços $\Lambda_h = \Lambda_h^{(l)} \subset \Lambda$ definidos por (ver

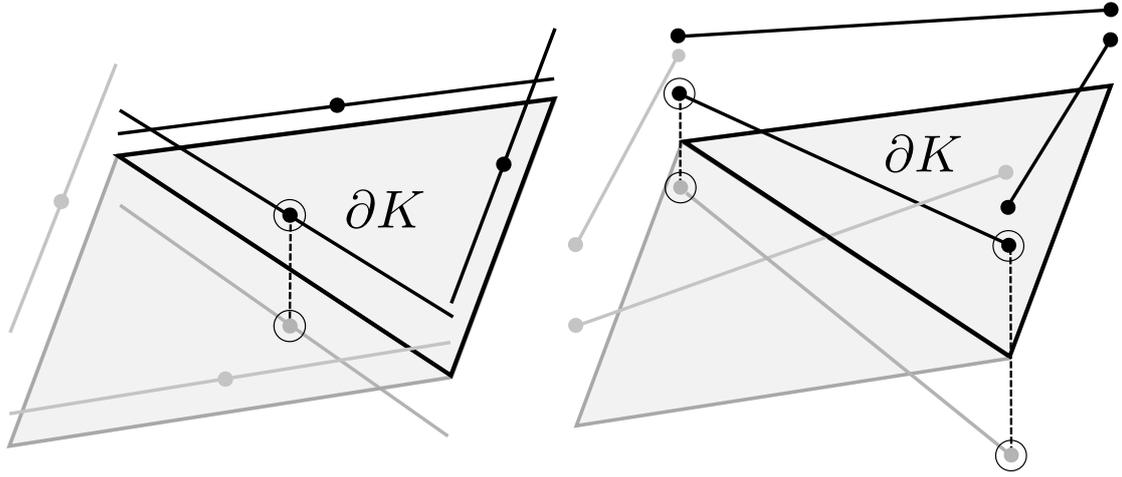


Figura 2.1: Representação de funções $\lambda_h \in \Lambda_h^{(l)}$, à esquerda $l = 0$ e à direita $l = 1$. Os círculos representam graus de liberdade; duas circunferências unidas por uma linha pontilhada denotam que os círculos contidos representam apenas um grau de liberdade.

Figura 2.1)

$$\Lambda_h^{(l)} := \{\mu_h \in \Lambda : \mu_h|_F \in \mathbb{P}^l(F), \forall F \subset \partial K, K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.31)$$

para $l \in \mathbb{N}_0$. Vamos agora a explicitar uma base para Λ_h . Como Λ_h é um espaço de dimensão finita, este pode ser gerado a partir de uma base finita. Seja $F \in \mathcal{E}$, e denote por $B_F := \{\psi_F^{(1)}, \dots, \psi_F^{(l+1)}\}$ a base canônica de $\mathbb{P}^l(F)$. Definimos \mathcal{B}_F como um conjunto de funções com domínio em $\partial\mathcal{T}_h$ e suporte em F , $\mathcal{B}_F := \{(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K})\psi_F : \psi_F \in B_F\} \subset \Lambda_h$, onde $K \in \mathcal{T}_h^F$. O conjunto linearmente independente $\mathcal{B} = \bigcup_{F \in \mathcal{E}} \mathcal{B}_F$ forma uma base para Λ_h . Assim, dado $\mu_h \in \Lambda_h$ e $K \in \mathcal{T}_h$, para cada $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ existem constantes $c_F^{(1)}, \dots, c_F^{(l+1)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mu_h|_{\partial K} = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)}. \quad (2.32)$$

2.3.2 Funções de base multi-escalas

A partir da representação dada em (2.32), definirmos uma base para representar $T\mu_h$ através de funções definidas localmente. Seja $\mu_h \in \Lambda_h$, dado $K \in \mathcal{T}_h$,

temos

$$\begin{aligned} T\mu_h|_K = T(\mu_h|_{\partial K}) &= T\left(\sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)}\right) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} T((\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)}). \end{aligned}$$

Assim, dado $K \in \mathcal{T}_h$ e $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$, definimos as *funções de base multi-escalas* $\eta_{F,K}^{(1)}, \dots, \eta_{F,K}^{(l+1)} \in V_0^\perp$, restritas a K , através de $\eta_{F,K}^{(i)} := T((\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)})|_K$, i.e., resolvendo os problemas locais:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Achar } \eta_{F,K}^{(i)} \in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ &(\mathcal{K} \nabla \eta_{F,K}^{(i)}, \nabla w)_K = -(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) (\psi_F^{(i)}, w)_F, \\ &\text{para todo } w \in H^1(K) \cap L_0^2(K). \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Finalmente, $T\mu_h$ pode ser representado localmente em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ através da combinação linear

$$T\mu_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} \eta_{F,K}^{(i)}, \quad (2.34)$$

e logo, devido ao fato das funções de base terem suporte em cada $K \in \mathcal{T}_h$, a representação global pode ser escrita como

$$T\mu_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} \eta_{F,K}^{(i)}. \quad (2.35)$$

Nas Figuras 2.2 e 2.3 apresentamos exemplos de funções de base $\eta_{F,K}^{(i)}$ para o caso $\mathcal{K} = \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} denota o tensor identidade.

Observação 2.6 *Os problemas locais definidos em (2.18) e (2.33) fornecem naturalmente à solução aproximada p_h os aspectos multi-escala e/ou de alto contraste que os parâmetros do problema apresentam e que não seriam capturados pela escala da malha dada \mathcal{T}_h . Assumimos que as soluções dos problemas locais (2.18) e (2.33) são conhecidas exatamente. De fato, existem casos onde a solução dos*

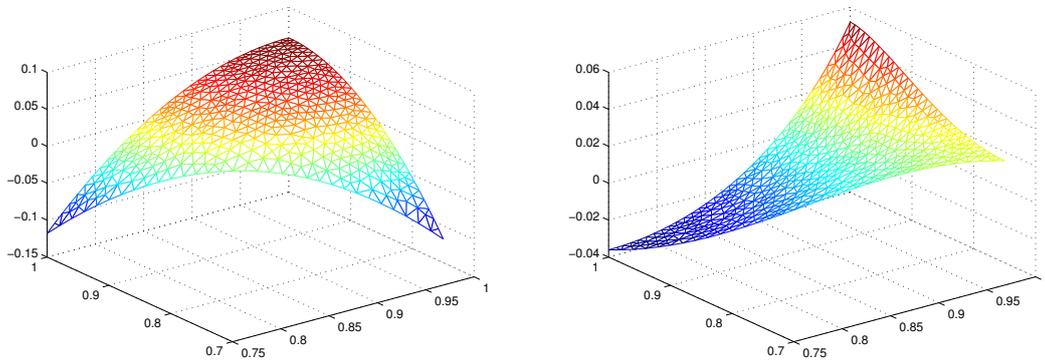


Figura 2.2: Funções de base representativas para $l = 0$ (esquerda) e $l = 1$ (direita)

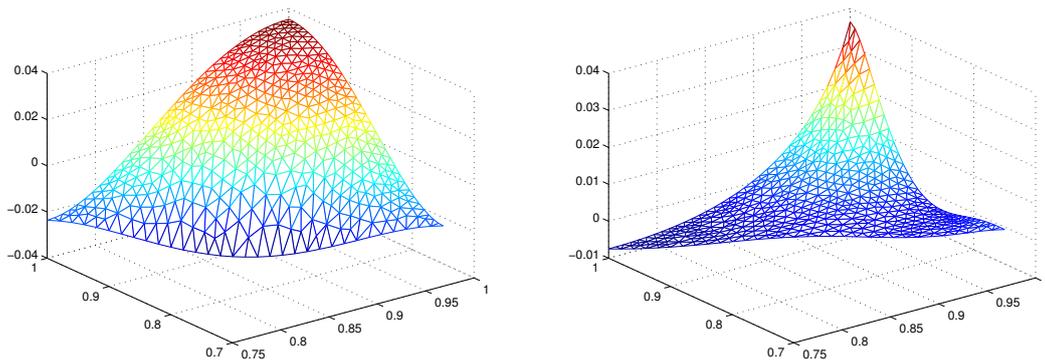


Figura 2.3: Funções de base representativas para $l = 2$ (esquerda) e $l = 3$ (direita)

problemas locais é conhecida, como no caso $l = 0$ com permeabilidade homogênea $\mathcal{K} = \kappa\mathcal{I}$, $\kappa > 0$. Neste caso a solução é dada em (2.36). Em casos mais gerais é necessário um procedimento de aproximação da solução no segundo nível.

Observação 2.7 Como mencionado, a utilização de uma aproximação local induz um método de dois níveis, onde as funções $T\lambda_h$ e p_f em (2.29) são substituídas por versões aproximadas $\tilde{T}\lambda_h$ e \tilde{p}_f . Tais cálculos podem ser realizados tanto resolvendo problemas elípticos ou, no caso de ser necessário impor a conformidade local $H(\text{div}, \Omega)$, resolve-se sua versão mista, obtida a partir do procedimento recursivo mencionado na observação 2.4. É importante notar que, em qualquer um dos casos, o problema (2.29) compreende o mesmo número de graus de liberdade, onde a aproximação local aparece como um pré-processamento naturalmente paralelizável.

Observação 2.8 A existência e unicidade de solução para o problema (2.29) é garantida pela teoria clássica de ponto de sela (ver [14]). Vale ressaltar que a precisão com que \bar{p}_h aproxima \bar{p} depende da precisão com que λ_h aproxima λ . Em conseqüência, a convergência ótima nas normas naturais para $p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$ e $\sigma(p_h) = \sigma(T\lambda_h + p_f)$ depende apenas da capacidade de λ ser interpolado por λ_h nas faces. Estas afirmações são numericamente validadas e provadas teoricamente no capítulo 3.

Observação 2.9 O método MHM pode ser visto como uma estratégia de “dividir para conquistar” assumindo uma malha grossa no primeiro nível. Quando as funções de base estão disponíveis, o sistema linear simétrico associado ao método de MHM é pequeno. Portanto, a alocação de memória padrão e a resolução por métodos diretos do sistema linear pode ser adotada com baixo custo computacional. O custo adicional associado ao pré-processamento para o cálculo das funções de base, usando uma abordagem de dois (ou mais) níveis, significa a resolução de problemas completamente independentes (definidos por elemento) e também de baixo custo computacional. Em resumo, a abordagem MHM induz um algoritmo multi-nível através de uma coleção de sistemas lineares de baixo custo e que podem ser resolvidos paralelamente utilizando ferramentas convencionais.

2.3.3 Relação com métodos existentes

A seguir destacamos as principais diferenças e similitudes entre alguns métodos numéricos largamente empregados na literatura e o método MHM. Concluímos que o método misto-híbrido multi-escalas definido em (2.3.4) pode ser interpretado em certa medida como uma generalização de tais trabalhos.

2.3.3.1 Método misto clássico

Consideremos o caso particular em que o problema (2.1) não apresenta condição de Dirichlet ($\Gamma_D = \emptyset$), a fonte é constante ($f \in \mathbb{R}$) e o tensor de permeabilidade está definido por $\mathcal{K} = \kappa \mathcal{I}$, onde $\kappa > 0$ é uma constante (sem aspectos multi-escalas) e \mathcal{I} representa o tensor identidade.

No caso $l = 0$, o problema local (2.43) tem solução exata conhecida dada por

$$\eta_{F,K}^{(1)}(\mathbf{x}) := -(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \frac{1}{d \kappa} \frac{|F|}{|K|} \left[\mathbf{x} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{x} - \mathbf{x}_F \right) - C_F \right], \quad \forall \mathbf{x} \in K, \quad (2.36)$$

onde \mathbf{x}_F representa o vértice oposto à face F (K triângulo ou tetraedro) ou o baricentro da fase oposta (K quadrilátero ou hexaedro) e a constante $C_F \in \mathbb{R}$ é dada por

$$C_F = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{x} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{x} - \mathbf{x}_F \right) d\mathbf{x},$$

para cada $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ e $K \in \mathcal{T}_h$. Notamos que

$$-\kappa \nabla \eta_{F,K}^{(1)}(\mathbf{x}) := (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \frac{|F|}{|K|} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F), \quad \forall \mathbf{x} \in K, \quad (2.37)$$

logo $\boldsymbol{\sigma}(\eta_F^K) = -\kappa \nabla \eta_{F,K}^{(1)}$ coincide com as funções de \mathbb{RT}_0 (se $d = 2$) ou \mathbb{RTN}_0 (se $d = 3$) apresentadas em [60] e [55], respectivamente. Desta forma, podemos reescrever o espaço de Raviart-Thomas de mais baixa ordem como

$$V_{\mathbb{RT}_0} := \left\{ \mathbf{v}_h \in H(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}_h = \boldsymbol{\sigma}(T\lambda_h), \lambda_h \in \Lambda_h^{(0)} \right\}. \quad (2.38)$$

Agora, denotando por $\mathbf{u}_h := \boldsymbol{\sigma}(T\lambda_h)$ e $\mathbf{v}_h := \boldsymbol{\sigma}(T\mu_h)$, a formulação em (2.26)

reescreve-se como:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\bar{p}_h, \mathbf{u}_h) \in V_0 \times V_{\mathbb{RT}_0} \text{ tal que} \\ & (\nabla \cdot (\mathbf{u}_h), q_0)_{\mathcal{T}_h} = (f, q_0)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (\kappa^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\bar{p}, \nabla \cdot (\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} = 0, \\ & \text{para todo } (q_0, \mathbf{v}_h) \in V_0 \times V_{\mathbb{RT}_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Note que em (2.39) recuperamos exatamente o método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem para o problema elíptico em (2.1) na sua forma mista (para mais detalhes ver [14] página 116). Assim, para $l = 0$ o método MHM pode ser interpretado como uma generalização do método de Raviart-Thomas ao caso multi-escalas. Por outro lado, é conveniente notar que a metodologia MHM fornece uma aproximação (possivelmente) mais precisa para a variável p , como segue

$$p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h. \quad (2.40)$$

De fato, o método \mathbb{RT} , aproxima p por funções constantes por partes, diferentemente do que ocorre em (2.40). No capítulo 3 analisamos e verificamos numericamente que (2.40) para $l = 0$ apresenta, de fato, convergência de ordem h^2 na norma $L^2(\Omega)$, enquanto que \bar{p} converge com ordem h .

2.3.3.2 Métodos multi-escalas

No caso em que \mathcal{K} e/ou f apresentem variações em uma escala menor do que a escala da malha \mathcal{T}_h , as soluções dos problemas locais descritos em 2.3.4 precisam ser aproximadas numericamente usando uma abordagem de dois níveis. Uma vez escolhida uma aproximação de elementos finitos no segundo nível, a abordagem aqui apresentada pode ser comparada com métodos multi-escalas de dois níveis (*upscaling e two-level methods*) existentes na literatura.

Em [19] é apresentada uma abordagem que trata as variações da pequena escala usando problemas locais do tipo (2.43), assumindo que o fluxo através das faces é aproximado por funções constantes ($\lambda_h \in \Lambda_h^{(0)}$). Por outro lado, os pro-

blemas locais definidos em (2.42) não são considerados em [19] visto que o termo $(f, T\mu_h)_{\mathcal{T}_h}$ é inexistente.

Em [6] é proposto um método que, através de um espaço mais “rico”, generaliza à abordagem proposta em [19]. Como resultado, os termos do tipo $(f, T\mu_h)_{\mathcal{T}_h}$ estão presentes. Após algumas manipulações algébricas, este pode ser interpretado como o método MHM usando o espaço $\Lambda_h^{(1)}$ para aproximar o fluxo nas faces. No entanto, a maneira como o método é construído é fundamentalmente diferente, e impossibilita a utilização de uma interpolação de ordem superior $\Lambda_h^{(l)}$ ($l \geq 2$). Finalmente, a diferença de MHM, nos trabalhos citados a construção é feita a partir da forma mista do problema e, como consequência, todos os problemas locais são necessariamente mistos. Isto obriga a escolha de um par de espaços *inf-sup estável* para resolver os problemas no segundo nível.

2.3.3.3 Método híbrido-primal

A formulação variacional híbrida proposta originalmente em [59] e estudada em [61] utiliza o seguinte espaço de aproximação

$$V_k := \{q \in V : q|_K \in \mathbb{P}^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

para $k \in \mathbb{N}_0$ e $\Lambda_h^{(l)}$ para $l \in \mathbb{N}_0$. Assim, em [61] é proposta a formulação

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (p_k, \lambda_h^{(l)}) \in V_k \times \Lambda_h^{(l)} \text{ tal que} \\ & (\mathcal{K}\nabla p_k, \nabla q_k)_{\mathcal{T}_h} + (q_k, \lambda_h^{(l)})_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q_k)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (p_k, \mu_l)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \\ & \text{para todo } (q_k, \mu_l) \in V_k \times \Lambda_h^{(l)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

A formulação em (2.41) é bem posta se e somente se é satisfeita a condição $k \geq l+1$ quando l é par ou $k \geq l+2$ quando l é ímpar (ver [61]). Note que para $k=0$ a formulação (2.41) não está bem posta independente da escolha de l .

Desconsiderando qualquer aspecto multi-escalas, a formulação variacional MHM exposta em (2.44) pode ser entendida como a formulação (2.41) para $k=0$

com um termo extra do tipo $(T\lambda_h^{(l)}, \mu_l)_{\partial\mathcal{T}_h}$. Notamos que o termo $(T\lambda_h^{(l)}, \mu_l)_{\partial\mathcal{T}_h}$ é coercivo no subespaço não trivial

$$\{\mu_l \in \Lambda_h^{(l)} : (q_0, \mu_l) = 0, \forall q_0 \in V_0\}.$$

Portanto, a formulação em (2.44) está bem posta e pode ser considerada uma versão *estabilizada* da formulação primal-híbrida (2.41) com $k = 0$. No capítulo 3 demonstramos tal afirmação.

2.3.4 Sumário do método MHM

O método de elementos finitos MHM (*Multiscale Hybrid-Mixed*) desenvolvido a partir da formulação variacional (2.19), fornece uma solução aproximada $p_h \approx p$ dada em (2.30) completamente determinada pelo problema global discreto (2.29), as funções de base multi-escalas (2.33) e os problemas locais (2.18). A seguir apresentamos um sumário do método MHM.

O método MHM fornece uma solução aproximada p_h que se decompõe em $p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$. Para tanto, existem dois grupos de problemas locais:

(1) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ resolvemos:

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } p_f|_K \in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ (\mathcal{K}\nabla p_f, \nabla w)_K = (f, w)_K, \\ \text{para todo } w \in H^1(K) \cap L_0^2(K). \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

(2) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$, $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ e $i \in \{1, \dots, l+1\}$ resolvemos:

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } \eta_{F,K}^{(i)} \in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ (\mathcal{K}\nabla \eta_{F,K}^{(i)}, \nabla w)_K = -(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K})(\psi_F^{(i)}, w)_F, \\ \text{para todo } w \in H^1(K) \cap L_0^2(K). \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Usando as funções de base (2.43) e a solução dos problemas locais (2.42),

resolvemos:

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Achar } (\bar{p}_h, \lambda_h) \in V_0 \times \Lambda_h \text{ tal que} \\
 & \qquad (q_0, \lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, q_0)_{\mathcal{T}_h}, \\
 & (\bar{p}_h, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h} + (T\lambda_h, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu_h)_F - (p_f, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\
 & \text{para todo } (q_0, \mu_h) \in V_0 \times \Lambda_h.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Assim as componentes da solução $p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$, são descritas como:

- (1) *Constantes por partes:* $\bar{p}_h \in V_0$ é uma constante em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, e está completamente determinada pelo problema global (2.44). Esta parte da solução contém apenas informação na escala da malha \mathcal{T}_h .
- (2) *Influência do fluxo:* $T\lambda_h \in V_0^\perp$ é uma função de média nula em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$. Esta função é uma combinação linear das funções de base multi-escalas em (2.43), os seus graus de liberdade são determinados pelo problema global (2.44) que coincidem com os graus de liberdade da interpolação de $\lambda_h \in \Lambda_h$. Isto pode ser expressado formalmente em cada $K \in \mathcal{T}_h$ como:

$$\left[\lambda_h^{\partial K} = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)} \right] \Rightarrow \left[T\lambda_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} \eta_{F,K}^{(i)} \right],$$

onde para cada $F \subset \mathcal{E}$ as constantes $c_F^{(1)}, \dots, c_F^{(l+1)} \in \mathbb{R}$ são determinadas pelo problema global (2.44). As funções $\psi_F^{(1)}, \dots, \psi_F^{(l+1)}$ compõem a base canônica de $\mathbb{P}^l(F)$ e as funções de base $\eta_{F,K}^{(1)}, \dots, \eta_{F,K}^{(l+1)}$ resolvem os problemas locais (2.43), e capturam os aspectos multi-escalas do problema.

- (3) *Influência da fonte:* $p_f \in V_0^\perp$ é uma função de média nula em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ e é completamente determinada pelo problema local (2.42). A componente p_f contém características multi-escalas dos dados do problema e a influência da fonte $f \in L^2(\Omega)$ na solução. Observando (2.42) podemos notar que se $f|_K \in \mathbb{R}$ então $p_f^K = 0$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$.

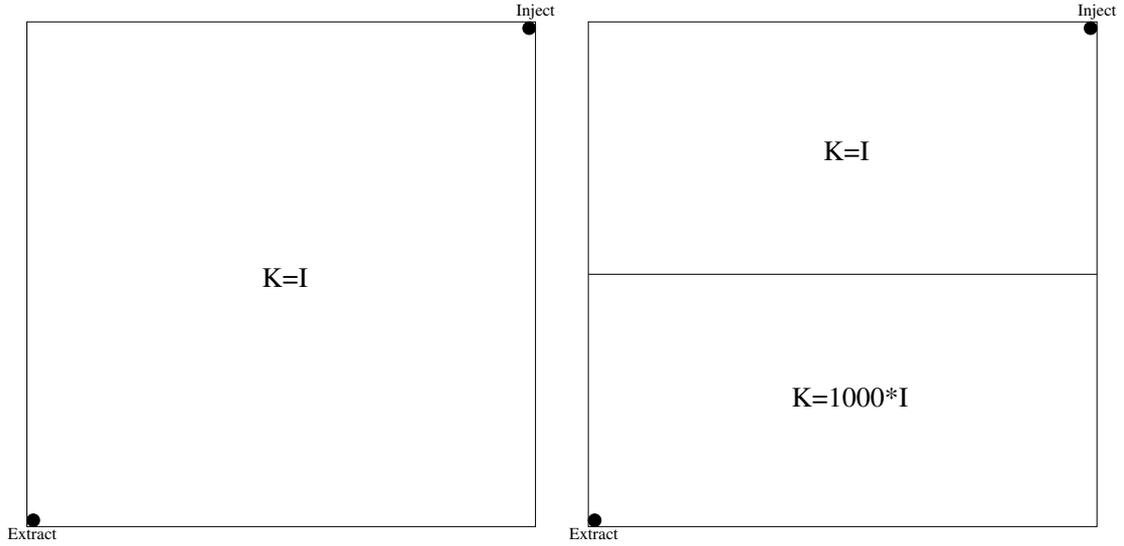


Figura 2.4: Descrição do problema *quarter five-spot*, com permeabilidade constante (esquerda) e com alto contraste (direita).

Vale ressaltar que os problemas locais são completamente independentes e podem ser computados em paralelo.

2.4 Validações numéricas

Nesta seção mostramos as capacidades multi-escalas do método MHM. Em todos os experimentos numéricos assumimos que os problemas locais (2.43) e (2.42) são resolvidos usando um esquema de discretização de Galerkin clássico com elementos do tipo $\mathbb{P}^k(K)$ contínuo, para $k \in \mathbb{N}$.

2.4.1 Problema *quarter five-spot*

A seguir, apresentamos experimentos numéricos para o problema *quarter five-spot* definido em um quadrado unitário com poços de injeção e extração posicionados em vértices opostos (ver Figura 2.4), estes poços são representados por um termo de fonte definido por funções *delta de Dirac* (ver definição em [52], página 264) concentradas nos vértices e com sinais opostos, i.e.,

$$f = \delta_{\mathbf{x}_0} - \delta_{\mathbf{x}_1}, \quad (2.45)$$

onde, $\mathbf{x}_0 = (0, 0) \in \Omega$ e $\mathbf{x}_1 = (1, 1) \in \Omega$. Por simplicidade assumimos que existe um único elemento $K_i \in \mathcal{T}_h$ tal que $\mathbf{x}_i \in K_i$, para cada $i \in \{0, 1\}$. Considere a formulação variacional (2.19). Neste caso o termo de fonte da primeira equação é dado por

$$(f, q_0)_{\mathcal{T}_h} = (\delta_{\mathbf{x}_0}, q_0)_{\mathcal{T}_h} - (\delta_{\mathbf{x}_1}, q_0)_{\mathcal{T}_h} = q_0^{K_0} - q_0^{K_1}. \quad (2.46)$$

Na segunda equação o termo p_f satisfaz $p_f^K = 0$ para $K \neq K_i$ e $i \in \{1, 2\}$, e para $K = K_i$ satisfaz o seguinte problema variacional:

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } p_f^{K_i} \in H^1(K_i) \cap L_0^2(K_i) \text{ tal que} \\ (\mathcal{K} \nabla p_f^{K_i}, \nabla w)_{K_i} &= (-1)^i w(\mathbf{x}_i), \\ \text{para todo } w \in H^1(K_i) \cap L_0^2(K_i). \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Consideramos dois casos: permeabilidade constante e com alto contraste como mostrado na Figura 2.4.

2.4.1.1 Caso permeabilidade constante

As Figuras 2.5-2.8 mostram os resultados para $l \in \{0, 2\}$. Primeiramente, a Figura 2.5 mostra uma elevação para p_h em que podemos ver resultados similares para ambos os valores de l . Note que aumentar l permite uma solução melhor aproximada nos poços. Na Figura 2.6, são apresentadas isolinhas do valor absoluto de $\sigma(p_h)$, novamente, considerar l maior implica em resultados mais precisos.

O desempenho do método para uma malha não estruturada pode ser observada nas Figuras 2.7 e 2.8. Notamos que os resultados são muito similares aos obtidos usando uma malha estruturada.

2.4.1.2 Permeabilidade com alto contraste

Aqui mostramos o desempenho do método em relação ao problema *quarter five-spot* considerando uma permeabilidade com alto contraste (ver Figura 2.4). Usando uma malha estruturada com 32 triângulos ao longo de cada lado do domínio, estudamos este problema usando duas possíveis posições para a interface entre

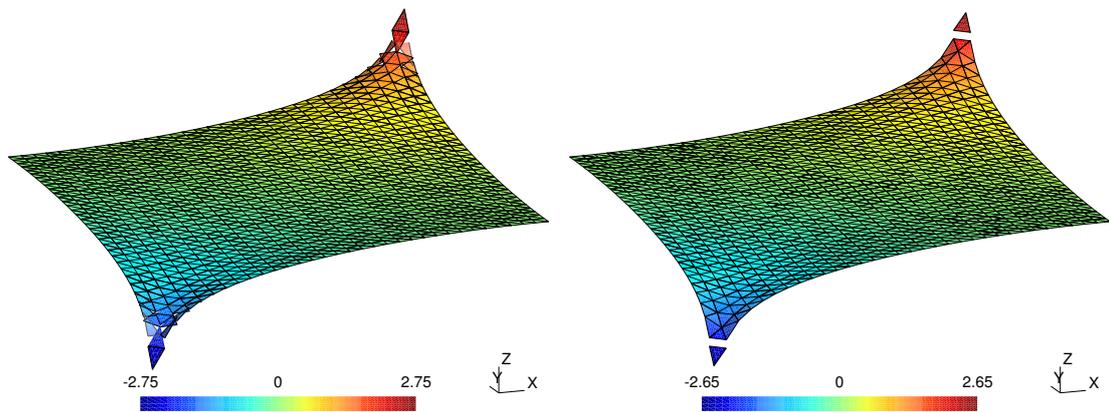


Figura 2.5: Elevação de p_h para o problema *quarter five-spot* usando $l = 0$ (esquerda) e $l = 2$ (direita).

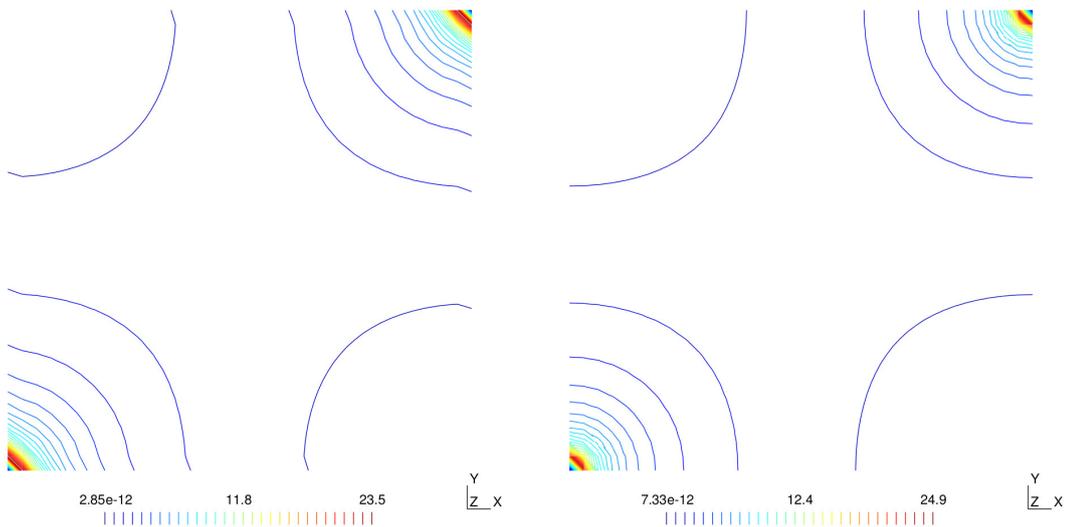


Figura 2.6: Isolinhas do valor absoluto de $\sigma(p_h)$ para o problema *quarter five-spot* usando $l = 0$ (esquerda) e $l = 2$ (direita).

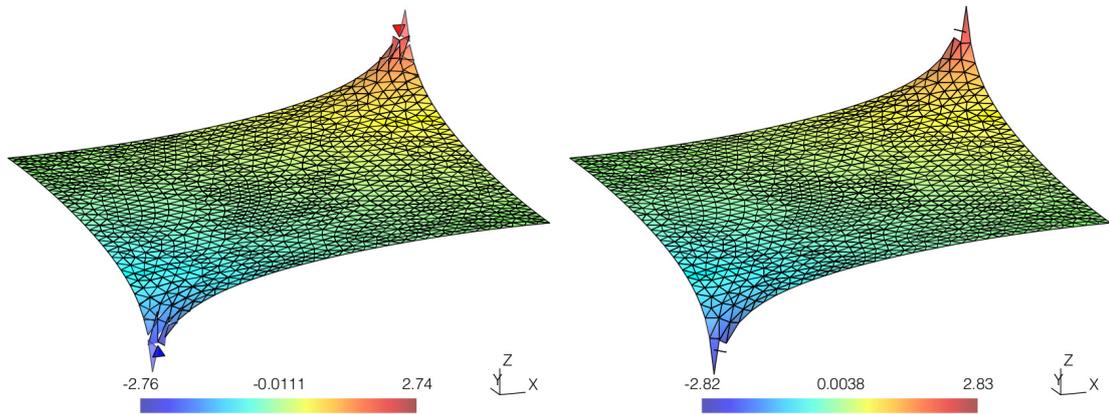


Figura 2.7: Elevação de p_h para o problema *quarter five-spot* usando uma malha não estruturada, $l = 0$ (esquerda) e $l = 2$ (direita).

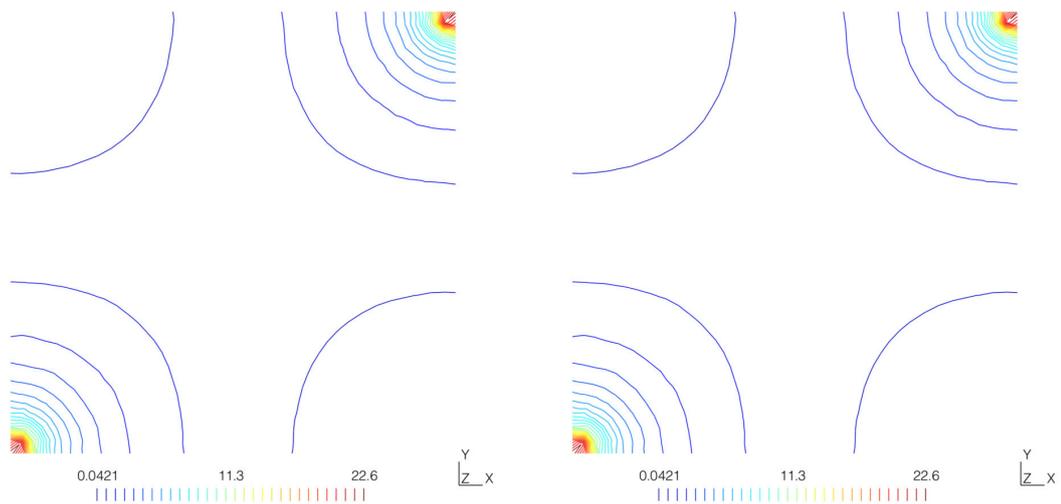


Figura 2.8: Isolinhas do valor absoluto de $\sigma(p_h)$ para o problema *quarter five-spot* para uma malha não estruturada, $l = 0$ (esquerda) e $l = 2$ (direita).

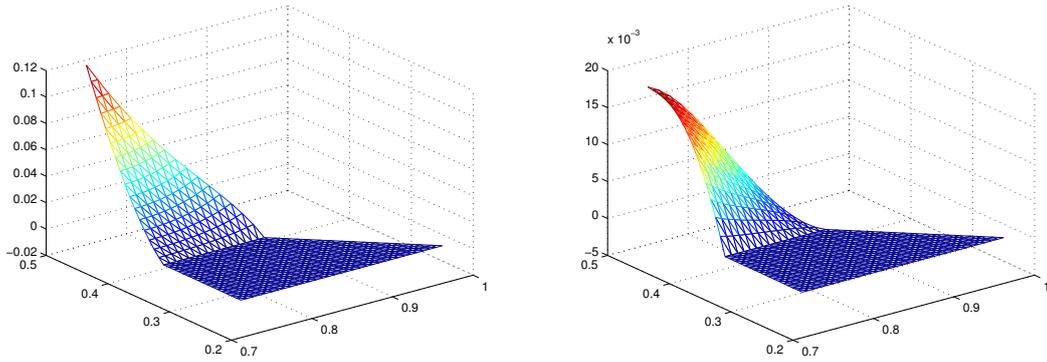


Figura 2.9: Exemplo de funções de base com uma interface de alto contraste. Usamos $l = 0$ (esquerda) e $l = 2$ (direita).

os diferentes valores da permeabilidade. No primeiro caso, assumimos que a interface para os valores das permeabilidades coincide com a fronteira dos elementos ao longo de $y = 0.5$. No segundo caso, a interface não coincide com as fronteiras dos elementos e está posicionada em $y = 0.484375$. Apresentamos na Figura 2.9 um exemplo de funções de base para uma interface de alto contraste não alinhada com a fronteira dos elementos. Podemos ver que as funções de base se adaptam naturalmente, considerando um comportamento consistente com a diferença de permeabilidade.

Primeiramente, nas Figuras 2.10-2.12 mostramos o desempenho do método com $l \in \{1, 3\}$ no caso em que a interface de alto contraste está em $y = 0.5$. Observamos as capacidades do método MHM em aproximar p_h e o fluxo $\sigma(p_h)$ com precisão, no último caso capturando perfeitamente a descontinuidade. Observamos que o desempenho melhora conforme aumenta l .

Na Figura 2.13, apresentamos os resultados para $l = 0$ no caso em que a interface de alto contraste está em $y = 0.484375$. Nesta posição a interface está alinhada com os elementos da malha do segundo nível (uma malha bastante grosseira com apenas dois elementos ao longo de cada aresta) usada para aproximar a solução do problema local.

Os problemas locais são resolvidos usando duas diferentes estratégias. A primeira delas utiliza elementos quadráticos contínuos para resolver (2.43), e a

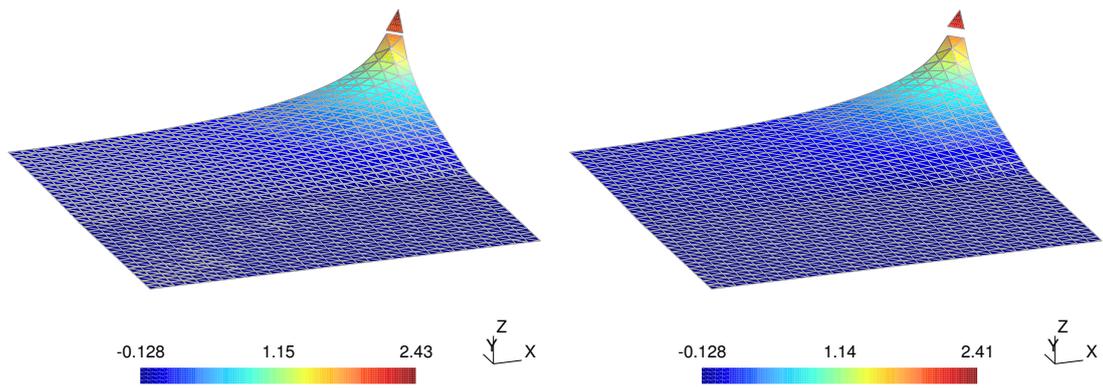


Figura 2.10: Elevação de p_h para o problema com permeabilidade com alto contraste usando $l = 1$ (esquerda) e $l = 3$ (direita).

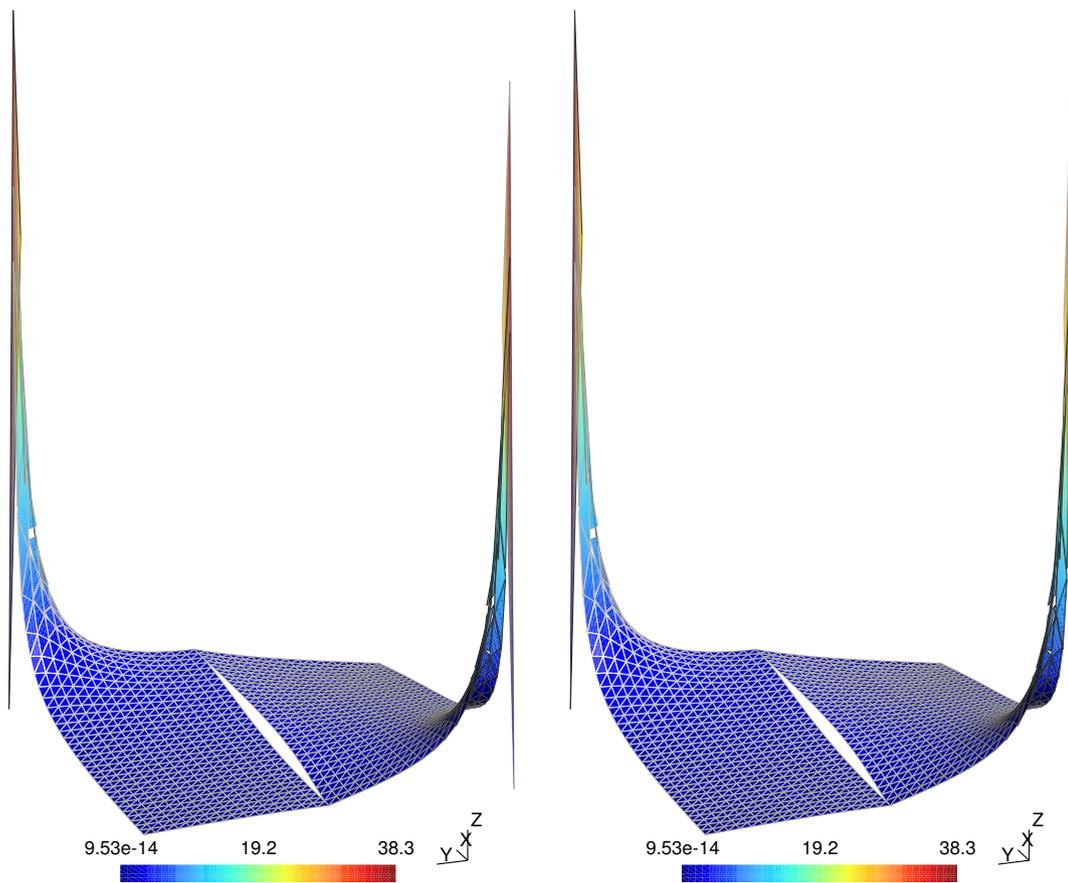


Figura 2.11: Elevação para o valor absoluto de $\sigma(p_h)$ para o problema com permeabilidade com alto contraste, usando $l = 1$ (esquerda) e $l = 3$ (direita).

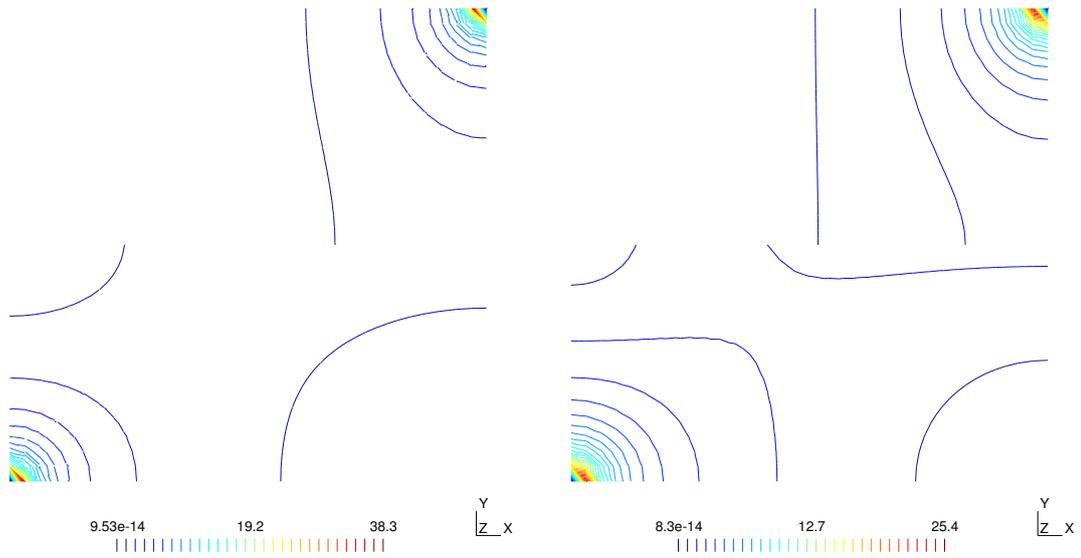


Figura 2.12: Isolinas para o valor absoluto de $\sigma(p_h)$ para o problema com permeabilidade com alto contraste, usando $l = 1$ (esquerda) e $l = 3$ (direita).

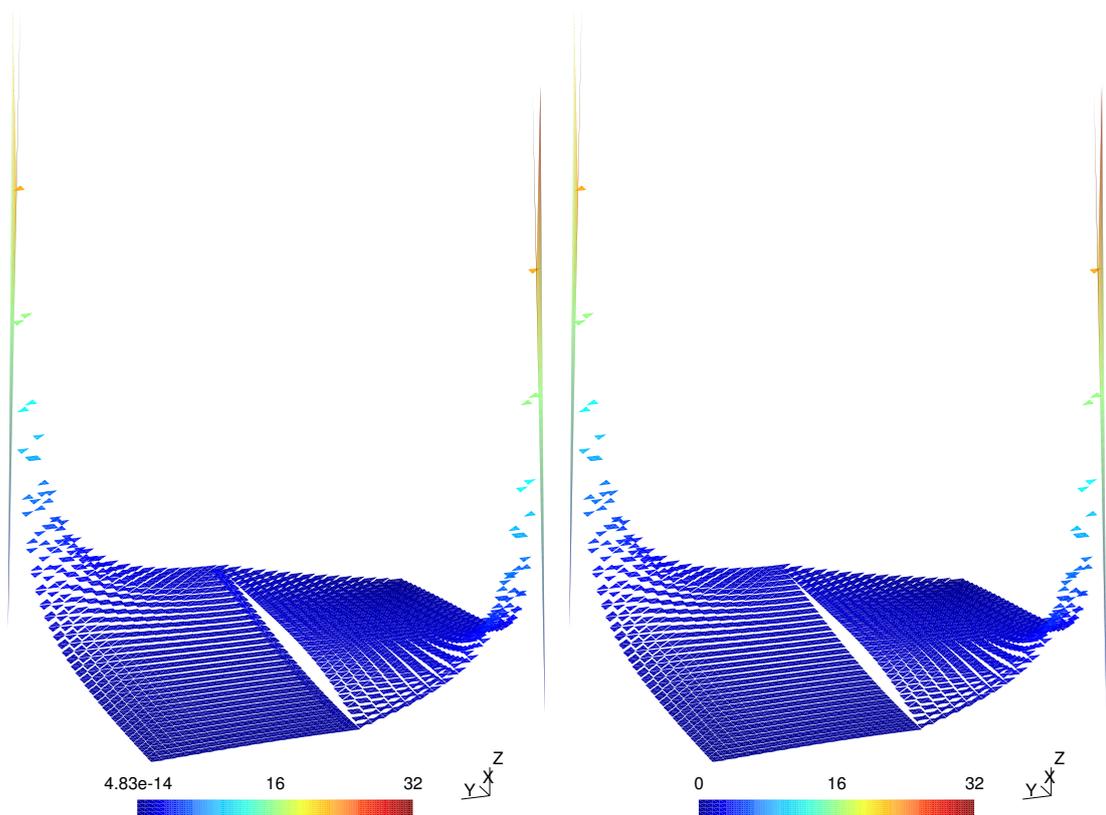


Figura 2.13: Elevação para o valor absoluto de $\sigma(p_h)$ usando $l = 0$. Os problemas locais (2.43) são resolvidos usando um método elíptico (esquerda) ou usando um método misto (direita).

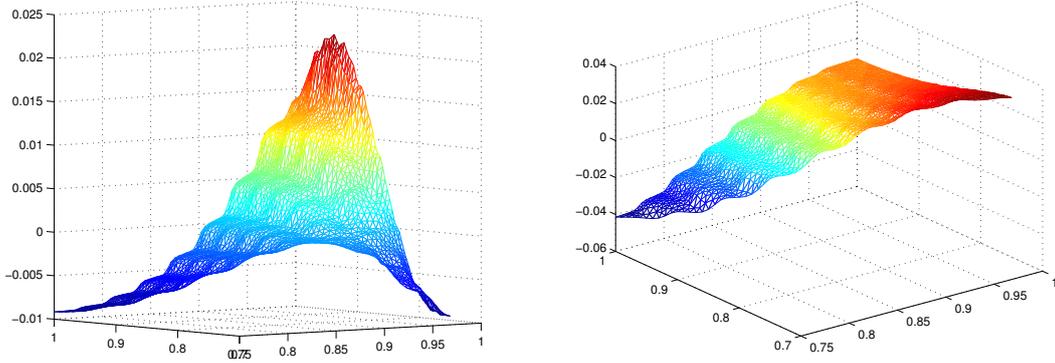


Figura 2.14: Funções de bases representativas $l = 3$ para um elemento triangular. Consideramos um coeficiente \mathcal{K} oscilatório.

segunda abordagem utiliza elementos de Raviart-Thomas de mais baixa ordem para resolver a versão mista de (2.43) como proposto em observação 2.4. Podemos notar pela elevação do valor absoluto da velocidade que os comportamentos são muito similares nas duas abordagens. Oscilações espúrias de pequena amplitude podem ser observadas próximas à interface no caso do segundo nível ser resolvido com um método elíptico. O uso do elementos do tipo \mathbb{RT} no segundo nível mantém numericamente a conformidade com respeito ao espaço $H(\text{div}, \Omega)$ e corrige tais inconvenientes.

2.4.2 Coeficiente de permeabilidade oscilatório

Estamos interessados no desempenho dos novos métodos quando usados para resolver um problema com coeficientes altamente oscilatórios de período ε . Este problema é definido sobre um quadrado unitário com condição de Neumann homogênea, a fonte é dada por $f(\mathbf{x}) = 2\pi^2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y$, para cada $(x, y) \in \Omega$ e o coeficiente de permeabilidade é dado por

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \frac{2 + 1.8 \sin \frac{2\pi x}{\varepsilon}}{2 + 1.8 \sin \frac{2\pi y}{\varepsilon}} + \frac{2 + 1.8 \sin \frac{2\pi y}{\varepsilon}}{2 + 1.8 \cos \frac{2\pi x}{\varepsilon}},$$

fixando $\varepsilon = \frac{1}{16}$.

O método apresentado é implementado usando $l = 0$ e $l = 2$ sobre a mesma

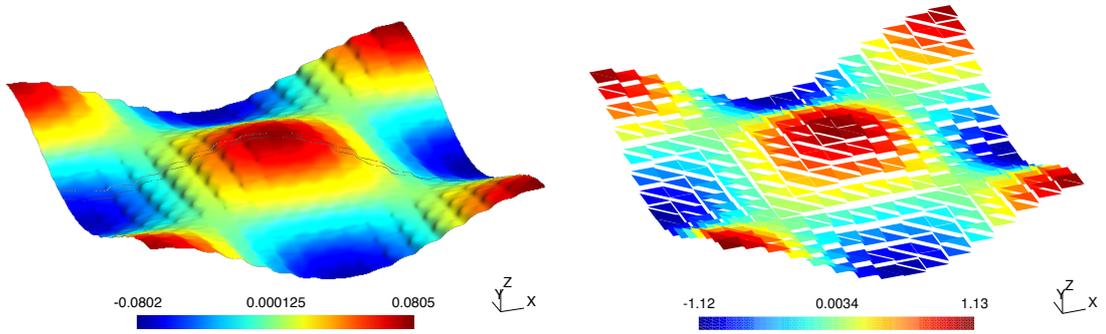


Figura 2.15: A pressão “exata”(esquerda) e \bar{p}_h calculada sobre uma malha grosseira com o método de Raviart-Thomas (direita).

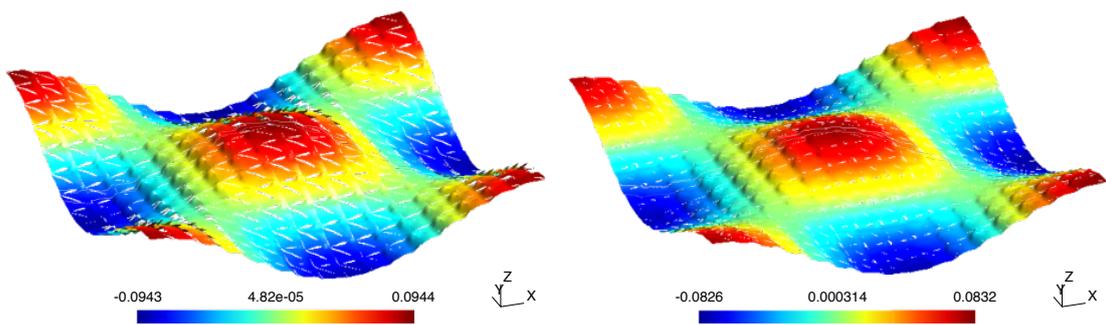


Figura 2.16: Solução $\bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$ com $l = 0$ (esquerda) e $l = 2$ (direita).

malha grossa. Uma abordagem que envolve dois níveis de aproximação se faz necessária. A malha usada dentro de cada elemento é uma malha não estruturada com 32 elementos ao longo de cada aresta. Na Figura 2.14 mostramos exemplos de funções de base para o caso $l = 3$, onde podemos ver a influência das escalas pequenas. Como meio de comparação, calculamos a solução do problema (2.1) usando o método de Galerkin clássico com elementos lineares e uma malha extremamente fina (512 elementos em cada eixo), e denominamos de “solução exata”. Com relação ao método MHM, usamos uma malha grossa (16 elementos em cada eixo). Esta mesma malha é utilizada para resolver o problema pelo método de RT de mais baixa ordem.

Primeiramente, comparamos a aproximação por constante por partes usando o método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem. Como mostrado na Figura 2.15, a solução com o método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem captura o aspecto da solução corretamente mas apresenta uma diferença considerável na amplitude da mesma (observe que a escala da imagem é diferente). Por outro lado, o resultado na Figura 2.16 mostra que o método MHM apresenta um desempenho melhor comparado ao método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem. O uso de valores maiores para l melhora ainda mais a qualidade da solução numérica.

De fato, observemos as Figuras 2.17 e 2.18 que mostram uma comparação entre a constante por partes e a “solução exata” em um corte vertical plano definido de $(0,0)$ até $(1,1)$. Na Figura 2.17 mostramos que o método MHM para $l = 0$ melhora consideravelmente a precisão da solução numérica quando comparada à aproximação usando constantes por partes pelo método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem. Os resultados nas figuras 2.18 e 2.19 justificam a observação de que uma escolha de l maior faz uma diferença (positiva) significativa. Na Figura 2.18, podemos observar que as constantes por partes obtidas a partir de MHM usando $l = 2$ é melhor do que a aproximação usando constante por partes fornecida por MHM com $l = 0$. Ainda mais interessante, a pressão $\bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$ fornece uma aproximação muito precisa para um valor de l suficientemente alto, como mostrado

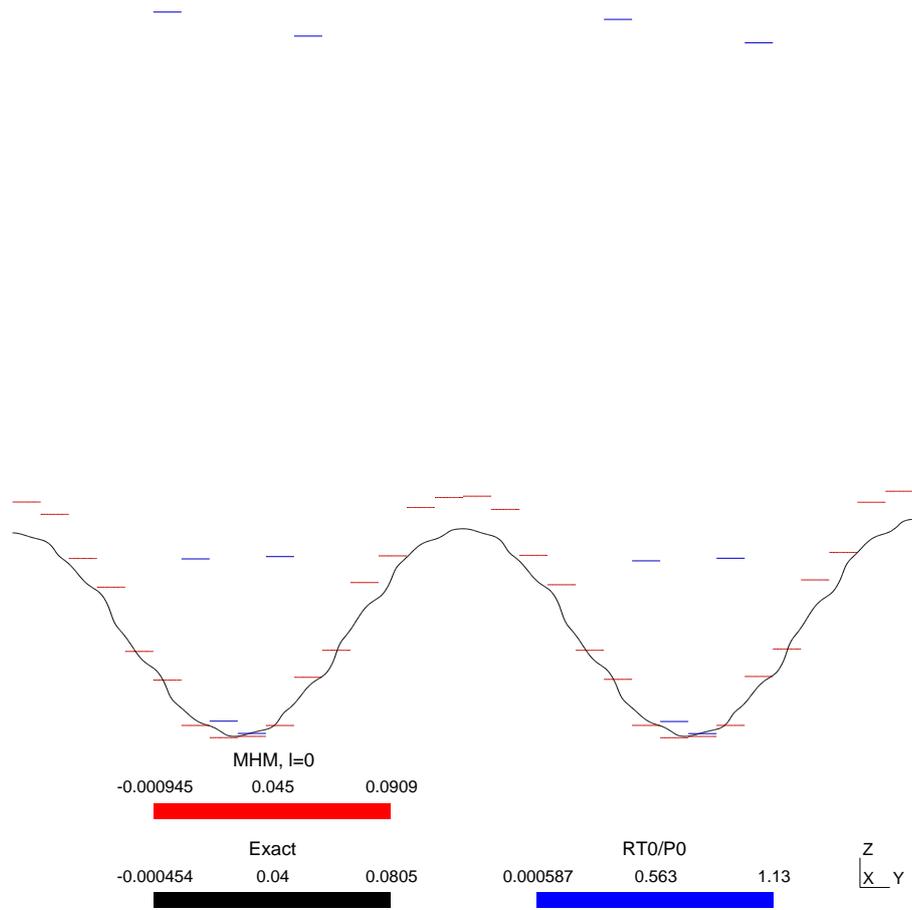


Figura 2.17: Perfis de \bar{p}_h . Mostramos a solução pelo método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem (azul), usando o método MHM para $l = 0$ (vermelho), e a “solução exata”(preto).

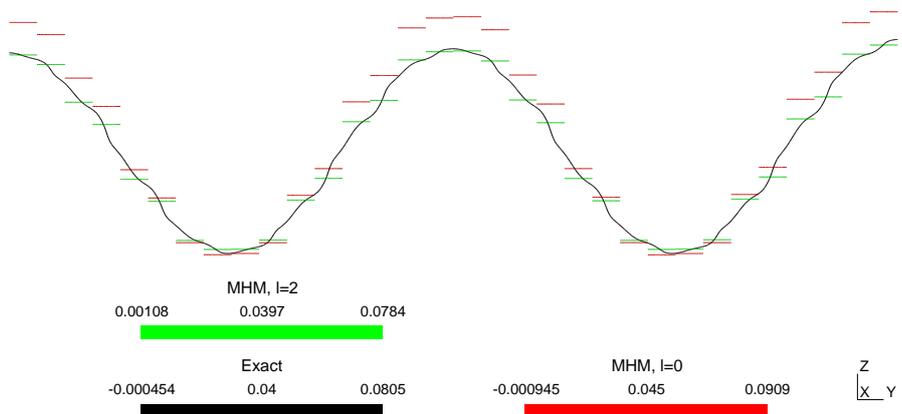


Figura 2.18: Perfis de \bar{p}_h pelo método MHM usando $l = 0$ (vermelho) e $l = 2$ (verde) comparados com a “solução exata”(preto).

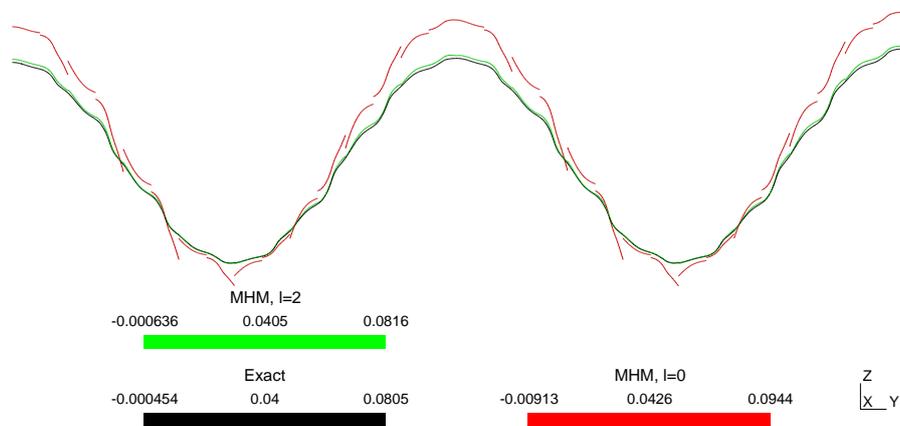


Figura 2.19: Perfis de $\bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$ para o método MHM usando $l = 0$ (vermelho) and $l = 2$ (verde) comparada com a “solução exata”(preto).

na Figura 2.19.

2.4.3 Permeabilidade multi-escalas

Como validação final, consideramos o desempenho do método MHM atuando sobre um problema com permeabilidade multi-escala *log-normal*, mostrada na Figura 2.21. Para determinar o campo de permeabilidade, o quadrado unitário foi dividido em 100×100 quadrados, e a permeabilidade é dada por

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \alpha e^{\gamma Y(\mathbf{x})},$$

com Y uma variável *normal* randômica, e onde α e γ são fixadas igual a 1. O valor para Y é assumido constante sobre cada quadrado gerando uma permeabilidade constante sobre cada um deles. A fonte é considerada homogênea, com condição de Dirichlet igual a 1 no contorno esquerdo e 0 no contorno direito do domínio. No contorno superior e inferior consideramos uma condição de Neumann igual a 0. A malha mais fina possui 100 elementos triangulares ao longo de cada eixo, a malha seguinte 50 e a última 25. Na malha mais fina, a sub-malha usada para determinar numericamente as funções de base é formada por apenas 1 triângulo, nas outras malhas se considera uma sub-malha suficientemente fina tal que o somatório de todas as sub-malhas consideradas tenha o número total de elementos da malha mais fina. Na Figura 2.20 mostramos um exemplo de funções de base resolvidas usando uma sub-malha fina sobre um triângulo na malha mais grossa. Podemos ver a influência do coeficiente multi-escala na forma da função de base.

O primeiro resultado considera o impacto de uma interpolação de alta ordem para $\lambda_h \in \Lambda_h$ sobre o campo de velocidades em uma malha fina. Isto é mostrado nas Figuras 2.21, 2.22, e 2.23. Em todos os casos, podemos ver que a velocidade mostra o comportamento esperado, sendo maior nas regiões de maior permeabilidade, mas no caso $l = 2$ pode-se observar uma incorporação mais nítida das estruturas multi-escalas.

Em seguida comparamos as aproximações usando malhas diferentes e con-

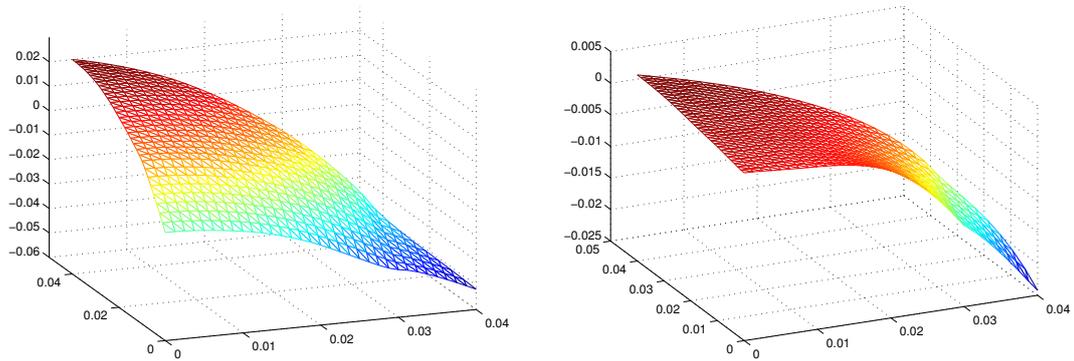


Figura 2.20: Exemplo de funções de base com coeficiente de permeabilidade multi-escalas para $l = 0$ (esquerda) e $l = 3$ (direita).

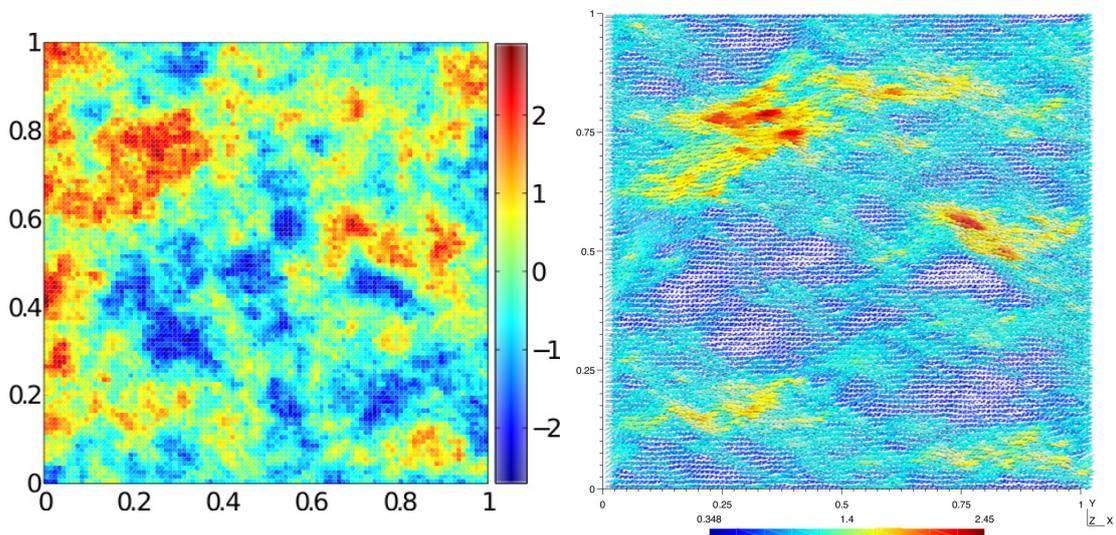


Figura 2.21: Gráfico da variável Y em quadrados (esquerda), 100 quadrados em cada eixo. Campo de velocidade numérica (direita) é calculado usando $l = 2$ em uma malha triangular, com dois triângulos por cada quadrado que representa a permeabilidade.

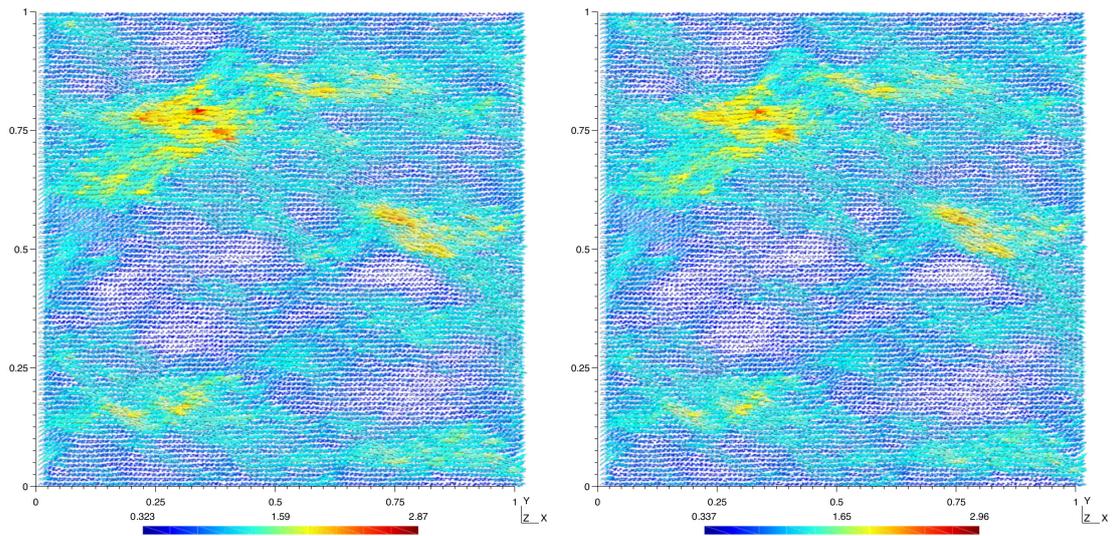


Figura 2.22: Campo de velocidades usando $l = 2$ sobre uma malha com 50×50 triângulos (esquerda) e 25×25 triângulos (direita).

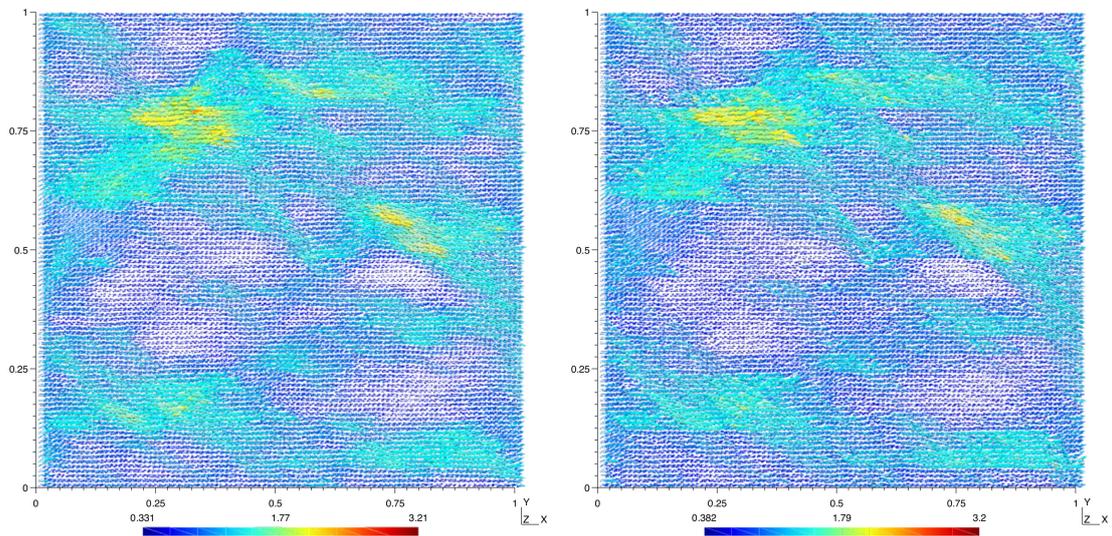


Figura 2.23: Campo de velocidades usando $l = 0$ sobre uma malha com 50×50 triângulos (esquerda) e 25×25 triângulos (direita).

sideramos a pressão como constante por partes na Figura 2.24. Os gráficos são obtidos com um corte plano vertical que contém a linha entre o ponto $(0, 0)$ e o ponto $(1, 1)$. O gráfico da esquerda mostra resultados para \bar{p}_h na malha mais grossa para $l = 0$ e $l = 2$, as quais são similares com os resultados em uma malha fina com $l = 0$. Mostramos também que o resultado usando o método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem é pouco preciso. O gráfico da direita mostra $\bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$ e observamos que obtemos em cada malha o mesmo resultado anteriormente relatado. É importante notar que estes bons resultados foram obtidos resolvendo-se problemas locais elípticos (ver (2.43) e (2.42)) no segundo nível.

Finalmente, reproduzimos uma solução de referência para o caso *log-normal* (ver Figura 2.25) usando uma malha extremamente fina (perto de 2 milhões de elementos) para estudar se o método MHM em uma malha grossa é capaz de reproduzir a dissipação de energia devida às forças viscosas, i.e., $E := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{K} (\nabla p)^2$. É importante mencionar que um caminho alternativo para calcular a referência E envolve o conceito de *permeabilidade equivalente* para um meio heterogêneo (ver [64] e [62] para mais detalhes). Aqui, a quantidade de referência E é comparada com a sua correspondente aproximada $E_h := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{K} (\nabla p_h)^2$, onde p_h é a solução obtida com o método MHM sobre uma malha grossa. Os resultados numéricos mostram que $\frac{E_h}{E}$ se aproxima rapidamente de 1 (ver Figura 2.26) com relação à convergência em h e l . Concluimos que o método MHM preserva a energia dissipativa com boa precisão em malhas grossas. Esta análise mostrou também que, para um dado quociente $\frac{E_h}{E}$, é computacionalmente mais atrativo (em termo de número de graus de liberdade) aumentar l em uma malha grossa fixa do que usar um l pequeno sobre uma malha fina.

2.5 Conclusões

Neste capítulo propomos uma nova família de métodos de elementos finitos para a equação de Darcy, denominados métodos *Multiscale Hybrid-Mixed* (MHM), que capturam com precisão as pequenas escalas do problema. Os métodos MHM

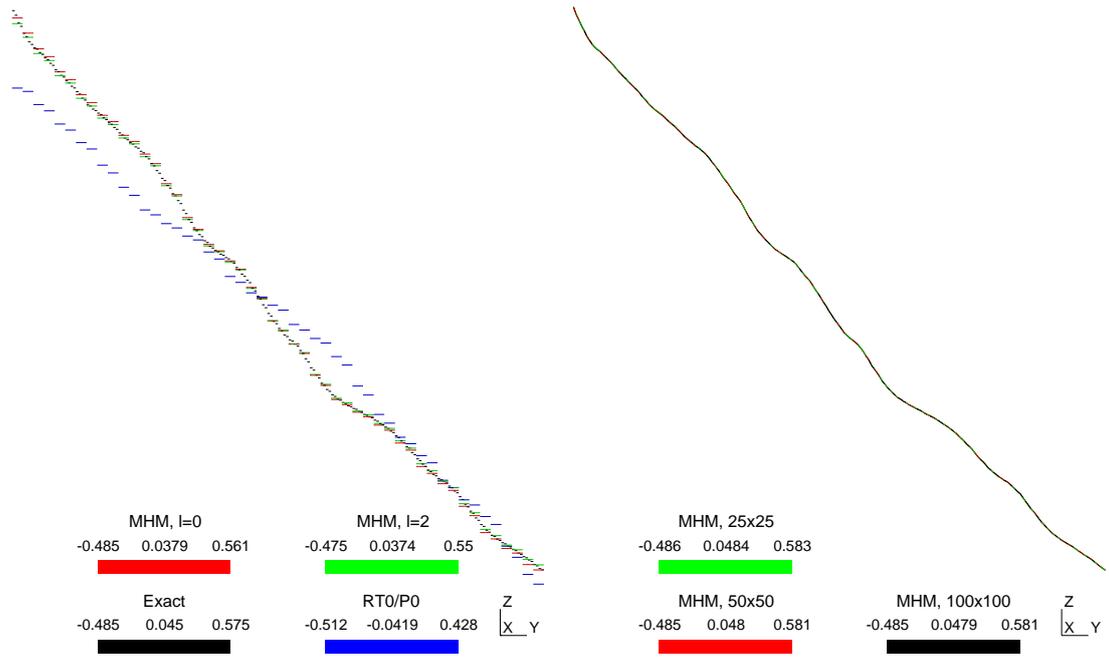


Figura 2.24: Perfis para a pressão aproximada. O gráfico à esquerda mostra o resultado usando o método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem sobre uma malha com 100×100 elementos (preto) e sobre uma malha de 25×25 elementos (azul), e o método MHM usando $l = 0$ (vermelho) e $l = 2$ (verde) na mesma malha grossa. O gráfico da direita mostra o método MHM para $l = 2$ sobre uma malha de 25×25 elementos (verde), sobre uma malha com 100×100 elementos (preto), e sobre uma malha com 50×50 elementos (vermelho).

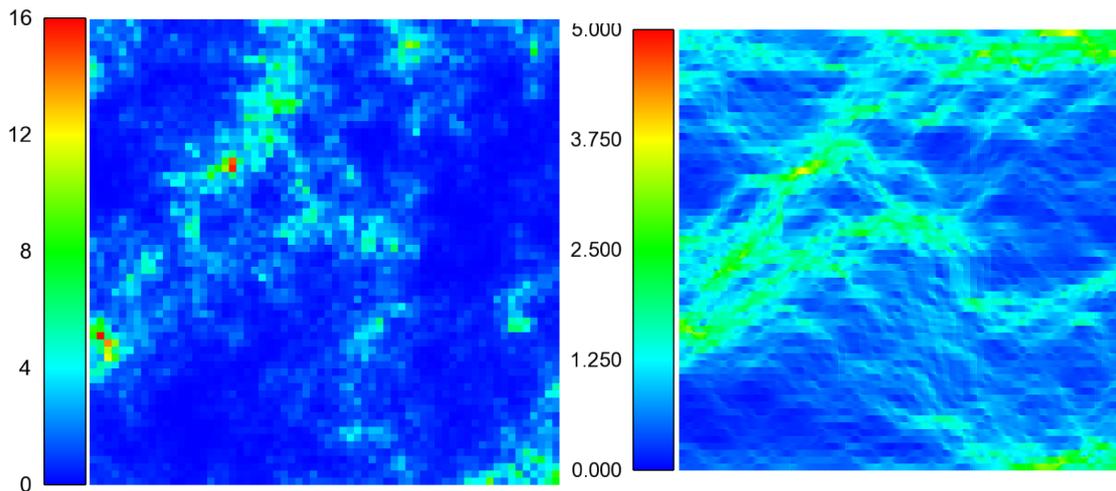


Figura 2.25: Campo de permeabilidade (esquerda) e valor absoluto da velocidade em uma malha fina (direita).

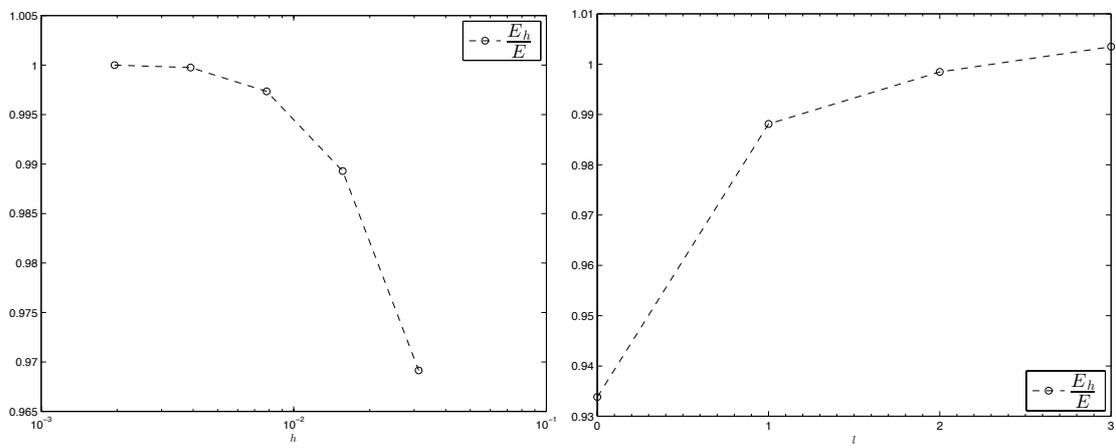


Figura 2.26: Gráfico de $\frac{E_h}{E}$ com respeito a um refinamento para h (esquerda) e um refinamento para l (direita).

foram desenvolvidos usando uma estratégia de decomposição de espaços para o computo das funções de base. Estas satisfazem a equação de Laplace em cada elemento da malha. A continuidade da solução é imposta fracamente usando multiplicadores de Lagrange, o que permitiu que as condições de contorno dos problemas locais fossem definidas naturalmente. Os resultados numéricos mostram a capacidade do MHM em tratar de forma precisa as heterogeneidades e coeficientes com alto contraste. Além disso, a presente abordagem induz um pós-processamento da pressão, de forma a reconstruir um campo de velocidade localmente conservativo, sem aumento do custo computacional. Os métodos MHM de certa forma generalizam métodos conhecidos, como o método de Raviart-Thomas de mais baixa ordem, o método misto multi-escala em [19], o método tipo *upscaling* apresentado em [6], e pode ser interpretado como uma estabilização do método híbrido-primal [61]. Concluimos, que a nova família de métodos multi-escalas surge como uma alternativa atraente para resolver problemas mistos em geometrias complexas com alta ordem de aproximação, e naturalmente adaptado a computação massivamente paralela. Aspectos relacionados com a paralelização do algoritmo MHM, assim como comparações com o estratégias de decomposição domínio merecem investigação mais profunda. A análise numérica para os métodos MHM assim como validações numéricas de convergência ótima são apresentada no capítulo 3. Finalmente, a sua extensão a problemas de transporte com advecção e/ou reação dominante é apresentada no capítulo 4.

Capítulo 3

Análise Numérica para o método MHM

3.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à análise numérica do método MHM (*Multiscale Hybrid-Mixed*), desenvolvido no Capítulo 2. Está organizado em seis seções principais. Na seção 3.2 revisitamos a construção do método MHM, introduzindo uma notação apropriada à análise. Em seguida, na seção 3.3, apresentamos algumas novas definições e resultados técnicos que serão utilizados nas seções seguintes. Na seção 3.4 provamos a existência e unicidade de solução para o método MHM. Na seção 3.5 mostramos que a precisão da solução numérica do método MHM depende *exclusivamente* da escolha dos espaços de aproximação para o multiplicador de Lagrange. Em consequência, na seção 3.6, apresentamos estimativas de erro *a-priori* com convergência ótima nas normas naturais. Além disso, propomos um novo estimador de erro *a-posteriori* baseado em resíduos nas faces, o qual demonstramos possuir as propriedades de eficiência local e confiabilidade. Finalmente, na seção 3.7, validamos numericamente os resultados teóricos através de experimentos numéricos desafiadores, como forma de colocar em evidência as capacidades práticas do método MHM.

3.2 Método híbrido-misto multi-escalas

Lembremos problema elíptico estudado no Capítulo 2: *Achar p tal que*

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p) &= f \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{K} \nabla p \cdot \mathbf{n}^\Gamma &= 0 \text{ em } \Gamma_N, \\ p &= g \text{ em } \Gamma_D, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

onde f e g são funções dadas suficientemente regulares. O coeficiente de *permeabilidade* $\mathcal{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$ é um tensor simétrico e uniformemente elíptico, i.e., existe $c_{\min}, c_{\max} > 0$ tais que

$$c_{\min} |\xi|^2 \leq \xi^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \xi \leq c_{\max} |\xi|^2, \quad (3.2)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ e para todo $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

A continuação revisitamos o método MHM. Seja $V = H^1(\mathcal{T}_h)$ e $\Lambda := \{\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{E}) : \mu_F^{\partial K} = 0, \forall F \in \mathcal{E}^N\}$, e considere o espaço de dimensão finita $V_0 \subset V$ definido por

$$V_0 := \{q_0 \in V : q_0|_K \in \mathbb{R}, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.3)$$

e o seu complemento ortogonal V_0^\perp com respeito ao produto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{T}_h}$. Considere a transformação linear $T : \Lambda \rightarrow V_0^\perp$ tal que, dado $\lambda \in \Lambda$, associamos $T\lambda$ à solução de:

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } T\lambda|_K &\in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ (\mathcal{K} \nabla T\lambda|_K, \nabla w)_K &= -(\lambda, w)_{\partial K}, \\ \text{para todo } w &\in H^1(K) \cap L_0^2(K), \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

em cada $K \in \mathcal{T}_h$. A função $p_f \in V_0^\perp$ é definida localmente através da coleção de problemas

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } p_f^K &\in H^1(K) \cap L_0^2(K) \text{ tal que} \\ (\mathcal{K} \nabla p_f^K, \nabla w)_K &= (f, w)_K, \\ \text{para todo } w &\in H^1(K) \cap L_0^2(K), \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

para cada $K \in \mathcal{T}_h$.

Em seguida, considere as formas bilineares $a : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, e $b : \Lambda \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

definidas por

$$a(\lambda, \mu) := -(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}, \quad \forall(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda, \quad (3.6)$$

$$b(\mu, q) := -(q, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}, \quad \forall(\mu, q) \in \Lambda \times V, \quad (3.7)$$

e a forma bilinear $B : (\Lambda \times V_0) \times (\Lambda \times V_0) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$B(\lambda, p_0; \mu, q_0) := a(\lambda, \mu) + b(\mu, p_0) + b(\lambda, q_0), \quad (3.8)$$

para todo $(\lambda, p_0; \mu, q_0) \in (\Lambda \times V_0) \times (\Lambda \times V_0)$. Considere também a forma linear $F : (\Lambda \times V) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(\mu, q_0) := (p_f, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} - (f, q_0)_{\mathcal{T}_h} - \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F, \quad (3.9)$$

para todo $(\mu, q_0) \in \Lambda \times V_0$. Com as definições anteriores, reescrevemos a formulação variacional híbrida (2.19) como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } (\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0 \text{ tal que} \\ B(\lambda, \bar{p}; \mu, q_0) = F(\mu, q_0), \\ \text{para todo } (\mu, q_0) \in \Lambda \times V_0. \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Como mencionado no Capítulo 2, a formulação variacional (3.10) junto com os problemas (3.1) e (3.5) nos fornece uma caracterização da solução do problema (3.1) como

$$p = \bar{p} + T\lambda + p_f. \quad (3.11)$$

Consideremos o espaço de dimensão finita $\Lambda_h \subset \Lambda$ definido por:

$$\Lambda_h^{(l)} := \{\mu_h \in \Lambda : \mu_{h,F}^{\partial K} \in \mathbb{P}^l(F), \forall F \in \mathcal{E}^{\partial K}, \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.12)$$

O método de elementos finitos MHM é definido por

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } (\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h^{(l)} \times V_0 \text{ tal que} \\ B(\lambda_h, \bar{p}_h; \mu_h, q_0) = F(\mu_h, q_0), \\ \text{para todo } (\mu_h, q_0) \in \Lambda_h^{(l)} \times V_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

logo, a caracterização (3.11) tem uma versão aproximada p_h dada por

$$p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h + p_f. \quad (3.14)$$

3.3 Definições e resultados preliminares

Em vista da demonstração dos resultados de existência e unicidade, assim como para a análise de erro *a-priori* e *a-posteriori*, é necessário equipar os espaços utilizados com normas apropriadas. Consideramos o espaço $H(\text{div}, \Omega)$ junto com a norma usual $\|\cdot\|_{\text{div}} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|\sigma\|_{\text{div}} := \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\sigma\|_{0,K}^2 + d_\Omega^2 \|\nabla \cdot \sigma\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

onde $d_\Omega > 0$ representa o diâmetro de Ω . Alternativamente, definimos a norma $\|\cdot\|_{\text{div},h} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\|\sigma\|_{\text{div},h} := \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\sigma\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\nabla \cdot \sigma\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.16)$$

Seja $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{E})$, e munimos tal espaço com a norma $\|\cdot\|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|\mu\|_\Lambda := \inf_{\substack{\sigma \in H(\text{div}, \Omega) \\ \sigma^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \mu^{\partial K} \\ K \in \mathcal{T}_h}} \|\sigma\|_{\text{div}}. \quad (3.17)$$

Para o espaço V consideramos a norma usual $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|q\|_V := \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{d_\Omega^2} \|q\|_{0,K}^2 + \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.18)$$

e a sua versão local $\|\cdot\|_{V,F} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|q\|_{V,F} := \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \frac{1}{h_K^2} \|q\|_{0,K}^2 + \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

Seja $q \in V$ e suponha que $-\mathcal{K}\nabla q \in H(\text{div}, \Omega)$. Adicionalmente, consideramos $|\cdot|_E$ a norma da energia sobre V , definida por

$$|q|_E := \|\mathcal{K}\nabla q\|_{\text{div},h} + \sqrt{c_{\min}} \left[\frac{1}{h} \|q\|_{0,\Omega} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.20)$$

Para o espaço produto $\Lambda \times V$, consideramos a norma $\|\cdot\|_{\Lambda \times V} : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|(\mu, q)\|_{\Lambda \times V} := \|\mu\|_{\Lambda} + \|q\|_V. \quad (3.21)$$

Para o espaço $[L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$ consideramos a norma $\|\cdot\|_\infty : [L^\infty(\Omega)]^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|\mathcal{K}\|_\infty = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \max_{|\mathbf{y}|=1} [\mathbf{y}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \mathbf{y}]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

Com base na definição dos espaços e das normas acima, apresentamos alguns resultados auxiliares que serão usados nas próximas seções.

Lema 3.1 Seja $b : \Lambda \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido em (3.7). Temos que

$$\sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V} \leq \|\mu\|_{\Lambda}, \quad \forall \mu \in \Lambda.$$

Demonstração: Seja $(\mu, q) \in \Lambda \times V$ e $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega)$ tal que $\boldsymbol{\sigma}^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \mu^{\partial K}$,

para todo $K \in \mathcal{T}_h$. Note que

$$\begin{aligned}
b(\mu, q) &= (\mu, q)_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (q, \mu)_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, q)_K + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla q)_K \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} d_\Omega^2 \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\|_{0,K} \frac{1}{d_\Omega^2} \|q\|_{0,K} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{0,K} \|\nabla q\|_{0,K} \\
&\leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}} \|q\|_V.
\end{aligned}$$

Logo $\frac{b(\mu, q)}{\|q\|_V} \leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}}$, para todo $\boldsymbol{\sigma} \in H(\text{div}, \Omega)$ tal que $\boldsymbol{\sigma}^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \mu^{\partial K}$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$. Usando as definições de sup e inf o resultado segue. ■

Agora demonstramos que o operador T é limitado.

Lema 3.2 Seja o operador linear $T : \Lambda \rightarrow V_0^\perp$ definido em (3.4). Logo T é limitado e satisfaz:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \|T\mu\|_V &\leq \sqrt{\frac{2}{c_{\min}}} \|\mathcal{K}\nabla T\mu\|_{\text{div}}, \\
(2) \quad \|\mathcal{K}\nabla T\mu\|_{\text{div}} &\leq \sqrt{2\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \|\mu\|_\Lambda, \\
(3) \quad \|T\mu\|_V &\leq 2\sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}^2}} \|\mu\|_\Lambda.
\end{aligned}$$

Demonstração:

(1) Pela desigualdade de Poincaré local (A.9), e das propriedades de \mathcal{K} , segue que

$$c_{\min} \|T\mu\|_V^2 = c_{\min} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{d_\Omega^2} \|T\mu\|_{0,K}^2 + \|\nabla T\mu\|_{0,K}^2 \quad (3.23)$$

$$\leq c_{\min} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{h_K^2}{d_\Omega^2 \pi^2} + 1 \right] \|\nabla T\mu\|_{0,K}^2 \quad (3.24)$$

$$\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{K}\nabla T\mu\|_{0,K}^2, \quad (3.25)$$

logo, $\sqrt{c_{\min}} \|T\mu\|_V \leq \sqrt{2} \|\mathcal{K}\nabla T\mu\|_{\text{div}}$.

(2) Pelo problema forte definido em (2.22) obtemos para cada $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T \mu)\|_{0,K}^2 = (c^\mu, \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla T \mu))_K \quad (3.26)$$

$$= (\mu, \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla T \mu))_{\partial K}. \quad (3.27)$$

Em seguida usamos as propriedades de \mathcal{K} , o problema local (3.4), e $T \mu \in V_0^\perp$, e obtemos, que para cada $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{0,K}^2 \leq \sqrt{c_{\max}} (\mathcal{K} \nabla T \mu, \nabla T \mu)_K \quad (3.28)$$

$$= -\sqrt{c_{\max}} (\mu, T \mu)_{\partial K}. \quad (3.29)$$

Logo, usando (3.27) e (3.29), obtemos

$$\|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{\text{div}}^2 = d_\Omega^2 b(\mu, \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T \mu)) + \sqrt{c_{\max}} a(\mu, \mu),$$

e como $a(\mu, \mu) = b(\mu, T \mu)$, da desigualdade triangular e (1) temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{\text{div}}^2 &= b(\mu, d_\Omega^2 \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T \mu) + \sqrt{c_{\max}} T \mu) \\ &\leq \sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V} \|d_\Omega^2 \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T \mu) + \sqrt{c_{\max}} T \mu\|_V \\ &\leq \sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V} (\|d_\Omega^2 \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T \mu)\|_V + \sqrt{c_{\max}} \|T \mu\|_V) \\ &\leq \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V} \|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{\text{div}}, \end{aligned}$$

e logo,

$$\|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{\text{div}} \leq \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V}. \quad (3.30)$$

Usando o Lema 3.1 o resultado segue.

(3) Usando (1) e (2) o resultado é imediato. ■

Lema 3.3 Seja $b : \Lambda \times V \rightarrow \mathbb{R}$ como definido em (3.7), temos que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|\mu\|_{\Lambda} \leq \sup_{q \in V} \frac{b(\mu, q)}{\|q\|_V} \leq \|\mu\|_{\Lambda}, \quad \forall \mu \in \Lambda.$$

Demonstração: O limite superior foi provado no Lema 3.1, restando mostrar o limite inferior. Em (3.30) consideremos o caso em que $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \nabla T\mu$, onde $T\mu$ representa a solução do problema (3.4) com $\mathcal{K} = \mathcal{I}$. Assim $\frac{\sqrt{2}}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}} \leq \sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V}$, e pela definição do inf o resultado segue. ■

Lema 3.4 Seja $p_f \in V_0^{\perp}$ a solução do problema local (3.5) e considere $f^{\perp} \in V_0^{\perp}$ definida por $f^{\perp}|_K = f|_K - \frac{1}{|K|} \int_K f$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$. Portanto, temos as seguintes estimativas:

- (1) $\|\mathcal{K} \nabla p_f\|_{\text{div}} \leq d_{\Omega} \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \|f^{\perp}\|_{0, \Omega};$
- (2) $\|p_f\|_V \leq 2 d_{\Omega} \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}^2}} \|f^{\perp}\|_{0, \Omega}.$

Demonstração:

- (1) Usando a desigualdade de Poincaré local (A.9), o fato de $p_f \in V_0^{\perp}$ e $h_K \leq d_{\Omega}$, temos que, para cada $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K} \nabla p_f\|_{0, K}^2 &\leq \|\mathcal{K}\|_{\infty} (\mathcal{K} \nabla p_f, \nabla p_f)_K \\ &\leq \sqrt{c_{\max}} (f, p_f)_K \\ &= \sqrt{c_{\max}} (f^{\perp}|_K, p_f)_K \\ &\leq \sqrt{c_{\max}} \|f^{\perp}\|_{0, K} \|p_f\|_{0, K} \\ &\leq \sqrt{c_{\max}} \frac{d_{\Omega}}{\pi} \|f^{\perp}\|_{0, K} \|\nabla p_f\|_{0, K} \\ &\leq \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \frac{d_{\Omega}}{\pi} \|f^{\perp}\|_{0, K} \|\mathcal{K} \nabla p_f\|_{0, K}. \end{aligned}$$

Logo, $\|\mathcal{K} \nabla p_f\|_{0, K} \leq \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \frac{d_{\Omega}}{\pi} \|f^{\perp}\|_{0, K}$. Por outro lado note que, do problema forte (2.24), obtemos que $\|\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla p_f)\|_{0, K} = \|f^{\perp}\|_{0, K}$ para todo

$K \in \mathcal{T}_h$, portanto usando a desigualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{\text{div}}^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{c_{\max}}{c_{\min}} \frac{d_\Omega^2}{\pi^2} \|f^\perp\|_{0,K}^2 + d_\Omega^2 \|f^\perp\|_{0,K}^2 \\
&\leq 2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}} d_\Omega^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f^\perp\|_{0,K}^2 \\
&= \frac{c_{\max}}{c_{\min}} d_\Omega^2 \|f^\perp\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

(2) Usando a desigualdade de Poincaré local (A.9) temos

$$\begin{aligned}
c_{\min} \|p_f\|_V^2 &\leq c_{\min} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\pi^2 d_\Omega^2} \|\nabla p_f\|_{0,K}^2 + \|\nabla p_f\|_{0,K}^2 \\
&\leq 2c_{\min} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla p_f\|_{0,K}^2 \\
&\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{0,K}^2,
\end{aligned}$$

e logo, $\sqrt{c_{\min}} \|p_f\|_V \leq \sqrt{2} \|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{\text{div}}$. O resultado segue usando (1). ■

3.4 Existência e unicidade de solução

Nesta seção mostraremos que a formulação híbrida (3.10) e o método MHM (3.13) estão bem postos. O resultado principal (Teorema 3.7) está baseado em um resultado clássico abstrato apresentado em A.2. Iniciamos o processo mostrando a continuidade do operador $B : (\Lambda \times V) \times (\Lambda \times V) \rightarrow \mathbb{R}$. As demonstrações desta seção são válidas não importando se os espaços utilizados são finitos ou infinitos.

Teorema 3.5 Seja $\tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda$ um subespaço de Λ . Então para cada $(\lambda, p_0), (\mu, q_0) \in \tilde{\Lambda} \times V_0$, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$B(\lambda, p_0; \mu, q_0) \leq \tilde{C} \|(\lambda, p_0)\|_{\Lambda \times V} \|(\mu, q_0)\|_{\Lambda \times V}. \quad (3.31)$$

Demonstração: Da definição de $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ em (3.6) e (3.7), respectivamente, temos que, para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$, $a(\lambda, \mu) = b(\mu, T\lambda)$. Portanto usando o Lema 3.1, a desigualdade triangular e o Lema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
B(\lambda, p_0; \mu, q_0) &= b(\mu, T\lambda + p_0) + b(\lambda, q_0) \\
&\leq \sup_{q \in V} \frac{|b(\mu, q)|}{\|q\|_V} \|T\lambda + p_0\|_V + \sup_{q \in V} \frac{|b(\lambda, q)|}{\|q\|_V} \|q_0\|_V \\
&\leq \|\mu\|_\Lambda (\|T\lambda\|_V + \|p_0\|_V) + \|\lambda\|_\Lambda \|q_0\|_V \\
&\leq \|\mu\|_\Lambda \left(2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}} \|\lambda\|_\Lambda + \|p_0\|_V \right) + \|q_0\|_\Lambda (\|\lambda\|_\Lambda + 2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}} \|p_0\|_V) \\
&\leq \bar{C} \|(\lambda, p_0)\|_{\Lambda \times V} \|(\mu, q_0)\|_{\Lambda \times V},
\end{aligned}$$

onde $\bar{C} = \max \left\{ 2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}}, 1 \right\} > 0$. ■

A seguir consideramos os espaços de dimensão finita $\Lambda_h^{(l)} \subset \Lambda$ definidos em (3.12), e por simplicidade usaremos a notação $\Lambda_0 := \Lambda_h^{(0)}$.

Lema 3.6 Seja $\mathcal{N} := \{\mu \in \tilde{\Lambda} : b(\mu, q_0) = 0, \forall q_0 \in V_0\}$. Então os seguintes resultados são válidos:

- (1) $\mu \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T\mu) = 0$, em $K \in \mathcal{T}_h$;
- (2) $a(\mu, \mu) \geq \frac{1}{c_{\max}} \|\mu\|_\Lambda, \forall \mu \in \mathcal{N}$.

Demonstração: Para (1), seja $\mu \in \tilde{\Lambda}$. Do problema local forte (2.22) observe que, para cada $K \in \mathcal{T}_h$, temos $\nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla T\mu) = c^\mu$, onde $c^\mu \in \mathbb{R}$ satisfaz

$$(c^\mu, q_0)_K = (\mu, q_0)_{\partial K}, \forall q_0 \in V_0.$$

Portanto obtemos que

$$b(\mu, q_0) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mu, q_0)_{\partial K} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (c^\mu, q_0)_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T\mu), q_0)_K, \quad (3.32)$$

para todo $q_0 \in V_0$, e (1) segue. Com respeito ao item (2), tome $\mu \in \mathcal{N}$ do item (1).

Logo $\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla T \mu) = 0$, e segue que

$$\begin{aligned}
a(\mu, \mu) &= -(\mu, T\mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{K} \nabla T \mu, \mathcal{K}^{-1} \mathcal{K} \nabla T \mu)_K \\
&\geq \frac{1}{c_{\max}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{0,K}^2 \\
&\geq \frac{1}{c_{\max}} \|\mathcal{K} \nabla T \mu\|_{\text{div}}^2 \\
&\geq \frac{1}{c_{\max}} \|\mu\|_{\Lambda}^2,
\end{aligned}$$

o que prova que $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva sobre \mathcal{N} . ■

Provamos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 3.7 Seja $\tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda$ um subespaço arbitrário de Λ , tal que $\Lambda_0 \subseteq \tilde{\Lambda}$. Então para cada $(\lambda, p_0), (\mu, q_0) \in \tilde{\Lambda} \times V_0$, temos:

(1) Existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{(\mu, q_0) \in \tilde{\Lambda} \times V_0} \frac{B(\lambda, p_0; \mu, q_0)}{\|(\mu, q_0)\|_{\Lambda \times V}} \geq \beta \|(\lambda, p_0)\|_{\Lambda \times V};$$

(2) $\left[B(\lambda, p_0; \mu, q_0) = 0, \forall (\lambda, p_0) \in \tilde{\Lambda} \times V_0 \right] \Rightarrow \left[(\mu, q_0) = (0, 0) \in \tilde{\Lambda} \times V_0 \right]$.

Portanto os problemas (3.10) e (3.13) são bem postos.

Demonstração: Consideramos o espaço \mathcal{N} definido no Lema 3.6. Demonstramos os resultados (1) e (2) aplicando o Teorema A.6. Como os operadores associados a $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ são auto-adjuntos, devemos somente provar os seguintes pontos:

(a) Existe $c_a > 0$ tal que

$$c_a \|\lambda\|_{\Lambda} \leq \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \frac{a(\lambda, \mu)}{\|\mu\|_{\Lambda}}, \forall \lambda \in \mathcal{N}.$$

(b) Existe $c_b > 0$ tal que

$$c_b \|q_0\|_V \leq \sup_{\mu \in \tilde{\Lambda}} \frac{b(\mu, q_0)}{\|\mu\|_\Lambda}, \quad \forall q_0 \in V_0.$$

Provemos (a). Seja $\lambda \in \mathcal{N}$. Pela coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ sobre \mathcal{N} , temos que

$$\frac{1}{c_{\max}} \|\lambda\|_\Lambda \leq \frac{a(\lambda, \lambda)}{\|\lambda\|_\Lambda} \leq \sup_{\mu \in \mathcal{N}} \frac{a(\lambda, \mu)}{\|\mu\|_\Lambda}.$$

O item (b) segue tomando uma função $\sigma_0 \in H(\text{div}, \Omega)$ tal que $\sigma_0^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$ (ver [60]). Logo, definindo $\mu_0 \in \Lambda$ tal que $\mu_0^{\partial K} = \sigma_0^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$, teremos que $\mu_0 \in \Lambda_0 \subseteq \tilde{\Lambda}$. Em [60] é demonstrado que para todo $q_0 \in V_0$ existe $c_b > 0$ tal que $c_b \|\sigma_0\|_{\text{div}} \leq \frac{(\nabla \cdot (\sigma_0), q_0)_{\partial \mathcal{T}_h}}{\|q_0\|_V}$. Assim usando (3.32) e a definição do inf o resultado segue. Portanto, provados os itens (a) e (b), o Teorema A.6 e o resultado segue. \blacksquare

3.5 Melhor aproximação

O método MHM (3.13) é consistente e fornece um resultado de melhor aproximação, como é apresentado no seguinte Lema. Em particular mostramos que a qualidade da aproximação depende apenas do espaço Λ_h .

Lema 3.8 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Assumindo as hipóteses do Teorema 3.7, temos:

- (1) $B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h, \mu_h, q_0) = 0, \forall (\mu_h, q_0) \in \Lambda_h \times V_0;$
- (2) Existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \leq \tilde{C} \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_\Lambda,$$

onde $\tilde{C} = \frac{\bar{C}}{\beta}$, com \bar{C} e β são as constantes positivas do Teorema 3.5 e do Teorema 3.7, respectivamente.

Demonstração: O item (1) segue imediato da definição dos problemas (3.10) e (3.13). Em seguida, aplicando o Lema de Céa (ver [27] página 96) obtemos a seguinte estimativa

$$\|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \leq \frac{\bar{C}}{\beta} \inf_{(\mu_h, q_0) \in \Lambda_h \times V_0} \|(\lambda - \mu_h, \bar{p} - q_0)\|_{\Lambda \times V}.$$

Logo, escolhendo $q_0 = \bar{p}$, o resultado (2) segue. ■

Em decorrência da consistência do método (3.13), a solução numérica do método MHM possui propriedades de conservação local, como veremos a seguir. Aqui usamos a caracterização para a solução exata (3.11) e a caracterização para a solução aproximada (3.14).

Corolário 3.9 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. A seguinte identidade é satisfeita

$$\nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p) = \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p_h), \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração: Usando as caracterizações dadas em (3.11) e (3.14) e o problema forte (2.22), em cada $K \in \mathcal{T}_h$, obtemos

$$\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla p - \mathcal{K} \nabla p_h)|_K = c_K^\lambda - c_K^{\lambda_h} \in \mathbb{R}. \quad (3.33)$$

Como $(c_K^\lambda, q_0)_K = (\lambda, q_0)_{\partial K}$ e $(c_K^{\lambda_h}, q_0)_K = (\lambda_h, q_0)_{\partial K}$ para todo $q_0 \in V_0$, temos que os problemas (3.10) e (3.13) implicam que $c_K^\lambda = \frac{1}{|K|} \int_K f$ e $c_K^{\lambda_h} = \frac{1}{|K|} \int_K f$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$, e o resultado segue. ■

A seguir usamos o Lema 3.8 para mostrar estimativas nas normas naturais. Alguns resultados utilizam a hipótese que a solução de (3.1) possui *propriedades suavizantes* (ver [27], definição 3.14).

Lema 3.10 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Temos as seguintes estimativas:

- (1) $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} \leq \tilde{C} d_\Omega \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_\Lambda,$
- (2) $\|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla p_h\|_{\text{div}} \leq \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \tilde{C} \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_\Lambda,$
- (3) $\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \left[1 + 2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}}\right] \tilde{C} d_\Omega \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_\Lambda,$

onde a constante \tilde{C} é dada no Lema 3.8.

Demonstração:

Provaremos (1). Notemos que $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} = d_\Omega \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_V \leq d_\Omega \|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V}$, e portanto do Lema 3.8 o resultado segue. Em relação ao item (2), note que $\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla p_h = \mathcal{K}\nabla T(\lambda - \lambda_h)$ logo usando o Lema 3.2 obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla p_h\|_{\text{div}} &= \|\mathcal{K}\nabla(T - T\lambda)\|_{\text{div}} \\
&\leq \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \|\lambda - \lambda_h\|_\Lambda \\
&\leq \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.8, o resultado segue. Em seguida como $p - p_h = (\bar{p} - \bar{p}_h) + T(\lambda - \lambda_h)$, usando a desigualdade triangular, o Lema 3.2, o item (1) e o Lema 3.8, obtemos

$$\begin{aligned}
\|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} + d_\Omega \|T(\lambda - \lambda_h)\|_V \\
&\leq \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} + 2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}} d_\Omega \|\lambda - \lambda_h\|_\Lambda \\
&\leq \left[1 + 2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}}\right] \tilde{C} d_\Omega \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_\Lambda,
\end{aligned}$$

e o item (3) segue. ■

A seguir provamos que o erro da pressão na norma $L^2(\Omega)$ pode ser melhorado sob hipóteses de uma maior regularidade da solução exata. Assumimos que o problema (3.10) tem *propriedades suavizantes* (ver definição em [27], página 119).

Lema 3.11 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Assumindo propriedades suavizantes da solução de (3.1),

então existe $C > 0$, independente de h ou \mathcal{K} , tal que as seguintes estimativas ocorrem:

$$(1) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\bar{C}^2}{\sqrt{c_{\min}}\beta} Ch \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda},$$

$$(2) \quad \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C \left[\bar{C} + 2\sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \right] \frac{\bar{C}}{\beta c_{\min}} h \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda},$$

onde \bar{C} e β são as constantes obtidas nos Teorema 3.5 e Teorema 3.7, respectivamente.

Demonstração: Definimos $e = p - p_h$ e consideramos o problema adjunto do problema (3.10) com condição de Dirichlet nula em todo o contorno Γ , i.e.:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\nu, \bar{r}) \in \Lambda \times V_0 \text{ tal que} \\ & B(\mu, q_0; \nu, \bar{r}) = \tilde{F}(\mu, q_0) \\ & \text{para todo } (\mu, q_0) \in \Lambda \times V_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

onde a forma linear $\tilde{F} : \Lambda \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\tilde{F}(\mu, q_0) = (e, q_0)_{\mathcal{T}_h} + (e, T\mu)_{\mathcal{T}_h},$$

e definimos $r_e \in V_0^\perp$ como a solução de (3.5) assumindo $f = e$. Em seguida, consideramos a versão discreta (para $l = 0$) de (3.34), dada por

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\nu_0, \bar{r}_0) \in \Lambda_0 \times V_0 \text{ tal que} \\ & B(\mu_0, q_0; \nu_0, \bar{r}_0) = \tilde{F}(\mu_0, q_0) \\ & \text{para todo } (\mu_0, q_0) \in \Lambda_0 \times V_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Note que os problemas (3.34) e (3.35) estão bem postos. Definindo $r := \bar{r} + T\nu_0 + r_e$, as hipóteses de regularidade assumidas implicam que existe $C > 0$ (que depende apenas de Ω) tal que $\|r\|_{2,\Omega} \leq \frac{C}{\sqrt{c_{\min}}} \|e\|_{0,\Omega}$. Logo, usando o Lema 3.8 e a estimativa de interpolação (3.36), temos que

$$\inf_{\mu_0 \in \Lambda_0} \|\nu - \mu_0\|_{\Lambda} \leq Ch \|r\|_{2,\Omega}.$$

Portanto,

$$\|(\nu - \nu_0, \bar{r} - \bar{r}_0)\|_{\Lambda \times V} \leq Ch \|r\|_{2,\Omega} \leq \frac{C}{c_{\min}} h \|e\|_{0,\Omega}.$$

Em seguida, usando (3.34), o resultado de consistência do Lema 3.8, a continuidade de $B(\cdot, \cdot)$ dada no Teorema 3.5 e o resultado de melhor aproximação obtido no Lema 3.8, temos que

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\Omega}^2 &= (e, e)_{\mathcal{T}_h} \\ &= (e, \bar{p} - \bar{p}_h)_{\mathcal{T}_h} + (e, T(\lambda - \lambda_h))_{\mathcal{T}_h} \\ &= \tilde{F}(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h) \\ &= B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h; \nu, \bar{r}) \\ &= B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h; \nu, \bar{r}) - B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h; \nu_0, \bar{r}_0) \\ &= B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h; \nu - \nu_0, \bar{r} - \bar{r}_0) \\ &\leq \bar{C} \|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \|(\nu - \nu_0, \bar{r} - \bar{r}_0)\|_{\Lambda \times V} \\ &\leq \frac{\bar{C}^2}{\sqrt{c_{\min}} \beta} Ch \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda_h - \mu_h\|_{\Lambda} \|e\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

e o item (1) segue. Com relação ao item (2) usamos a desigualdade triangular, a desigualdade de Poincaré local (A.9) e o Lema 3.2, para mostrar que

$$\begin{aligned} \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} &= \|p - p_h\|_{0,\Omega} + \|T(\lambda - \lambda_h)\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + Ch \|T(\lambda - \lambda_h)\|_V \\ &\leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + 2C \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}} h \|\lambda - \lambda_h\|_{\Lambda} \\ &\leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + 2C \frac{\bar{C}}{\beta} \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}} h \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} \\ &\leq C \left[\bar{C} + 2\sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \right] \frac{\bar{C}}{\beta \sqrt{c_{\min}}} h \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda}, \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Para finalizar a seção apresentamos dois corolários do Lema anterior com o objetivo de estudar a influência no erro quando se omitir p_f da solução aproximada p_h .

Corolário 3.12 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Então existem constantes, independentes de h , $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$(1) \quad \|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla T\lambda_h\|_{\text{div}} \leq C_1 \left[\inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} + \|f^\perp\|_{0,\Omega} \right],$$

$$(2) \quad \|p - (\bar{p}_h + T\lambda_h)\|_{0,\Omega} \leq C_2 \left[\inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} + h\|f^\perp\|_{0,\Omega} \right],$$

onde f^\perp é tal que $f^\perp|_K = f - \frac{1}{|K|} \int f$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$.

Demonstração:

Usando a desigualdade triangular, temos

$$\|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla T\lambda_h\|_{\text{div}} \leq \|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla p_h\|_{\text{div}} + \|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{\text{div}},$$

e aplicando o Lema 3.8 e o Lema 3.4 o item (1) segue. Em seguida, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré local (A.9), obtemos

$$\|p - (\bar{p}_h + T\lambda_h)\|_{0,\Omega} \leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + \|p_f\|_{0,\Omega} \leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + \frac{h}{\pi} \|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{0,\Omega},$$

e logo, usando o Lema 3.4 e o item (3) do Lema 3.8, o item (2) segue. \blacksquare

Corolário 3.13 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13) respectivamente. Assuma as propriedades suavizantes da solução de (3.1). Existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|p - (\bar{p}_h + T\lambda_h)\|_{0,\Omega} \leq C_3 h \left[\inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} + \|f^\perp\|_{0,\Omega} \right].$$

Demonstração: Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré local (A.9), temos

$$\|p - (\bar{p}_h + T\lambda_h)\|_{0,\Omega} \leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + \|p_f\|_{0,\Omega} \leq \|p - p_h\|_{0,\Omega} + \frac{h}{\pi} \|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{0,\Omega},$$

e logo, usando o Lema 3.4 e o item (1) do Lema 3.11, o resultado segue. \blacksquare

3.6 Análise de erro

3.6.1 Estimativas de erro *a-priori*

Observe que o resultado do Lema 3.8 é válido para todo espaço Λ_h que satisfaça a condição $\Lambda_0 \subseteq \Lambda_h$. Considere $\Lambda_h = \Lambda_h^{(l)}$ para $l \in \mathbb{N}_0$, definido em (3.12). Assuma $1 \leq k \leq l + 1$ e de acordo com o resultado proposto em [61] (ver [25] para uma versão p), temos que, dado $r \in H^{k+1}(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\inf_{\mu_h \in \Lambda_h^{(l)}} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} \leq Ch^k \|w\|_{k+1, \Omega}, \quad (3.36)$$

onde $\lambda \in \Lambda$ é tal que $\lambda^{\partial K} = -\mathcal{K} \nabla w^{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ para cada $K \in \mathcal{T}_h$. Esta propriedade de aproximação dos espaços $\Lambda_h^{(l)}$ possibilita obter taxas de convergência, como apresentadas no próximo teorema.

Teorema 3.14 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Assuma $p \in H^{k+1}(\Omega)$, onde $1 \leq k \leq l + 1$. Então, existe $C > 0$ independente de h ou \mathcal{K} , tal que

- (1) $\|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \leq C \frac{\bar{C}}{\beta} h^k \|p\|_{k+1, \Omega},$
- (2) $\|\mathcal{K} \nabla p - \mathcal{K} \nabla p_h\|_{\text{div}} \leq C \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \frac{\bar{C}}{\beta} h^k \|p\|_{k+1, \Omega},$
- (3) $\|p - p_h\|_{0, \Omega} \leq C \left[1 + \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}}\right] \frac{\bar{C}}{\beta} h^k \|p\|_{k+1, \Omega},$
- (4) $\|p - \bar{p}_h\|_{0, \Omega} \leq C \left[1 + \frac{\bar{C}}{\beta}\right] h \|p\|_{k+1, \Omega}.$

Demonstração: Para os itens (1), (2) e (3) usa-se (3.36) nas estimativas (1), (2) e (3) do Lema 3.10, respectivamente. Com relação ao item (4) usamos, a desigualdade triangular, (3.36) na estimativa (1) do Lema 3.10, para obter que

$$\|p - \bar{p}_h\|_{0, \Omega} \leq \|p - \bar{p}\|_{0, \Omega} + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0, \Omega} \leq C \left[1 + \frac{\bar{C}}{\beta}\right] h \|p\|_{k+1, \Omega},$$

e o resultado segue. ■

Apresentamos agora estimativas de erro para a pressão, quando assumimos maior regularidade, da solução exata.

Teorema 3.15 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Assuma $p \in H^{k+1}(\Omega)$, onde $1 \leq k \leq l+1$ e a propriedade suavizante da solução de (3.1). Então existe $C > 0$, independente de h ou \mathcal{K} , tal que

$$(1) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\bar{C}^2}{\sqrt{c_{\min}}\beta} C h^{k+1} \|p\|_{k+1,\Omega};$$

$$(2) \quad \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C \left[\bar{C} + 2\sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \right] \frac{\bar{C}}{\beta\sqrt{c_{\min}}} h^{k+1} \|p\|_{k+1,\Omega}.$$

Demonstração: Os itens (1) e (2) são imediatos usando (3.36) nas estimativas do Lema 3.11. ■

Como um corolário dos teoremas anteriores, o seguinte resultado mostra a influência em se omitir o termo p_f da solução aproximada, sobre as taxas ótimas de convergência.

Corolário 3.16 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Assuma $p \in H^{k+1}(\Omega)$, onde $1 \leq k \leq l+1$. Então, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, independentes de h , tais que

- $\|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla T\lambda_h\|_{\text{div}} \leq C_1(h^k \|p\|_{k+1,\Omega} + \|f^\perp\|_{0,\Omega})$
- $\|p - (p_0 + T\lambda_h)\|_{0,\Omega} \leq C_3(h^k \|p\|_{k+1,\Omega} + h \|f^\perp\|_{0,\Omega})$.

Assumindo a propriedade suavizante da solução de (3.1), existe uma constante $C_3 > 0$, independente de h , tal que

- $\|p - (p_0 + T\lambda_h)\|_{0,\Omega} \leq C_3(h^{k+1} \|p\|_{k+1,\Omega} + h \|f^\perp\|_{0,\Omega})$.

Demonstração: O resultado segue como uma aplicação direta dos Corolários 3.12 e 3.13 assumindo a hipótese de regularidade extra e a estimativa (3.36). ■

O Corolario 3.16 mostra que no caso de $l = 0$ o termo p_f pode ser excluído da solução aproximada sem que a taxa de convergência seja afetada quando $f \in H^1(\Omega)$. A seguir, estudamos o efeito de omitir o termo $(p_f, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h}$ do método (3.13) de forma que a resolução do problema local (3.5) não seja mais necessária. O método não consistente é dado por:

$$\left. \begin{aligned} \text{Achar } (\tilde{\lambda}_h, \tilde{p}_h) \in \Lambda_h^{(l)} \times V_0 \text{ tal que} \\ B(\tilde{\lambda}_h, \tilde{p}_h; \mu_h, q_0) &= -(f, q_0)_{\mathcal{T}_h} - \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu_h)_F \\ \text{para todo } (\mu_h, q_0) \in \Lambda_h^{(l)} \times V_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Teorema 3.17 Sejam $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\tilde{\lambda}_h, \tilde{p}_h) \in \Lambda_h \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.37) respectivamente. Assuma $p \in H^{k+1}(\Omega)$, onde $1 \leq k \leq l+1$. Então, existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $C_3 > 0$, independentes de h , tal que

- (1) $\|(\lambda - \tilde{\lambda}_h, \bar{p} - \tilde{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \leq C_1(h^k \|p\|_{k+1, \Omega} + h \|f^\perp\|_{0, \Omega}),$
- (2) $\|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla T\tilde{\lambda}_h\|_{\text{div}} \leq C_2(h^k \|p\|_{k+1, \Omega} + \|f^\perp\|_{0, \Omega}),$
- (3) $\|p - (\tilde{p}_h + T\tilde{\lambda}_h)\|_{0, \Omega} \leq C_3(h^k \|p\|_{k+1, \Omega} + h \|f^\perp\|_{0, \Omega}).$

Demonstração: Claramente o método (3.37) é bem posto. Do primeiro Lemma de Strang (ver [27] página 95), temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|(\lambda - \tilde{\lambda}_h, \bar{p} - \tilde{p}_h)\|_{\Lambda \times V} &\leq C \left[\inf_{(\mu_h, q_0) \in \Lambda_h \times V_0} \|(\lambda - \mu_h, \bar{p} - q_0)\|_{\Lambda \times V} + \sup_{(\mu_h, q_0) \in \Lambda_h \times V_0} \frac{|(f, T\mu_h)|}{\|(\mu_h, q_0)\|_{\Lambda \times V}} \right] \\ &\leq C \left[\inf_{\mu_h \in \Lambda} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} + \sup_{(\mu_h, q_0) \in \Lambda_h \times V_0} \frac{|(f, T\mu_h)|}{\|(\mu_h, q_0)\|_{\Lambda \times V}} \right]. \end{aligned}$$

Em seguida notamos que $T\mu_h \in L_0^2(K)$, e usando as desigualdades de Poincaré local (A.9) e de Cauchy-Schwarz, e o Lema 3.2 temos que

$$\begin{aligned} |(f, T\mu_h)_{\mathcal{T}_h}| &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f^\perp, T\mu_h)_{\mathcal{T}_h} \right| \\ &\leq \|f^\perp\|_{0, \Omega} \|T\mu_h\|_{0, \Omega} \\ &\leq C h \|f^\perp\|_{0, \Omega} \|T\mu_h\|_V \\ &\leq C h \|f^\perp\|_{0, \Omega} \|\mu_h\|_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Finalmente, da estimativa (3.36) o resultado (1) segue. Do Lema 3.2 e do Lema 3.4, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla T\tilde{\lambda}_h\|_{\text{div}} &\leq \|\mathcal{K}\nabla T\lambda - \mathcal{K}\nabla T\tilde{\lambda}_h\|_{\text{div}} + \|\mathcal{K}\nabla p_f\|_{\text{div}} \\ &\leq C \left[\|\lambda - \tilde{\lambda}_h\|_{\Lambda} + \|f^\perp\|_{0,\Omega} \right], \end{aligned}$$

e usando (1) obtemos o item (2). Com respeito ao item (3) usamos a desigualdade triangular, o Lema 3.2, e o Lema 3.4, para obter

$$\begin{aligned} \|p - (\tilde{p}_h + T\tilde{\lambda}_h)\|_{0,\Omega} &\leq \|\bar{p} - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} + \|T(\lambda - \tilde{\lambda}_h)\|_{0,\Omega} + \|p_f\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\bar{p} - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} + C \left[\|T(\lambda - \tilde{\lambda}_h)\|_V + \|p_f\|_V \right] \\ &\leq \|\bar{p} - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} + C \left[\|\lambda - \tilde{\lambda}_h\|_{\Lambda} + \|f^\perp\|_{0,\Omega} \right], \end{aligned}$$

e usando o item (1) o resultado segue. ■

3.6.2 Estimativas de erro *a-posteriori*

Consideramos a função resíduo nas faces R_F definida por

$$R_F := \begin{cases} -\frac{1}{2}[[p_h]], & F \in \mathcal{E}^0, \\ (g - p_h) \mathbf{n}^F, & F \in \mathcal{E}^D, \\ \mathbf{0}, & F \in \mathcal{E}^N. \end{cases} \quad (3.38)$$

Definimos os estimadores de erro

$$\eta_F := c_l \sqrt{\frac{c_{\min}}{h_F}} \|R_F\|_{0,F}, \quad \eta_K := \left[\sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \eta_F^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \eta := \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.39)$$

relativos à face, ao elemento e ao domínio, respectivamente. A constante $c_l > 0$ depende unicamente de l . Assuma $g|_F \in \mathbb{P}^l(F)$ para cada $F \in \mathcal{E}^D$. Iniciamos esta seção apresentando um resultado auxiliar.

Lema 3.18 Seja $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda \times V_0$ a solução de (3.13) e $p_h = \bar{p}_h + T\lambda_h + p_f$. Existe

$\chi_h \in V$, tal que satisfaz

$$(\chi_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = -(p_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} + (g, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}, \quad \forall \mu \in \Lambda \quad (3.40)$$

e a seguinte estimativa

$$\|\chi_h\|_V \leq \frac{C}{c_l \min\{1, c_{\min}\}} \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \eta \quad (3.41)$$

onde a constante $C > 0$ é independente de h .

Demonstração: Considere seguinte problema híbrido:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\bar{\chi}_h, \bar{\xi}_h) \in V \times \Lambda \text{ tal que} \\ & \frac{1}{d_\Omega^2} (\bar{\chi}_h, q)_{\mathcal{T}_h} + (\mathcal{K} \nabla \bar{\chi}_h, \nabla q)_{\mathcal{T}_h} + (\bar{\xi}_h, q)_{\partial\mathcal{T}_h} = \frac{1}{d_\Omega^2} (p_h, q)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla p_h), q)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (\bar{\chi}_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F, \\ & \text{para todo } (q, \mu) \in V \times \Lambda. \end{aligned} \right\}$$

Usando os mesmos argumentos utilizados em [60] mostramos que $\bar{\chi}_h \in H^1(\Omega)$ é única e satisfaz o seguinte problema elíptico: Achar $\bar{\chi}_h$ tal que

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla \bar{\chi}_h) + \frac{1}{d_\Omega^2} \bar{\chi}_h &= \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p_h) + \frac{1}{d_\Omega^2} p_h \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{K} \nabla \bar{\chi}_h \cdot \mathbf{n}^\Gamma &= 0 \text{ em } \Gamma_N, \\ \bar{\chi}_h &= g \text{ em } \Gamma_D, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

onde, $\nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p_h) + \frac{1}{d_\Omega^2} p_h \in L^2(\Omega)$. Além disso, $-\mathcal{K} \nabla \bar{\chi}_h|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = \bar{\xi}_h^{\partial K}$, para todo $K \in \mathcal{T}_h$. Assim, usando resultados de regularidade apresentados em [39] temos que $\bar{\chi}_h \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, logo $\bar{\xi}_h^{\partial K}|_F \in L^2(F)$ para cada $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ e $K \in \mathcal{T}_h$. Definimos $\chi_h := \bar{\chi}_h - p_h$ e $\xi_h := \bar{\xi}_h + \mathcal{K} \nabla p_h|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ para cada $K \in \mathcal{T}_h$ e usando o fato que $p_h|_K \in H^{\frac{3}{2}}(K)$ (ver [39]), temos que $\chi_h^K \in H^{\frac{3}{2}}(K)$ e $\xi_h^{\partial K}|_F \in L^2(F)$, para cada

$F \in \mathcal{T}_h^{\partial K}$ e $K \in \mathcal{T}_h$, e satisfaz:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\bar{\chi}_h, \bar{\xi}_h) \in V \times \Lambda \text{ tal que} \\ & \frac{1}{d_\Omega^2} (\chi_h, q)_{\mathcal{T}_h} + (\mathcal{K} \nabla \chi_h, \nabla q)_{\mathcal{T}_h} + (\xi_h, q)_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \\ & (\chi_h, \mu)_{\partial \mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F - (p_h, \mu)_{\partial \mathcal{T}_h}, \\ & \text{para todo } (q, \mu) \in V \times \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Da regularidade de ξ_h temos que o produto $(p_h, \xi_h)_F$ faz sentido e a seguinte identidade é satisfeita

$$(\chi_h, \xi_h)_{\partial \mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \xi_h)_F - (p_h, \xi_h)_{\partial \mathcal{T}_h} \quad (3.44)$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g - p_h, \xi_h)_F - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_0^{\partial K}} (\llbracket p_h \rrbracket, \xi_h \mathbf{n}^{\partial K})_F, \quad (3.45)$$

onde $\mathcal{E}_0^{\partial K} = \mathcal{E}^{\partial K} \cap \mathcal{E}^0$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$. Usando a identidade (3.45), a desigualdade de Cauchy-Schwarz e um argumento de escalonamento (ver [14], página 111) obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \min\{1, c_{\min}\} \|\chi_h\|_V^2 &\leq (\mathcal{K} \nabla \chi_h, \nabla \chi_h)_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{d_\Omega^2} (\chi_h, \chi_h)_{\mathcal{T}_h} \\ &= -(\chi_h, \xi_h)_{\partial \mathcal{T}_h} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{E}_0^{\partial K}} (\llbracket p_h \rrbracket, \xi_h \mathbf{n}^{\partial K})_F - \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g - p_h, \xi_h)_F \\ &\leq \sum_{F \in \mathcal{E}^0} \|\llbracket p_h \rrbracket\|_{0,F} \|\xi_h\|_{0,F} + \sum_{F \in \mathcal{E}^D} \|g - p_h\|_{0,F} \|\xi_h\|_{0,F} \\ &\leq \left[\sum_{F \in \mathcal{E}} h_F \|\xi_h\|_{0,F}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{F \in \mathcal{E}^0} \frac{1}{h_F} \|\llbracket p_h \rrbracket\|_{0,F}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}^D} \frac{1}{h_F} \|g - p_h\|_{0,F}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{c_{\min} c_l} [h_F \|\mathcal{K} \nabla \chi_h \cdot \mathbf{n}_F\|_{0,F}^2]^{\frac{1}{2}} \eta \\ &\leq \frac{C}{c_l} \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \|\chi_h\|_V \eta, \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Usamos o resultado auxiliar anterior para provar a seguintes estimativa para a norma do erro entre a solução de (3.13) e de (3.10).

Teorema 3.19 Seja η definida em (3.39), $(\lambda, \bar{p}) \in \Lambda \times V_0$ e $(\lambda_h, \bar{p}_h) \in \Lambda \times V_0$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Assumimos $p = p_0 + T\lambda + p_f \in V$, $p_h = p_0 + T\lambda_h + p_f \in V$, $-\mathcal{K}\nabla p \in H(\text{div}, \Omega)$, $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) Existe $C > 0$, independente de \mathcal{K} ou h , tal que

$$\|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla p_h\|_{\text{div}, h} + \sqrt{c_{\min}} \|p - p_h\|_V \leq 2\sqrt{2} \frac{\max\left\{\sqrt{c_{\max}}, \frac{c_{\max}}{c_{\min}}\right\}}{\beta c_l \min\{1, c_{\min}\}} C \eta,$$

(2) Existe $C > 0$, independente de \mathcal{K} ou h , tal que

$$\eta_F \leq c_l \sqrt{c_{\min}} C \|p - p_h\|_{V, F},$$

para cada $F \in \mathcal{E}$.

Demonstração: Seja $(\mu, q_0) \in \Lambda \times V_0$. No Lema 3.2 consideremos o caso em que $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \nabla T\mu$, onde $T\mu$ representa a solução do problema (3.4) com $\mathcal{K} = \mathcal{I}$. Assim $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}} \leq \sqrt{2}\|\mu\|_{\Lambda}$. Logo, usando a propriedade de consistência da formulação (3.1), o Lema 3.18, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, integração por partes e novamente o Lema 3.18, temos

$$\begin{aligned} B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h; \mu, q_0) &= (p - p_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F - (p_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} &= (\chi_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \chi_h)_{\mathcal{T}_h} + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \chi_h)_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}} \|\chi_h\|_V \\ &\leq \frac{C}{c_l \min\{1, c_{\min}\}} \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \|\mu\|_{\Lambda} \eta \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde C é uma constante independente de \mathcal{K} ou h . Do Teorema 3.7 e pela definição

(3.21) da norma $\|(\cdot, \cdot)\|_{\Lambda \times V}$ a seguinte estimativa é válida

$$\|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{(\mu, q_0) \in \Lambda \times V_0} \frac{B(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h; \mu, q_0)}{\|(\mu, q_0)\|_{\Lambda \times V}} \quad (3.48)$$

$$\leq \frac{C}{\beta c_l \min\{1, c_{\min}\}} \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \eta. \quad (3.49)$$

Em seguida, note que $p - p_h = \bar{p} - \bar{p}_h + T(\lambda - \lambda_h)$, e usando as normas (3.16), (3.15) e (3.18), o Lema 3.2 e (3.49), temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\nabla p - \mathcal{K}\nabla p_h\|_{\text{div},h} + \sqrt{c_{\min}}\|p - p_h\|_V &= \\ &= \|\mathcal{K}\nabla T(\lambda - \lambda_h)\|_{\text{div},h} + \sqrt{c_{\min}}\|p - p_h\|_V \\ &\leq \sqrt{2 \frac{c_{\max}}{c_{\min}}}\|\lambda - \lambda_h\|_{\Lambda} + \sqrt{c_{\min}} \left[\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_V + 2 \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}}\|\lambda - \lambda_h\|_{\Lambda} \right] \\ &\leq 2\sqrt{c_{\min}} \max \left\{ 1, \frac{\sqrt{c_{\max}}}{c_{\min}} \right\} \|(\lambda - \lambda_h, \bar{p} - \bar{p}_h)\|_{\Lambda \times V} \\ &\leq 2\sqrt{2} \frac{\max \left\{ \sqrt{c_{\max}}, \frac{c_{\max}}{c_{\min}} \right\}}{\beta c_l \min\{1, c_{\min}\}} C \eta, \end{aligned}$$

e obtemos a estimativa (1). Provamos agora a estimativa (2). Seja $F \in \mathcal{E}$, e consideremos $\mu \in \Lambda$ com suporte em F tal que, $\mu_F^{\partial K} \mathbf{n}_F^{\partial K} = \frac{1}{2}R_F$ se $F \in \mathcal{E}^0$, e $\mu_F^{\partial K} \mathbf{n}_F^{\partial K} = R_F$ se $F \in \mathcal{E}^D$, para cada $K \in \mathcal{T}_h^F$. De (3.38) temos que $R_F \in [L^2(F)]^d$. Seja $K \in \mathcal{T}_h^F$, usando (3.46), temos

$$\|R_F\|_{0,F}^2 = (\mu \mathbf{n}_F^{\partial K}, R_F)_F = (R_F, \llbracket p_h - p \rrbracket)_F \leq \|R_F\|_{0,F} \|\llbracket p_h - p \rrbracket\|_{0,F}.$$

Em seguida, usando a desigualdade do traço (A.10) e a regularidade da malha, temos

$$\begin{aligned}
\|R_F\|_{0,F} &\leq \| \llbracket p - p_h \rrbracket \|_{0,F} \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \left[\frac{1}{h_K} \|p - p_h\|_{0,K}^2 + h_K \|\nabla p - \nabla p_h\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sqrt{h_F} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \left[\frac{1}{h_K^2} \|p - p_h\|_{0,K}^2 + \|\nabla p - \nabla p_h\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= C \sqrt{h_F} \|p - p_h\|_{V,F},
\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Como um Corolário do Teorema anterior mostramos a seguir que, assumindo regularidade extra para a solução de (3.10), obtemos um resultado mais forte relativo à norma $L^2(\Omega)$.

Corolário 3.20 Seja η definida em (3.39). Com as hipóteses do Teorema 3.19 e assumindo que a solução do problema (3.1) tem propriedades suavizantes, temos que existe $C > 0$, independente de \mathcal{K} ou h , tal que

$$|p - p_h|_E \leq \frac{C}{\beta c_l \min\{1, c_{\min}\}} \left[\max \left\{ \sqrt{c_{\max}}, \frac{c_{\max}}{c_{\min}} \right\} + \frac{\bar{C}^2}{\beta} \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}}} \right] \eta. \quad (3.50)$$

Demonstração: Do item (1) do Lema 3.11 e (3.49) temos

$$\frac{1}{h} \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \frac{\bar{C}^2}{\beta \sqrt{c_{\min}}} \|\lambda - \lambda_h\|_{\Lambda} \leq C \frac{\bar{C}^2}{\beta^2 c_l \min\{1, c_{\min}\}} \sqrt{\frac{c_{\max}}{c_{\min}^2}} \eta,$$

e logo, usando o Teorema 3.19 e a definição (3.20) da norma $|\cdot|_E$ obtemos o resultado desejado. ■

Observação 3.1 Se assumirmos que f é constante por partes em \mathcal{T}_h ($f \in V_0$) então $p_f = 0$ (ver problema local (3.5)) e a função resíduo dada em (3.38) pode

ser simplificada como

$$R_F := \begin{cases} -\frac{1}{2} \llbracket \bar{p}_h + T\lambda_h \rrbracket, & F \in \mathcal{E}^0, \\ (g - \bar{p}_h - T\lambda_h) \mathbf{n}^F, & F \in \mathcal{E}^D, \\ \mathbf{0}, & F \in \mathcal{E}^N. \end{cases} \quad (3.51)$$

Agora estudamos a influência de se omitir p_f do estimador de erro a-posteriori. Da desigualdade do traço (A.10) temos que, para $K \in \mathcal{T}_h^F$, a seguinte estimativa ocorre

$$\|p_f\|_{0,F} \leq C \left[\frac{1}{h_K} \|p_f\|_{0,K}^2 + h_K \|\nabla p_f\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, usando a desigualdade triangular, a desigualdade de Poincaré local (A.9) e o Lema 3.4, obtemos

$$\|\llbracket p_f \rrbracket\|_{0,F} \leq C \sqrt{h_K} \|\nabla p_f\|_{0,K} \leq C \sqrt{h_K} \|f^\perp\|_{0,K},$$

onde $f^\perp = f - \frac{1}{|K|} \int_K f$. Em consequência, omitindo p_f e usando o estimador η baseado na função resíduo (3.51), as estimativas dadas no Teorema 3.19 devem ser modificadas incluindo-se o termo $\left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|f^\perp\|_{0,K} \right]^{\frac{1}{2}}$, o qual corresponde a um termo de alta ordem.

3.7 Validações numéricas

3.7.1 Estimativas de erro *a-priori*

O método é testado para o caso $\mathcal{K} = \mathcal{I}$, com diferentes escolhas de l para o espaço de aproximação $\Lambda_h^{(l)}$. Os experimentos numéricos foram definidos sobre um quadrado unitário, usando uma sequência de malhas estruturadas e considerando a solução exata $p(x, y) = \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)$. Este problema tem a propriedade que $f \neq 0$ e satisfaz condições de Neumann homogêneas. Os erros foram medidos na norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

Nas Figuras (3.1)-(3.4) podemos verificar que as taxas de convergência ótimas

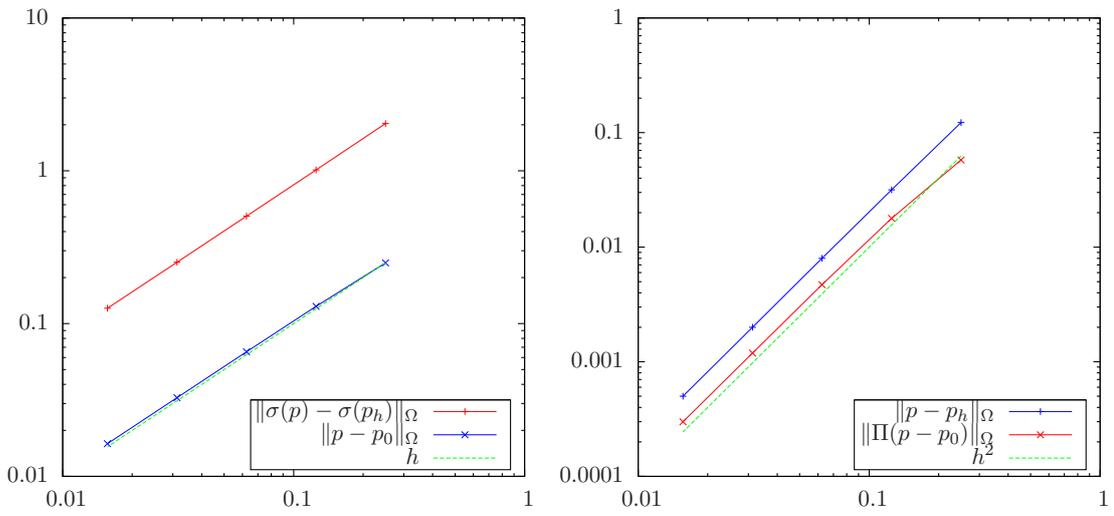


Figura 3.1: Curvas de convergência para o caso $l = 0$.

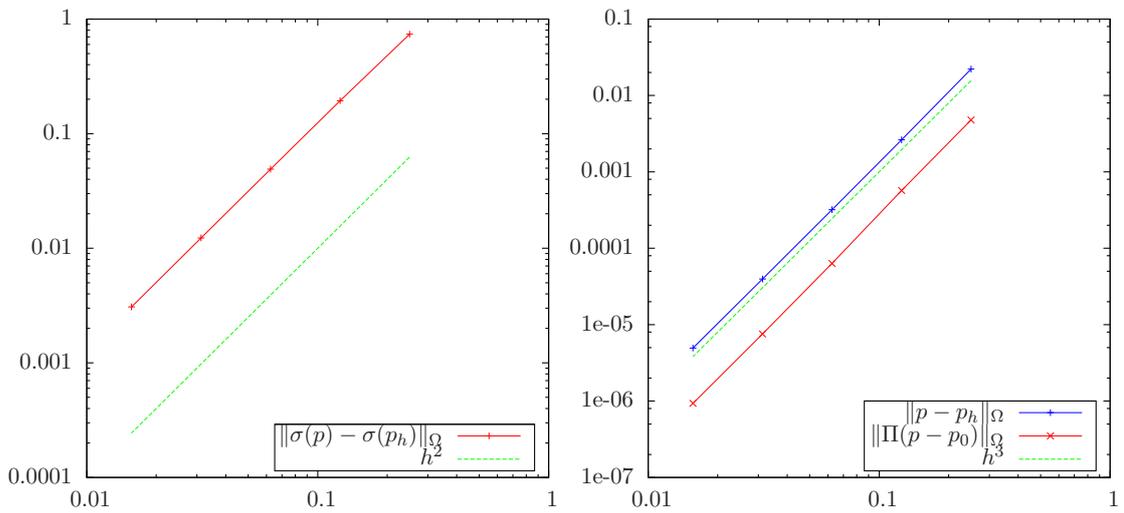


Figura 3.2: Curvas de convergência para o caso $l = 1$.

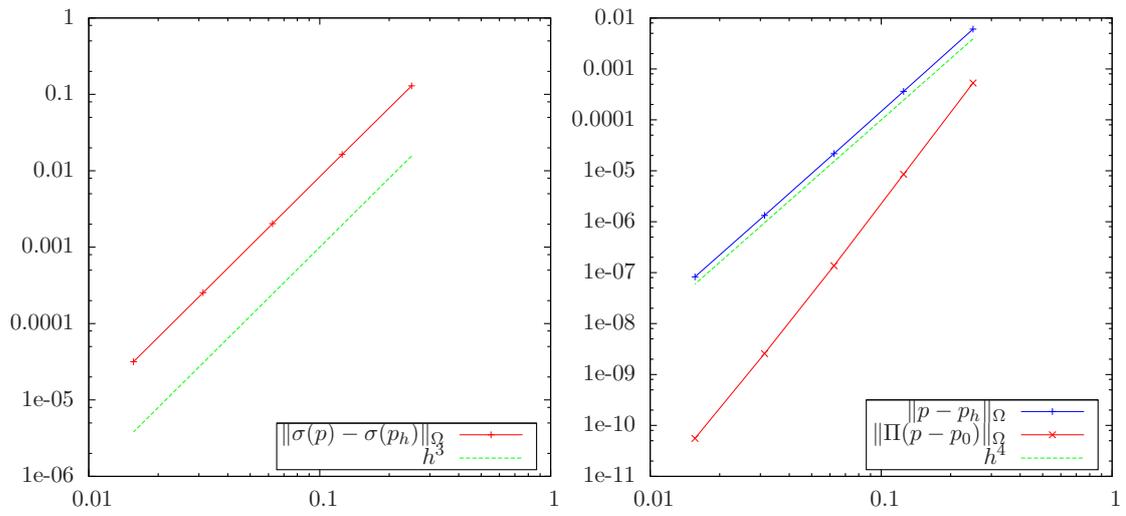


Figura 3.3: Curvas de convergência para o caso $l = 2$.

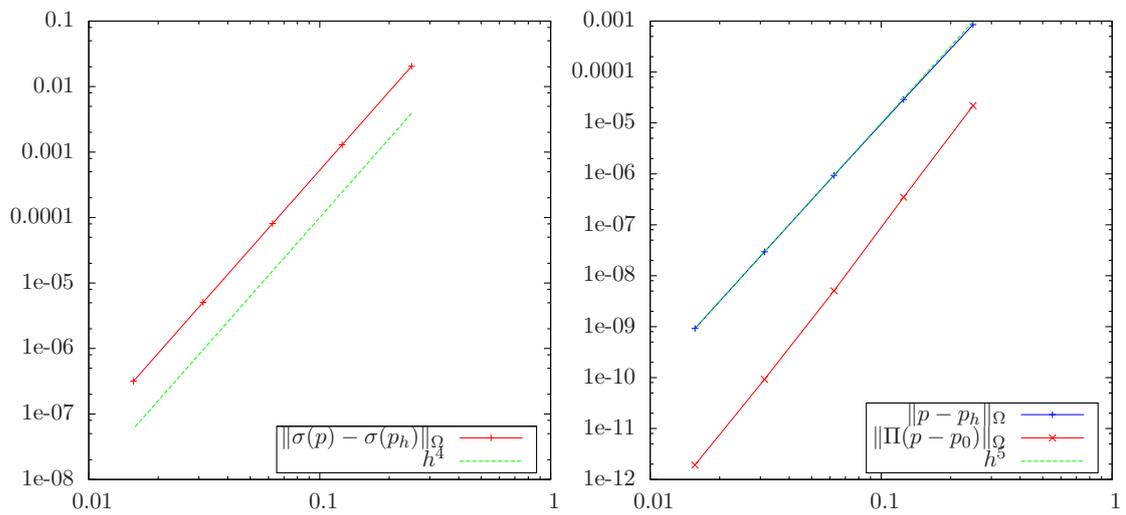


Figura 3.4: Curvas de convergência para o caso $l = 3$.

esperadas, apresentadas em Teorema 3.15, foram recuperadas com sucesso nos experimentos numéricos.

Destacamos que todos os cálculos no segundo nível foram feitos com apenas um elemento em cada sub-malha usando interpolação de Lagrange de grau $l+1$. Na Figura 3.5 (usando $l = 2$) podemos ver a convergência da pressão p_h e da variável dual $-\mathcal{K}\nabla p_h$ com ordem $\mathcal{O}(\frac{1}{N^{l+2}})$ e ordem $\mathcal{O}(\frac{1}{N^{l+1}})$, respectivamente. Aqui N representa a raiz quadrada do número total de graus de liberdade. É importante notar que todos os graus de liberdades usados no segundo nível foram considerados neste experimento e podemos concluir que o esforço computacional, ainda que usada a abordagem de resolver sequencialmente os problemas locais, é competitiva.

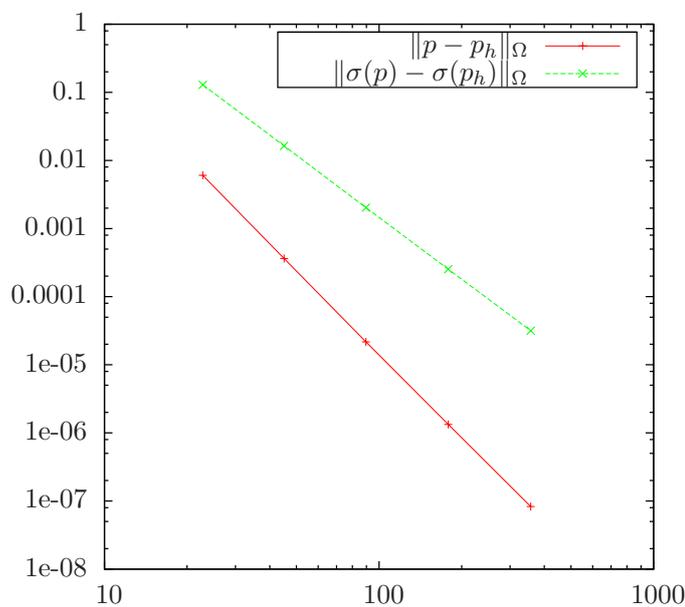


Figura 3.5: Curvas de convergência relativas a N . Para $l = 2$

3.7.2 Estimativas de erro *a-posteriori*

Este teste numérico avalia os aspectos teóricos do método apresentado na seção de análise de erro *a-posteriori*. Consideramos uma solução analítica $p(x, y) = \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)$ e prescrevemos as condições de contorno correspondentes. Para o estudo da confiabilidade e eficiência do estimador (3.39), consideramos o seguinte índice de efetividade

Tabela 3.1: Taxa de convergência para $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ e $l = 0$.

h	$ p - p_h _E$	η	E_f
0.2500000	6.286	4.398	0.709
0.1250000	2.410	2.157	0.896
0.0625000	1.078	1.071	0.994
0.0312500	0.520	0.535	1.027
0.0156250	0.258	0.267	1.036
0.0078125	0.129	0.134	1.039

$$E_f := \frac{\eta}{|p - p_h|_E},$$

onde os valores para c_l são 3, 7, 18, 50, para $l = 0, 1, 2, 3$, respectivamente, e

$$|p - p_h|_E := \|\mathcal{K}\nabla(p - p_h)\|_{\text{div},h} + c_{\min} \left[\frac{1}{h} \|p - p_h\|_{0,\Omega} + \|\nabla(p - p_h)\|_{0,\Omega} \right].$$

Primeiramente fixamos $\mathcal{K} = \mathcal{I}$, e ilustramos os resultados nas tabelas 3.1 e 3.2 e nas Figuras 3.6 e 3.8, com $l = 0$ e $l = 3$, a partir de uma sequência de malhas estruturadas formadas por triângulos. Também consideramos $\mathcal{K} = \alpha \mathcal{I}$ com $\alpha \in \mathbb{R}^+$ variando entre 10^{-6} e 10^6 , e estudamos o índice de efetividade com respeito ao valor de \mathcal{K} (ver Figuras 3.7 e 3.9). Observamos que os resultados validam perfeitamente os resultados teóricos e verificamos que o índice de efetividade é muito próximo de 1.0 e independente de \mathcal{K} e h .

3.7.3 Caso com coeficiente descontínuos

Consideramos o desempenho do método MHM e do estimador de erro *a-posteriori* (3.39) na presença de coeficientes descontínuos. Usamos $\mathcal{K} = 10^{-6} \mathcal{I}$ em um quadrado de área 0.25 centrado no domínio (quadrado unitário) e definimos $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ no restante de domínio. Usamos condições de Dirichlet $p = 1$ e $p = 0$ em $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente, e condição de Neumann nula em $y = 0$

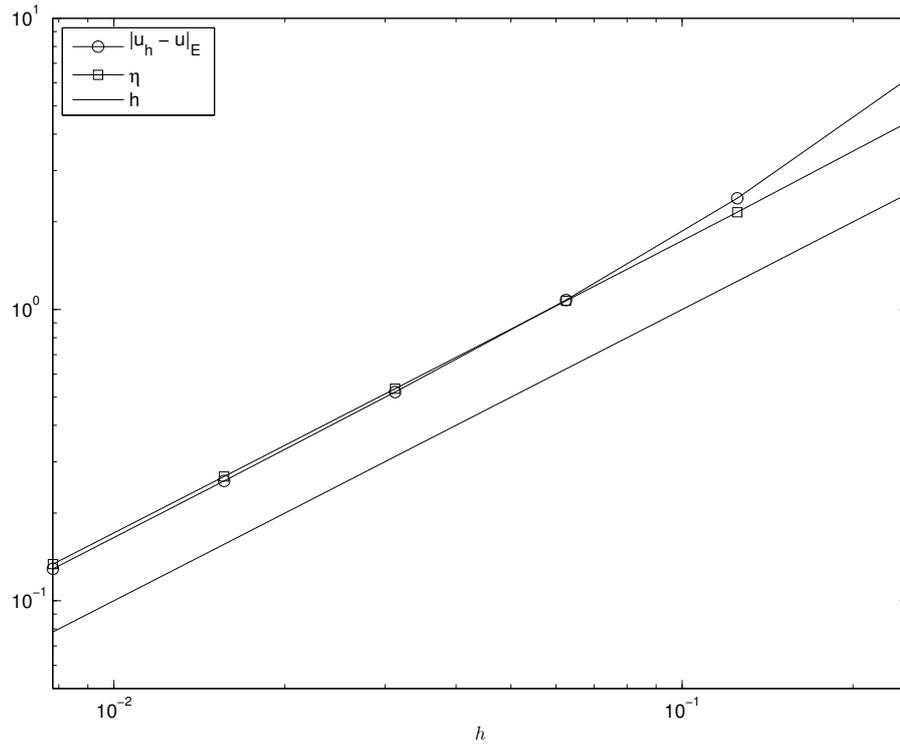


Figura 3.6: Curvas de convergência para o caso $\mathcal{K} = \mathcal{I}$.

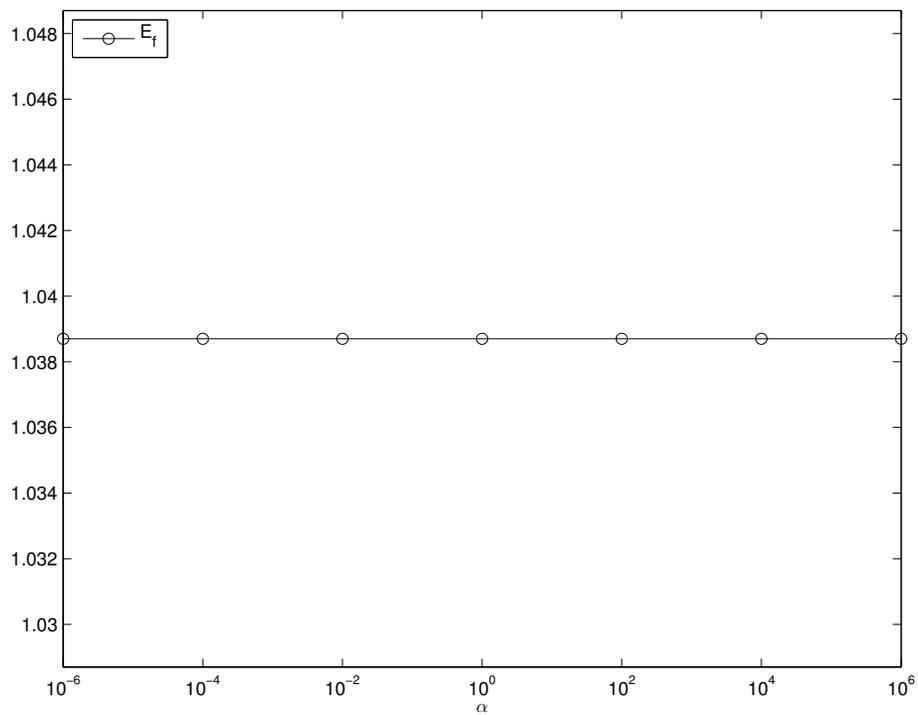


Figura 3.7: O índice de efetividade mostra proximidade ao valor 1.0 (na malha mais fina). Usando $l = 0$.

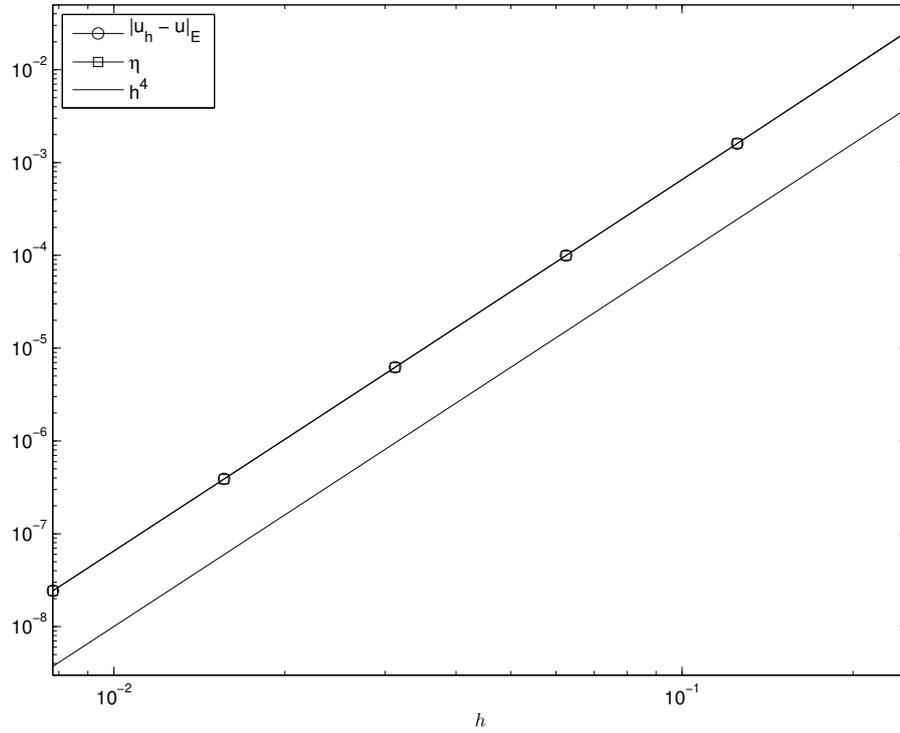


Figura 3.8: Curvas de convergência para $\mathcal{K} = \mathcal{I}$. Usando $l = 3$.

Tabela 3.2: Taxa de convergência para $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ e $l = 3$.

h	$ p - p_h _E$	η	E_f
0.2500000	2.595×10^{-2}	2.637×10^{-2}	1.016
0.1250000	1.600×10^{-3}	1.605×10^{-3}	1.003
0.0625000	9.986×10^{-5}	9.941×10^{-5}	0.995
0.0312500	6.240×10^{-6}	6.198×10^{-6}	0.993
0.0156250	3.900×10^{-7}	3.872×10^{-7}	0.993
0.0078125	2.437×10^{-8}	2.419×10^{-8}	0.993

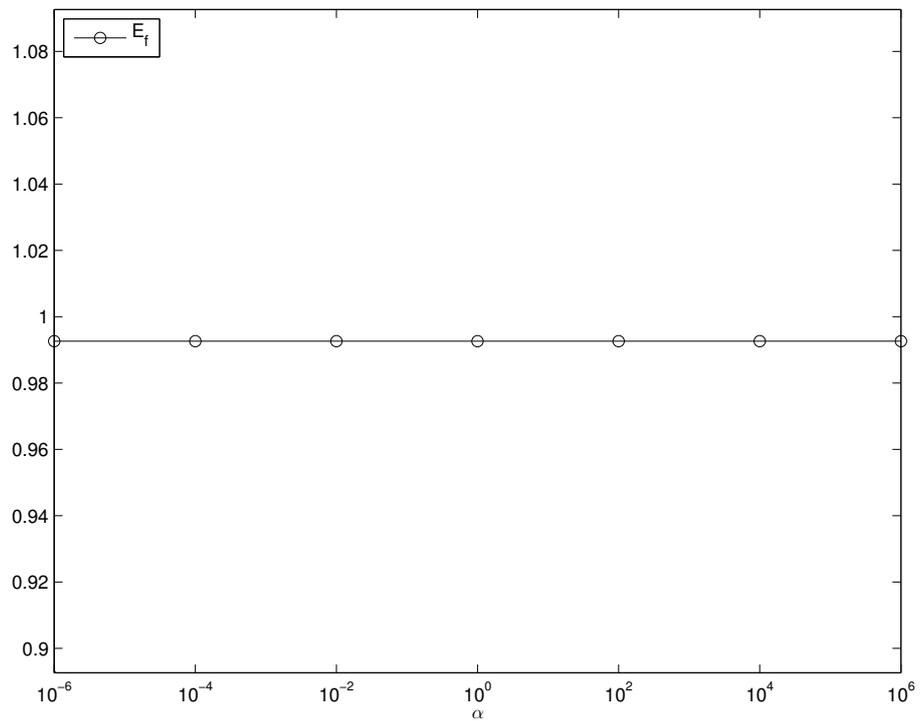


Figura 3.9: O índice de efetividade mostra proximidade ao valor 1.0 (na malha mais fina). Usando $l = 3$.

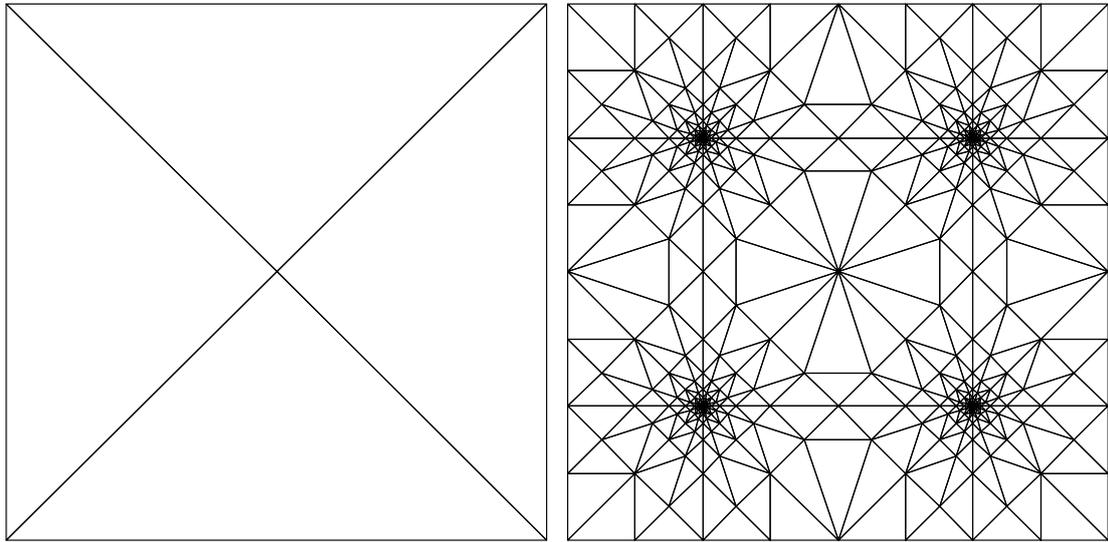


Figura 3.10: Malha inicial (4 elementos) e a malha final adaptada (848 elementos) com $l = 2$.

e $y = 1$. Tais resultados motivam o uso de MHM em aplicações que envolvem permeabilidades heteorgêneas. A Figura 3.10 apresenta a malha inicial e a malha adaptada obtida usando $l = 2$ nas faces. Podemos ver que a malha adaptada captura as singularidades nos cantos do quadrado com permeabilidade $\mathcal{K} = 10^{-6} \mathcal{I}$.

3.7.4 Problema *quarter five-spot*

O problema *quarter five-spot* é de importância prática e é utilizado como o principal *benchmark* para validar a estabilidade e precisão de métodos numéricos para a equação de Darcy. Este experimento foi definido para $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ sobre um domínio quadrado, com poços de injeção e produção modelados por *deltas de Dirac* (ver mais detalhes em 2.4.1). As Figuras 3.12 e 3.13 apresentam as malhas iniciais e finais para $l = 0$ e $l = 2$ nas faces. Vale salientar que tal problema está fora do escopo da teoria.

Tal como esperado, o refinamento de malha é concentrado perto dos poços, e podemos ver como uma maior ordem de interpolação nas faces ($l = 2$) diminui o número de elementos necessários para obter a mesma precisão comparado com o caso $l = 0$. Este fato é ilustrado nas Figuras 3.14 e 3.15, que mostram as superfícies das variáveis primal e dual, i.e. p_h e $-\mathcal{K}\nabla p_h$, respectivamente, sobre as malhas

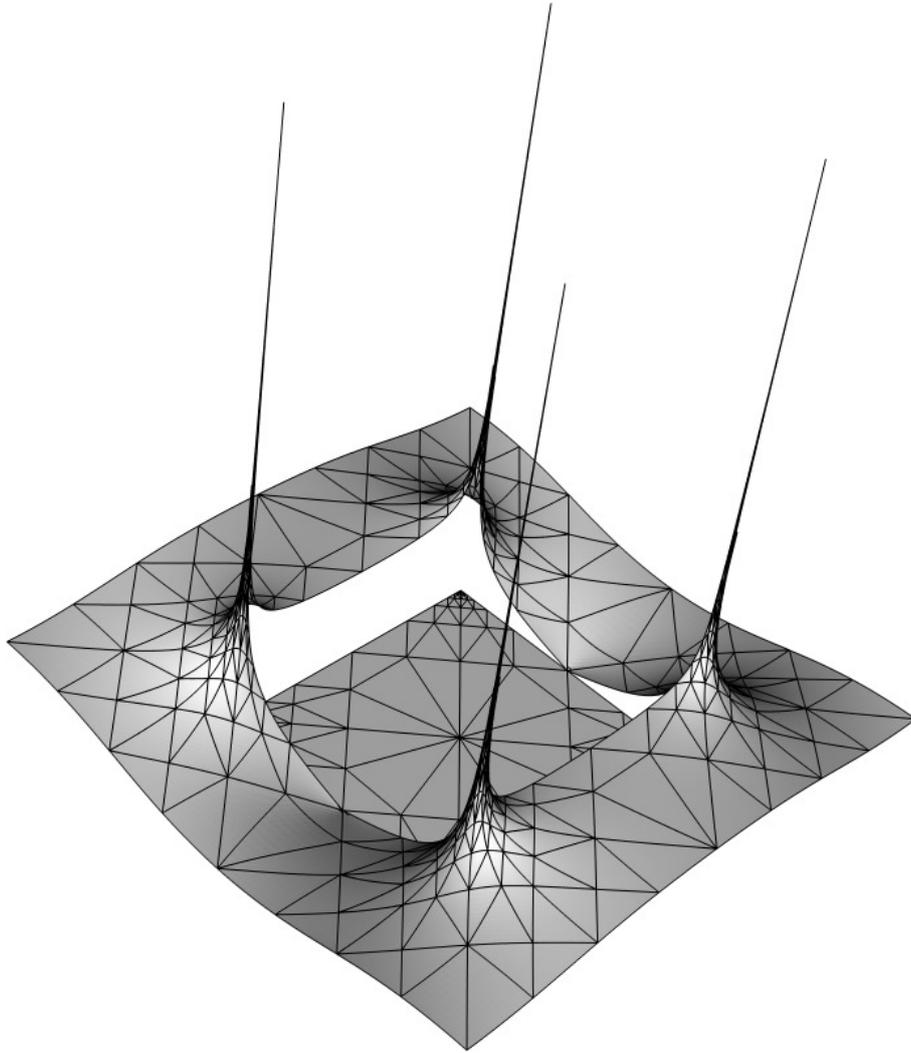


Figura 3.11: Superfície do valor absoluto da velocidade, $|\mathcal{K}\nabla p_h|$, usando $l = 2$.

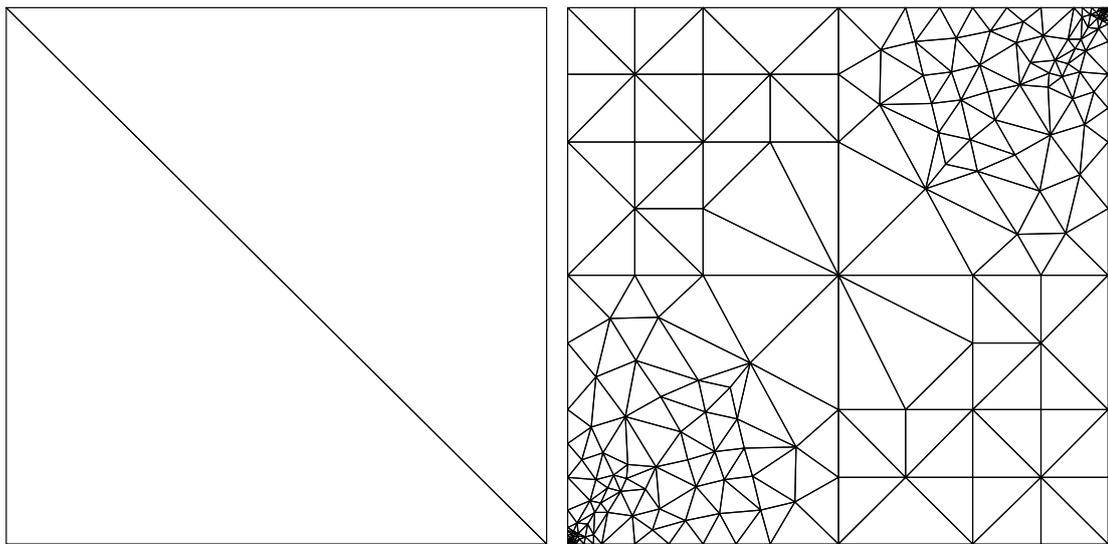


Figura 3.12: A malha inicial (2 elementos) e a malha final adaptada (356 elementos) com $l = 0$.

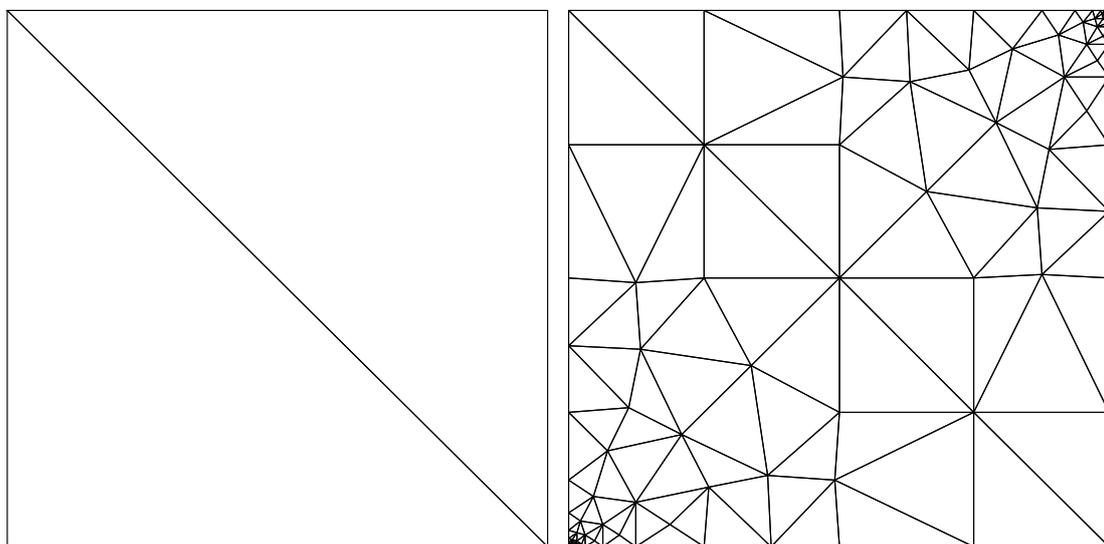


Figura 3.13: A malha inicial (2 elementos) e a malha final adaptada (184 elementos) com $l = 2$.

adaptadas. No geral, os resultados mostram que o método MHM e o estimador de erro associado mostram um desempenho muito bom, mesmo quando empregados em problemas que se encontram fora da teoria em que o método foi desenvolvido.

3.8 Conclusões

O método MHM desenvolvido no Capítulo 2 como consequência de um processo de hibridização, surge como um método que incorpora naturalmente múltiplas escalas, proporcionando soluções com precisão de alta ordem para as variáveis primal (pressão) e dual (velocidade) nos espaços $H^1(\Omega)$ e $H(\text{div}, \Omega)$, respectivamente. Da análise resulta que as estimativas de erro *a-priori* tem convergência ótima nas normas naturais e o estimador de erro *a-posteriori* baseado em faces, é localmente eficiente e globalmente confiável com respeito às normas naturais.

Embora o cálculo dos problemas locais seja de forma geral necessário, tais problemas são completamente independentes entre si. Logo, podem ser resolvidos utilizando uma implementação paralela. Também salientamos que a variável dual preserva as propriedades de conservação local através de um pós-processamento da variável primal. Vale ressaltar que, as características acima mencionadas foram obtidas a partir de uma nova família de pares de espaços de aproximação inf – sup estáveis com base no espaço das funções constantes por partes. Testes numéricos validaram os resultados teóricos de convergência, mostrando em particular o ótimo desempenho do estimador de erro *a-posteriori*. Assim, podemos concluir que o método MHM, por ser naturalmente adaptado a ambientes computacionais paralelos, torna-se uma opção competitiva para resolver com alta precisão problemas realistas com múltiplas escalas.

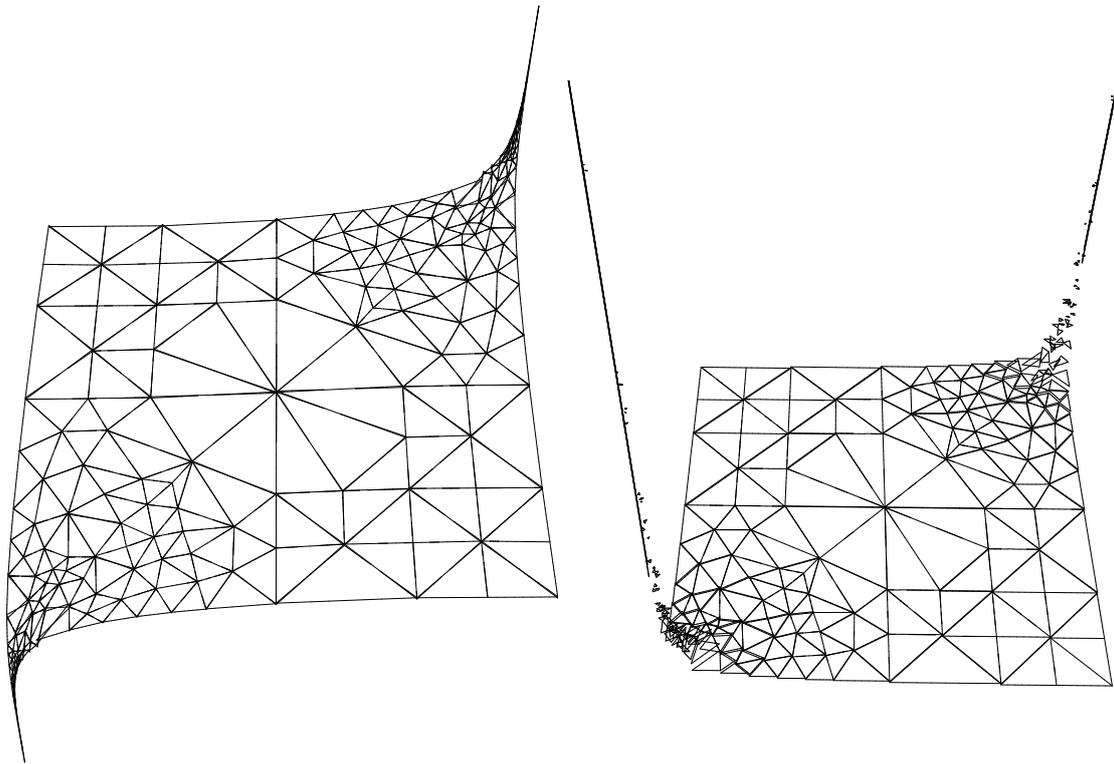


Figura 3.14: Superfície da pressão p_h (esquerda) e do valor absoluto da velocidade $| -\kappa \nabla p_h |$ (direita) na malha final adaptada. Usando $l = 0$.

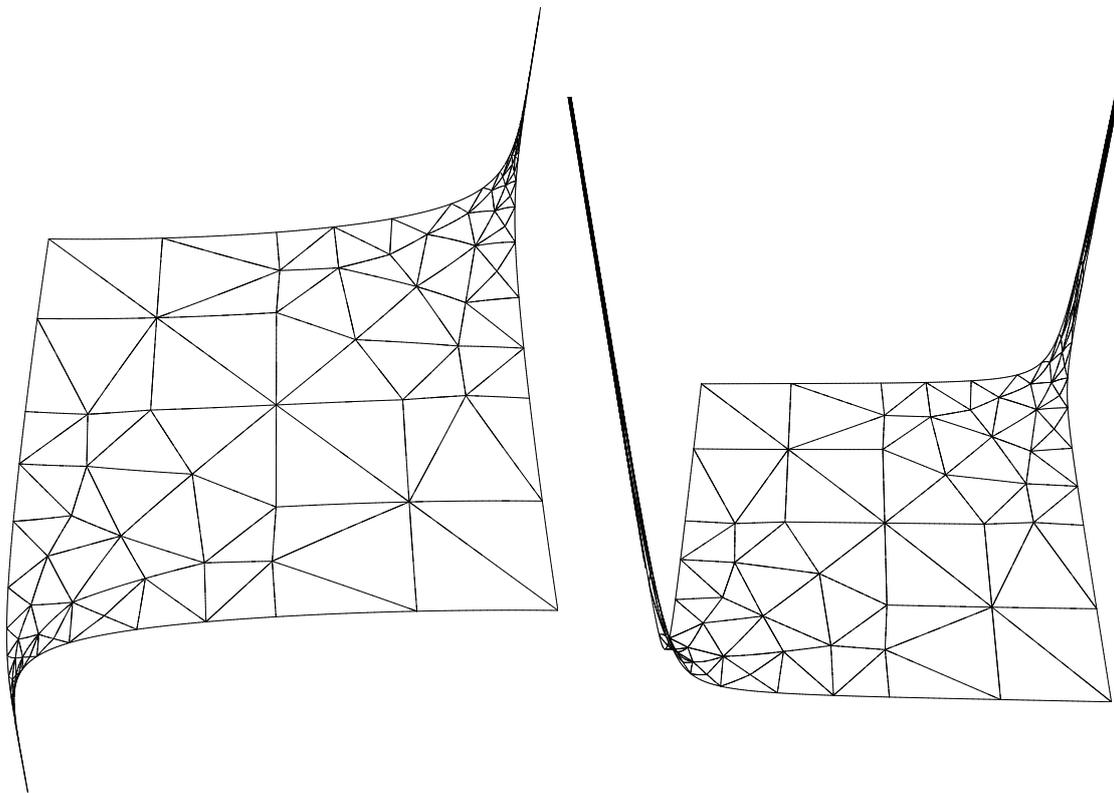


Figura 3.15: Superfície da pressão p_h (esquerda) e do valor absoluto da velocidade $| -\kappa \nabla p_h |$ (direita) na malha final adaptada. Usando $l = 2$

Capítulo 4

Método MHM para a equação reação-advectação-difusão

4.1 Introdução

O desenvolvimento e análise numérica de métodos numéricos para a simulação de fenômenos de transporte com dominância dos termos advectivos e/ou reativos tem sido tema de pesquisa por décadas devido ao grande interesse prático destes modelos. Entretanto, apesar de uma extensa literatura no tema, métodos numéricos robustos e precisos que preservem o princípio do máximo e que sejam conservativos em malhas não-estruturadas (adaptadas ou anisotrópicas, por exemplo) ainda constitui um problema em aberto, principalmente quando envolve aspectos multi-escalas. Nesta linha, métodos recentes baseados em volumes finitos tem ganho popularidade a partir da proposta de Kurganov and Tadmor em [49]. Porém tais métodos ainda possuem grandes deficiências, como por exemplo a ausência de um embasamento matemático adequado à análise de erro ou a limitação a malhas estruturadas ortogonais, o que dificulta a resolução de fenômenos de transporte em geometrias complexas. Além disso, não é claro como tais métodos podem ser estendidos a aproximações de alta ordem ou como podem ser utilizados em problemas multi-escalas em malhas grossas.

Por outro lado os métodos de elementos finitos, quando baseados no método de Galerkin sobre espaços de interpolação polinomiais, sofrem de instabilidades

numéricas que são representadas por oscilações espúrias (não físicas) na solução numérica. Existe uma vasta literatura sobre o tema, e diversas técnicas propõem minimizar tal deficiência. Porém, como mencionado, nenhuma das alternativas é satisfatória em casos gerais. Dentre os diversos métodos de elementos finitos usados (e de reconhecida qualidade) estão os métodos estabilizados. Exemplos são o método SUPG introduzido por Hughes e Brooks em [16, 43, 33] e o UNUSUAL [37]. Todos esses métodos conseguem diminuir consideravelmente as oscilações espúrias, porém não são capazes de eliminá-las (em particular em presença de choques), além de não serem adaptados a tratar modelos multi-escalas. Outras alternativas de estabilização são possíveis, como as apresentadas por Burman em [18, 17]. Uma linha alternativa de construção de métodos de elementos finitos para problemas singularmente perturbados é a técnica de enriquecimento de espaços, conhecida como métodos enriquecidos. Exemplos são os métodos VMS (Variational Multiscale Methods) proposto por Hughes em [42], e os métodos do tipo RFB (Residual Free Bubbles) [10, 35, 31, 68]. Os métodos enriquecidos incorporam ao espaço clássico de aproximação (polinomial) a solução de problemas locais (micro-escala) dirigidos pelo resíduo da equação na macro-escala. As dificuldades citadas no caso de problemas mistos, também estão presentes quando a estratégia de enriquecimento de espaços é aplicada em problemas de transporte singulares (em particular a condição de contorno, escolhida de forma ad-hoc, é um problema ainda em aberto). No caso de problemas de transporte parabólicos (dependentes do tempo), uma instabilidade numérica adicional está presente, originada quando são usados passos de tempo pequenos na discretização temporal (ver Franca et al. [36]).

Na literatura recente podemos encontrar novas abordagens de métodos multi-escalas que utilizam ferramentas de hibridização na formulação variacional, que finalmente geram problemas de três variáveis, aumentando excessivamente o número de graus de liberdade do sistema. Nesta linha de pesquisa identificamos o trabalho de Farhloul and Seghini [30] que explora uma abordagem de hibridização porém não considera o impacto da pequena escala na solução do problema. No tra-

balho de Cockburn et al. [21] e de Egger and Schöberl [26] são apresentadas uma abordagem de hibridização que consideram o efeito da pequena escala mostrando bons resultados para problemas de advecção dominante capturando camadas limite. Porém a estratégia utilizada não produz resultados numéricos precisos no caso de coeficientes heterogêneos. Além disso, em ambos os trabalhos não parece ser possível impor condições de contorno do tipo Neumann.

Neste capítulo desenvolvemos um método híbrido-misto multi-escalas para a equação de reação-advecção-difusão. O novo método MHM se propõe a capturar naturalmente as camadas limite e outros aspectos multi-escalas do problema através de problemas locais definidos a partir da formulação variacional híbrida. Diferentemente do método MHM apresentado no capítulo 2, a metodologia aqui apresentada permite definir um problema global que depende apenas de uma variável (relativa ao fluxo), o que reduz significativamente o número de graus de liberdade do sistema. Destacamos a ausência de escolhas de parâmetros arbitrários como os presentes nos métodos estabilizados, sendo os espaços de aproximação o único ponto a determinar. Adicionalmente, apresentamos um estimador de erro *a-posteriori* que induz uma nova estratégia de adaptação de espaços, caracterizada por ser mais eficiente do ponto de vista prático que a abordagem clássica de adaptação de malha.

4.2 Modelo e hibridização

4.2.1 Problema de reação-advecção-difusão

Consideremos o seguinte problema elíptico: *Achar u tal que*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u := \nabla \cdot (-\epsilon \nabla u + \alpha u) + \sigma u &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

onde o termo de fonte f é uma função escalar em $L^2(\Omega)$. O coeficiente de *difusão* (ou *difusão-dispersão*) $\epsilon \in [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$ é um tensor simétrico e uniformemente

elíptico, i.e., existe $c_{\min}, c_{\max} > 0$ tais que

$$c_{\min} |\xi|^2 \leq \xi^T \epsilon(\mathbf{x}) \xi \leq c_{\max} |\xi|^2, \quad (4.2)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ e para todo $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. O coeficiente de advecção $\boldsymbol{\alpha}$ é uma função vetorial em $[H^1(\Omega)]^d \cap [L^\infty(\Omega)]^d$ tal que $\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha}$ está em $L^\infty(\Omega)$, e o coeficiente de reação σ é uma função escalar em $L^\infty(\Omega)$. As seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + 2\sigma \geq 0, \text{ e } |\boldsymbol{\alpha}| + |\sigma| > 0, \text{ em } \Omega. \quad (4.3)$$

Observação 4.1 *Condições de contorno de Dirichlet não homogêneas e outros tipos de condições de contorno (Robin e Neumann) podem ser impostas sobre o problema (4.1). Isto é tratado em detalhe na sub-seção 4.2.5.*

4.2.2 Formulação híbrida

Nosso objetivo é construir uma formulação variacional híbrida a partir da qual a solução pode ser obtida por problemas locais independentes com o intuito de capturar o comportamento multi-escalas do problema. Para isto definimos a forma bilinear $a : H^1(\mathcal{T}_h) \times H^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$a(u, v) := (\epsilon \nabla u, \nabla v)_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u, v)_{\mathcal{T}_h} - \frac{1}{2} (u, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v)_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{2} ((\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + 2\sigma) u, v)_{\mathcal{T}_h}. \quad (4.4)$$

Em seguida definimos os espaços $\Lambda := H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{E})$ e $V := H^1(\mathcal{T}_h)$ e propomos a seguinte formulação híbrida:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\lambda, u) \in \Lambda \times V \text{ tal que} \\ & \left. \begin{aligned} a(u, v) + (\lambda, v)_{\partial \mathcal{T}_h} &= (f, v)_{\mathcal{T}_h}, \\ (\mu, u)_{\partial \mathcal{T}_h} &= 0, \end{aligned} \right\} \\ & \text{para todo } (\mu, v) \in \Lambda \times V. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

A formulação variacional híbrida (4.5) pode ser interpretada como um *problema de ponto de sela* onde a continuidade da solução em $\partial K \in \partial \mathcal{T}_h$ é relaxada e imposta

fracamente usando o multiplicador de Lagrange $\lambda \in \Lambda$. Da análise apresentada em [61] assumindo regularidade, podemos integrar por partes sobre cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ na primeira expressão em (4.5) e obter localmente

$$(\mathcal{L}u - f, v)_K + (\boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} - \lambda, v)_{\partial K} = 0, \quad \forall v \in H^1(K), \quad (4.6)$$

para todo $K \in \mathcal{T}_h$, onde a função de fluxo $\boldsymbol{\sigma}(u)$ é definida por

$$\boldsymbol{\sigma}(u) := -\epsilon \nabla u + \frac{1}{2} u \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.7)$$

Logo, usando argumentos clássicos, a formulação em (4.6) corresponde ao problema forte:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \text{ em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} &= \lambda \text{ em } \partial K, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

em cada $K \in \mathcal{T}_h$. Note que dado $\lambda \in \Lambda$ o problema (4.8) está bem posto. Da definição do espaço Λ e do problema local (4.8) obtemos:

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \mathbf{n}_F \rrbracket|_F = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}^0 \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(u)|_F \cdot \mathbf{n}_F = \lambda|_F, \quad \forall F \in \mathcal{E}^D. \quad (4.10)$$

Testando (4.5) contra $(0, \mu) \in \Lambda \times V$, a formulação (4.5) implica que:

$$\llbracket u \rrbracket|_F = \mathbf{0}, \quad \forall F \in \mathcal{E}^0 \quad (4.11)$$

$$u|_F = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}^D. \quad (4.12)$$

4.2.3 Forma híbrida equivalente: localidade

Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ consideramos a forma bilinear $a_K : H^1(K) \times H^1(K) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $a_K(\cdot, \cdot) := a(\cdot, \cdot)|_{H^1(K) \times H^1(K)}$. Logo a forma bilinear $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

definida em (4.4) pode ser escrita em termos locais como

$$a(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_K(u, v). \quad (4.13)$$

Assim, testando a formulação (4.5) contra $(0, v) \in \Lambda \times V$ em cada $K \in \mathcal{T}_h$ obtemos o problema local:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } u|_K \in H^1(K) \text{ tal que} \\ a_K(u, w) = (f, w)_K - (\lambda, w)_{\partial K}, \\ \text{para todo } w \in H^1(K). \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Agora, como (4.14) é um problema linear, decomponos $u = T\lambda + u_f$ onde a transformação $T : \Lambda \rightarrow V$ é tal que, dado $\lambda \in \Lambda$, associamos $T\lambda$ à solução do problema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } T\lambda|_K \in H^1(K) \text{ tal que} \\ a_K(T\lambda, w) = -(\lambda, w)_{\partial K}, \\ \text{para todo } w \in H^1(K), \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

e similarmente $u_f \in V$ está definida como a solução do problema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } u_f|_K \in H^1(K) \text{ tal que} \\ a_K(u_f, w) = (f, w)_K, \\ \text{para todo } w \in H^1(K). \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

Finalmente usando a segunda equação em (4.5), formulamos o problema global por:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } \lambda \in \Lambda \text{ tal que} \\ (\mu, T\lambda)_{\partial \mathcal{T}_h} = -(\mu, u_f)_{\partial \mathcal{T}_h}, \\ \text{para todo } \mu \in \Lambda. \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

Observe que a solução exata $u \in V$ de (4.1) está completamente determinada pelos problemas elípticos locais (4.15) e (4.16) e pelo problema global (4.17), e caracterizada por:

$$u = T\lambda + u^f. \quad (4.18)$$

Observação 4.2 Note que (4.17) é uma formulação elíptica. Porém, dado $\lambda \in \Lambda$ solução de (4.17), é possível reconstruir a solução de (4.1). Desta forma, a formulação composta pelos problemas locais (4.15) e (4.16) e o problema global (4.17) pode ser interpretada como uma formulação mista desacoplada.

4.2.4 Formas alternativas

Assumindo regularidade para a solução de (4.1) e integrando por partes o problema local em (4.15), obtemos o problema forte:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}T\lambda &= 0, & \text{em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(T\lambda) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} &= \lambda, & \text{em } \partial K. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Da mesma forma, o problema (4.16) é reescrito na versão forte como:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_f &= f, & \text{em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(u_f) \cdot \mathbf{n}^{\partial K} &= 0, & \text{em } \partial K. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

O problema global (4.17) pode ser reescrito em uma forma equivalente e mais clássica. De fato, usando a formulação variacional (4.15) temos

$$(\mu, T\lambda + u_f)_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mu, T\lambda + u_f)_{\partial K} \quad (4.21)$$

$$= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_K(T\mu, T\lambda + u_f)_K \quad (4.22)$$

$$= a(T\mu, T\lambda + u_f), \quad (4.23)$$

e logo substituindo a identidade $(\mu, T\lambda + u_f)_{\partial\mathcal{T}_h} = -a(T\mu, T\lambda + u_f)$ no problema (4.17), obtemos o problema global:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Achar } \lambda \in \Lambda \text{ tal que} \\ &a(T\mu, T\lambda) = -a(T\mu, u_f) \\ &\text{para todo } \mu \in \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

4.2.5 Condições de contorno

Aqui estudamos a influência sobre a formulação híbrida (4.5) e sobre os problemas locais (4.15) e (4.16) em se preescrever diferentes condições de contorno no problema (4.1). Consideremos o seguinte problema elíptico: *Achar u tal que*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \text{ em } \Omega, \\ -\epsilon \nabla u \cdot \mathbf{n}^\Gamma + \omega u &= g_N \text{ em } \Gamma_N, \\ u &= g_D \text{ em } \Gamma_D, \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

O tipo de condição de contorno a ser imposta em Γ_N é determinada pela função escalar $\omega \in L^2(\Gamma_N)$, ($\omega \equiv 0$ se temos uma condição de contorno de Neumann clássica) que deve satisfazer a condição

$$\omega \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}^\Gamma, \text{ em } \Gamma_N. \quad (4.26)$$

Assumindo suficiente regularidade sobre g_N e g_D podemos garantir a existência de uma função u^Γ que satisfaça as condições de contorno em (4.25) de modo que a solução se decomponha como $u = \hat{u} + u^\Gamma$, onde \hat{u} satisfaz o problema: *Achar \hat{u} tal que*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\hat{u} &= \hat{f} \text{ em } \Omega, \\ -\epsilon \nabla \hat{u} \cdot \mathbf{n}^\Gamma + \omega \hat{u} &= 0 \text{ em } \Gamma_N, \\ \hat{u} &= 0 \text{ em } \Gamma_D, \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

onde $\hat{f} = f + \nabla \cdot (\epsilon \nabla u^\Gamma - \boldsymbol{\alpha} u^\Gamma)$. Por simplicidade estudaremos o problema (4.27) em lugar de (4.25). Denotamos por u a solução de (4.27) e por f o termo de fonte.

Para impor a condição Neumann ou Robin em (4.27) precisamos modificar a forma bilinear e o espaço Λ usados na formulação (4.5). Para isto definimos a forma bilinear $\bar{a}(\cdot, \cdot) : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$\bar{a}(u, v) := a(u, v) + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{E}^N} ((\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}_F - 2\omega) u, v)_F \quad (4.28)$$

e o subespaço $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda$, como

$$\bar{\Lambda} := \{\mu \in \Lambda : \mu|_F = 0, \forall F \in \mathcal{E}^N\}. \quad (4.29)$$

Considere a seguinte formulação híbrida:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\lambda, u) \in \bar{\Lambda} \times V \text{ tal que} \\ & \bar{a}(u, v) + (\lambda, v)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, v)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (\mu, u)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \\ & \text{para todo } (\mu, v) \in \bar{\Lambda} \times V, \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

e observe que o problemas locais correspondente agora se escrevem como:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}T\lambda &= 0, \quad \text{em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(T\lambda) \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K} &= \lambda, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_0^{\partial K} \cup \mathcal{E}_D^{\partial K}, \\ -\epsilon \nabla T\lambda \cdot \mathbf{n}_F + \omega T\lambda &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_N^{\partial K}, \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_f &= f, \quad \text{em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(u_f) \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K} &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_0^{\partial K} \cup \mathcal{E}_D^{\partial K}, \\ -\epsilon \nabla u_f \cdot \mathbf{n}_F + \omega u_f &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_N^{\partial K}. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Os conjuntos $\mathcal{E}_0^{\partial K}$, $\mathcal{E}_N^{\partial K}$ e $\mathcal{E}_D^{\partial K}$ representam as faces de ∂K que estão no interior do domínio, em Γ_N e em Γ_D , respectivamente. Assim, a solução de (4.1) representada como $u = T\lambda + u_f$ satisfaz as condição de contorno de (4.27) sobre Γ_N .

Em (4.12) notamos que a condição de Dirichlet de (4.1) é imposta fracamente pela formulação híbrida (4.5). É interessante estudar numericamente qual é o impacto de impor fortemente a condição de Dirichlet. Para isto modificamos o espaço V usado em (4.5). Escolhemos $\bar{V} \subseteq V$ como

$$\bar{V} := \{v \in V : v|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad (4.33)$$

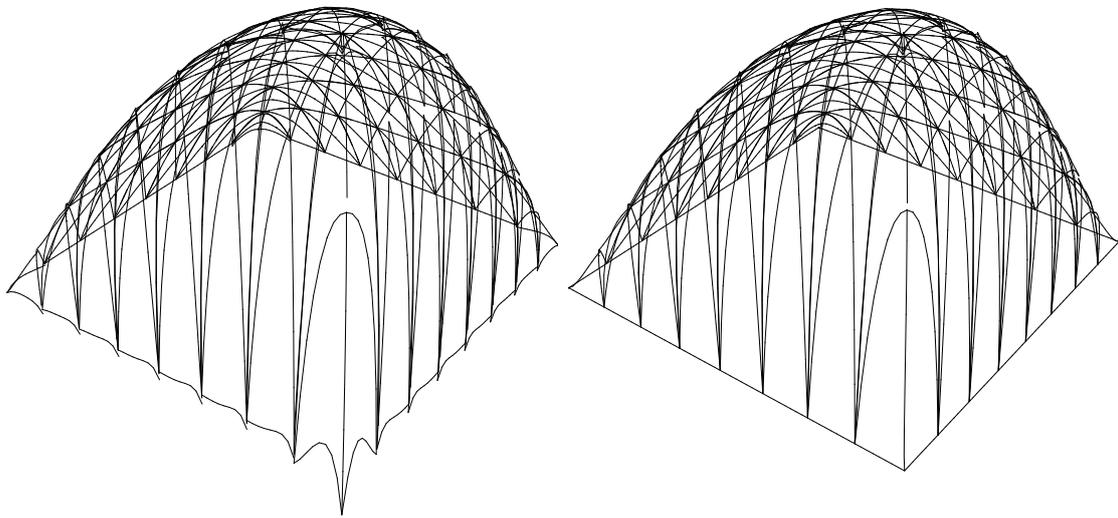


Figura 4.1: Comparação de resultados impondo a condição de Dirichlet fracamente (esquerda) e fortemente (direita).

e propomos a seguinte formulação híbrida:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Achar } (\lambda, u) \in \bar{\Lambda} \times \bar{V} \text{ tal que} \\ & \bar{a}(u, v) + (\lambda, v)_{\partial\mathcal{T}_h} = (f, v)_{\mathcal{T}_h}, \\ & (\mu, u)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \\ & \text{para todo } (\mu, v) \in \bar{\Lambda} \times \bar{V}, \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

da qual emergem os correspondente problemas locais, a saber:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}T\lambda &= 0, \quad \text{em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(T\lambda) \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K} &= \lambda, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_0^{\partial K}, \\ -\epsilon \nabla T\lambda \cdot \mathbf{n}_F + \omega T\lambda &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_N^{\partial K}, \\ T\lambda &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_D^{\partial K}, \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_f &= f, \quad \text{em } K, \\ \boldsymbol{\sigma}(u_f) \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K} &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_0^{\partial K}, \\ -\epsilon \nabla u_f \cdot \mathbf{n}_F + \omega u_f &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_N^{\partial K}, \\ u_f &= 0, \quad \text{em } F \in \mathcal{E}_D^{\partial K}. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Consideramos um problema com fronteira Dirichlet nula, $\epsilon = 10^{-1}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $\sigma = 0$ e $f = 1$. Na Figura 4.1 ilustramos soluções numéricas calculadas impondo a condição fracamente e fortemente, respectivamente. Vemos que a opção de se impor fortemente a condição de Dirichlet proporciona melhores resultados.

4.3 Método de elementos finitos multi-escalas

Nesta seção, propomos uma discretização do espaço Λ , e utilizamos o problema (4.17) para induzir um novo método de elementos finitos onde as funções de base são definidas pelos problemas locais (4.15).

4.3.1 Espaços de aproximação

Do problema global (4.17) observamos que precisamos apenas escolher um subespaço $\Lambda_h \subset \Lambda$ para que obtenhamos uma formulação completamente discreta

e desta forma o método MHM, é dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } \lambda_h \in \Lambda_h \text{ tal que} \\ (\mu_h, T\lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = -(\mu_h, u_f)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\ \text{para todo } \mu_h \in \Lambda_h. \end{array} \right\} \quad (4.37)$$

Logo a representação (4.18) tem uma versão discreta dada por

$$u_h = T\lambda_h + u_f, \quad (4.38)$$

onde, $T\lambda_h \in V$ representa a solução exata do problema (4.15) substituindo λ por λ_h , e $u_f \in V$ representa a solução exata do problema (4.16). Neste ponto temos total liberdade de escolha para o espaço Λ_h , assumindo que este tenha boas propriedades de aproximação. Estudamos agora como construir uma base para o espaço de dimensão finita Λ_h .

Seja $F \in \mathcal{E}$ e $l \in \mathbb{N}$. Considere o espaço de dimensão finita $\Lambda_F^{(l)} \subset L^2(F)$, e seja $B_F := \{\psi_F^{(1)}, \dots, \psi_F^{(l+1)}\} \subset \Lambda_F^{(l)}$ uma base para $\Lambda_F^{(l)}$. Definimos \mathcal{B}_F como um conjunto de funções com domínio em $\partial\mathcal{T}_h$ e suporte em F , da seguinte forma

$$\mathcal{B}_F := \{(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K})\psi_F : \psi_F \in B_F\} \subset \Lambda_h,$$

onde $K \in \mathcal{T}_h^F$. O conjunto linearmente independente $\mathcal{B} = \bigcup_{F \in \mathcal{E}} \mathcal{B}_F$ é uma base para Λ_h . Assim, dado $\mu_h \in \Lambda_h$ e $K \in \mathcal{T}_h$, para cada $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ existem constantes $c_F^{(1)}, \dots, c_F^{(l+1)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mu_h|_{\partial K} = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)}. \quad (4.39)$$

Note que a representação (4.39) depende da escolha do espaço $\Lambda_F^{(l)}$. Propomos neste trabalho as seguintes opções para $\Lambda_F^{(l+1)}$:

- (1) Polinômios de Lagrange: $\Lambda_F^{(l)} := \mathbb{P}^l(F)$. Ver Figura 4.2.
- (2) Polinômios por partes: Seja $r \in \mathbb{N}_0$ e $m \in \mathbb{N}$, defina $l = (r + 1)m - 1$.

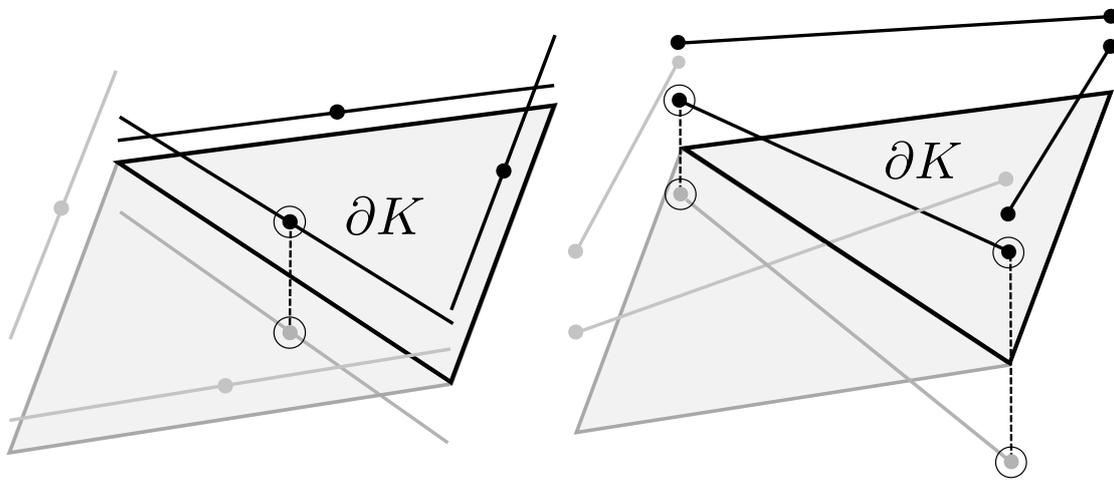


Figura 4.2: Ilustração de funções $\lambda_h \in \Lambda_h^{(l)}$, com $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$, à esquerda $l = 0$ e à direita $l = 1$. Os círculos representam graus de liberdade; duas circunferências unidas por uma linha pontilhada denota que os círculos contidos representam apenas um grau de liberdade.

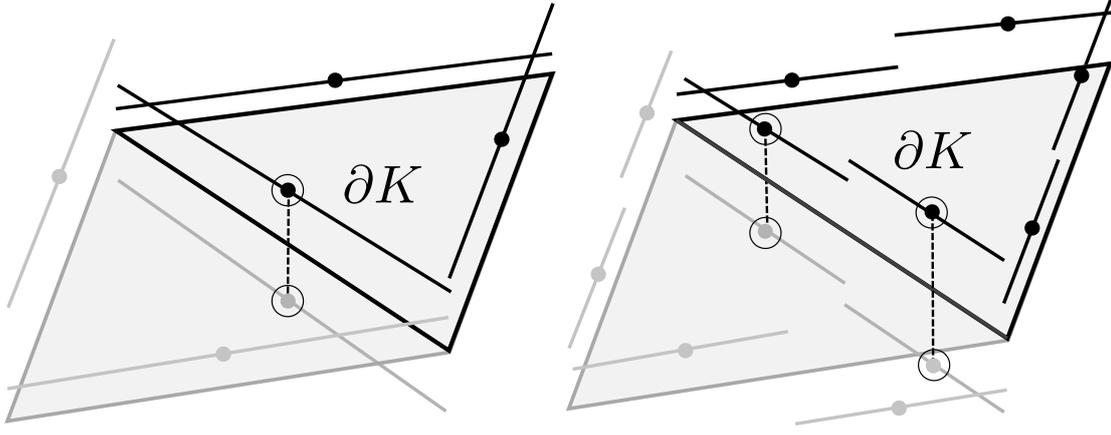


Figura 4.3: Ilustração de funções $\lambda_h \in \Lambda_h^{(0)} = \mathbb{D}^{(0,1)}(F)$, (esquerda) $m = 1$ e $\lambda_h \in \Lambda_h^{(1)} = \mathbb{D}^{(0,2)}(F)$ (direita). Os círculos representam graus de liberdade; duas circunferências unidas por uma linha pontilhada denota que os círculos contidos representam apenas um grau de liberdade.

Considere o conjunto de sub-faces $F_1, \dots, F_m \subseteq F$ tais que $F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $F_1 \cup \dots \cup F_m = F$ e defina, (ver Figura 4.3)

$$\mathbb{D}^{(r,m)}(F) = \{\mu_h \in L^2(H) : \mu_h|_{F_i} \in \mathbb{P}^r(F_i), i = 1, \dots, m\}. \quad (4.40)$$

- (3) Espaço enriquecido: $\Lambda_F^{(1)} = \rho(\mathbb{P}^1(F))$. Inspirado na teoria de enriquecimento de espaços apresentada em [31] para problemas de reação-difusão, definimos o espaço enriquecido

$$\rho(\mathbb{P}^1(F)) := \langle \{\rho(\phi_1), \rho(\phi_2)\} \rangle, \quad (4.41)$$

onde $\{\phi_1, \phi_2\}$ é a base canônica de \mathbb{P}^1 , e a aplicação $\rho : L^2(F) \rightarrow L^2(F)$ é definida por

$$\rho(\mu) := \alpha \frac{\cosh(\alpha\mu)}{\cosh(\alpha)}, \quad \text{com } \alpha := \sqrt{\frac{\sigma}{2\|\epsilon\|_\infty}}|F|. \quad (4.42)$$

Esta alternativa está limitada ao caso $|\alpha| = 0$.

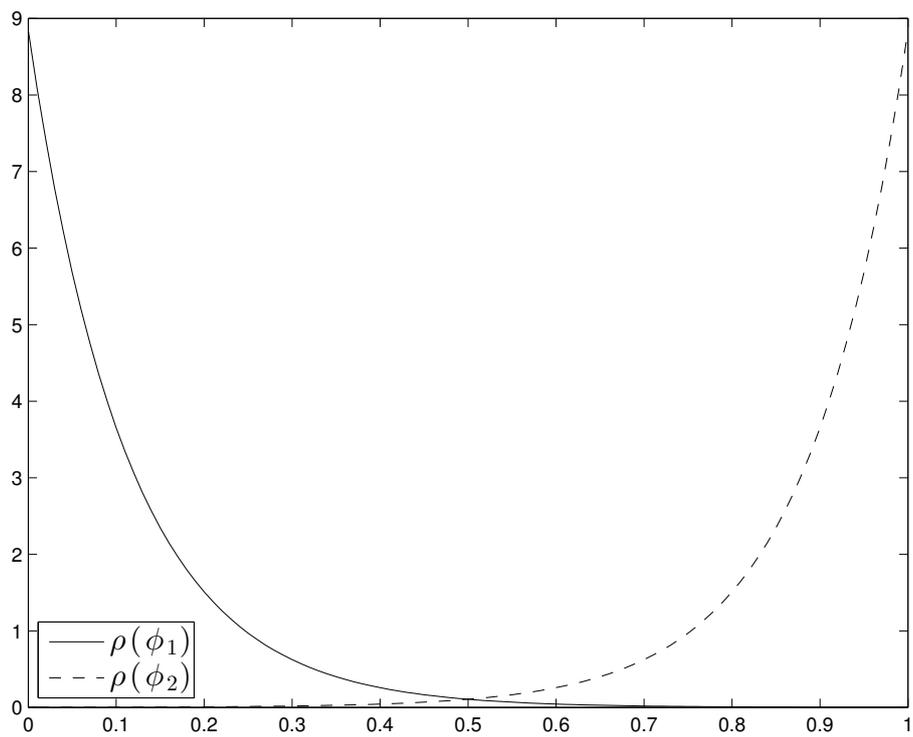


Figura 4.4: Funções de base enriquecidas $\rho(\phi_1), \rho(\phi_2) \in \Lambda_F^{(1)} = \rho(\mathbb{P}^1)$.

4.3.2 Funções de base multi-escalas

A partir da representação dada em (4.39) definimos uma base para representar $T\mu_h$ através de funções definidas localmente. Seja $\mu_h \in \Lambda_h$, dado $K \in \mathcal{T}_h$, temos

$$\begin{aligned} T\mu_h|_K &= T \left(\sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)} \right) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} T((\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)}). \end{aligned}$$

Assim, dado $K \in \mathcal{T}_h$ e $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$, definimos as *funções de base multi-escalas* $\eta_{F,K}^{(1)}, \dots, \eta_{F,K}^{(l+1)} \in V$, restritas a K , através de $\eta_{F,K}^{(i)} := T((\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)})|_K$, i.e., resolvendo os problemas locais:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Achar } \eta_{F,K}^{(i)} \in H^1(K) \text{ tal que} \\ &\quad \alpha_K(\eta_{F,K}^{(i)}, w) = -(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) (\psi_F^{(i)}, w)_F, \\ &\text{para todo } w \in H^1(K). \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Finalmente, $T\mu_h$ pode ser representado localmente em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ através da combinação linear

$$T\mu_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} \eta_{F,K}^{(i)}. \quad (4.44)$$

Nas Figuras 4.5-4.9 apresentamos exemplos de funções de base $\eta_{F,K}^{(i)}$ para o caso $\epsilon = \epsilon \mathcal{I}$, $\alpha = (a, 0)^T$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, onde \mathcal{I} denota o tensor identidade. Primeiramente, nas Figuras 4.5-4.7 mostramos exemplos de funções geradas pelo espaço $\Lambda_F^{(l)}$. Em seguida, nas Figuras 4.8 e 4.9 ilustramos a influência dos parâmetros ϵ , α e σ nas funções de base $\eta_{F,K}^{(i)}$. Podemos ver como o comportamento de *camada limite* é naturalmente capturado pelas funções de base.

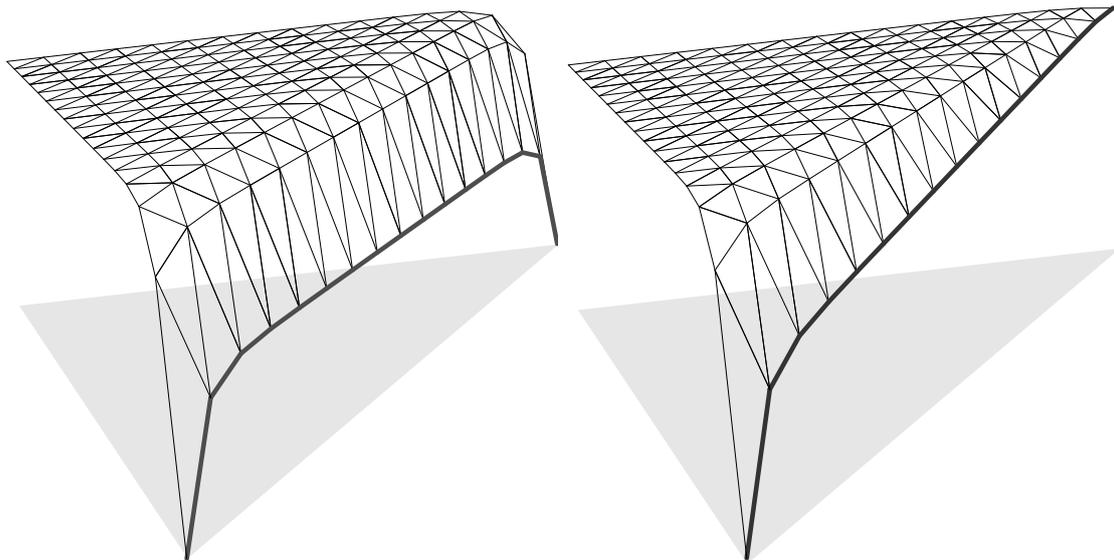


Figura 4.5: Funções de base representativas para $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$ (esquerda) e $\Lambda_F^{(1)} = \mathbb{P}^1(F)$ (direita). A face $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ de referência está representada com uma linha mais escura.

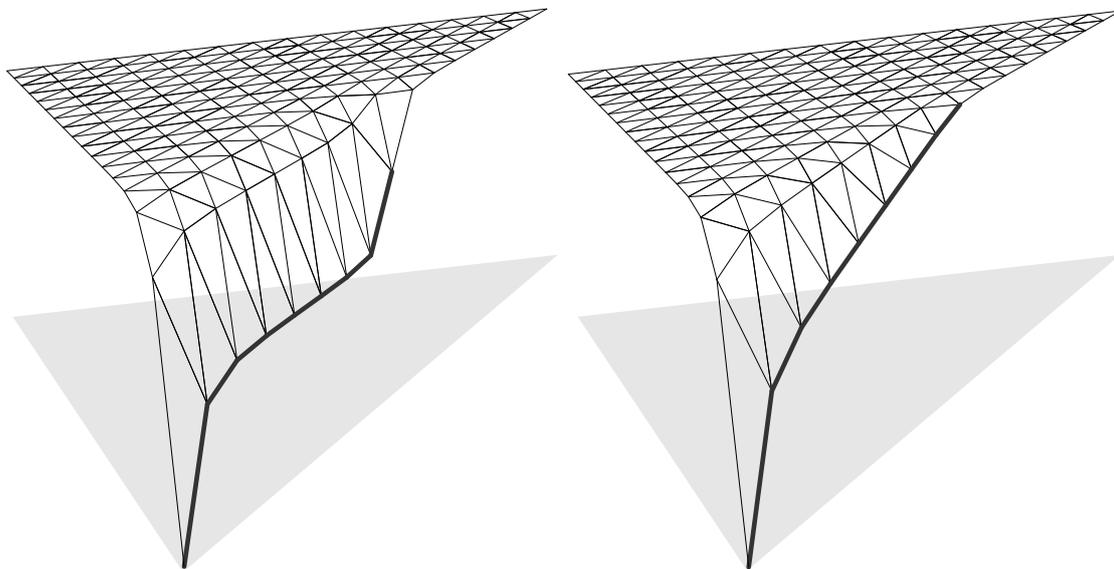


Figura 4.6: Funções de base representativas para $\Lambda_F^{(1)} = \mathbb{D}^{(0,2)}(F)$ (esquerda) e $\Lambda_F^{(3)} = \mathbb{D}^{(1,2)}(F)$ (direita). A sub-face $\hat{F} \in \hat{\mathcal{T}}_h(F)$ está representada com uma linha mais escura.

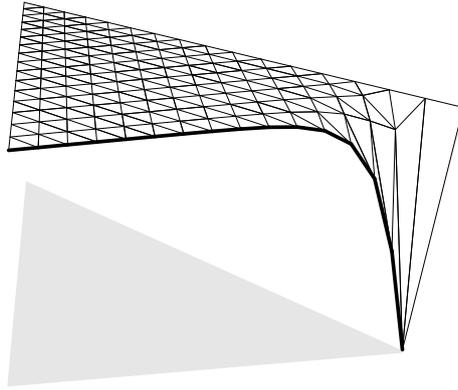


Figura 4.7: Função de base representativa para $\Lambda_F^{(1)} = \rho(\mathbb{P}^1(F))$. A face $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ de referência está representada com uma linha mais escura

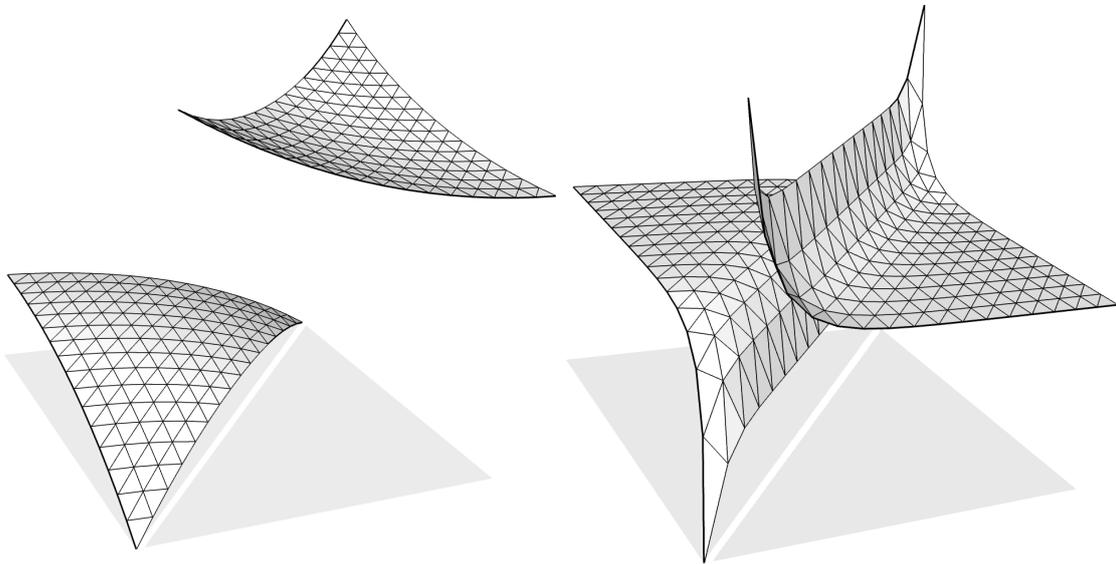


Figura 4.8: Funções de base para, o caso de difusão dominante, $\varepsilon = 1$, $a = 1$ e $\sigma = 1$ (esquerda) e reação dominante $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0$ e $\sigma = 1$ (direita). As funções são apresentadas sobre o seu suporte (2 elementos).

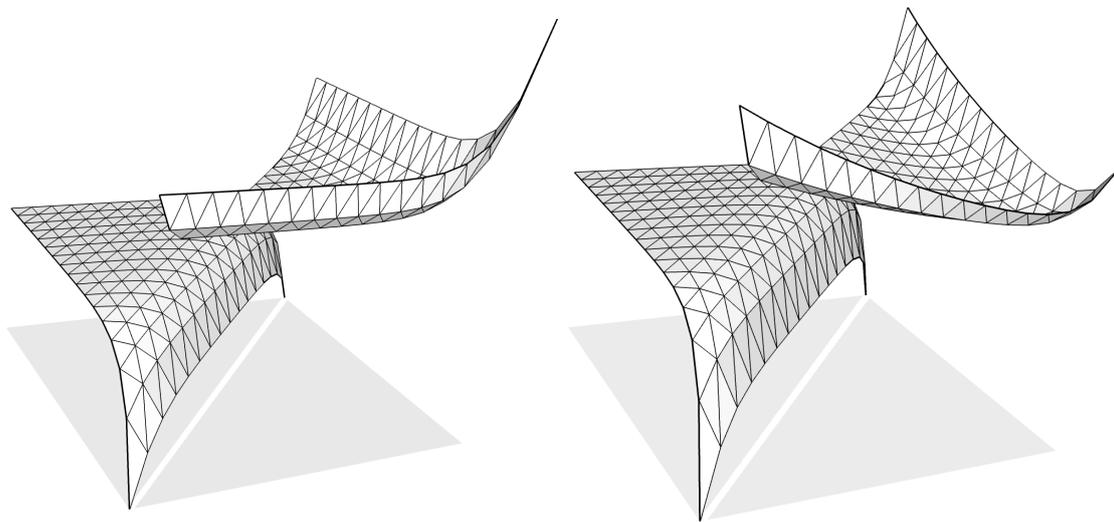


Figura 4.9: Funções de base para, o caso de advecção dominante, $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 1$ e $\sigma = 0$ (esquerda) e reação-advecção dominantes $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 0$ e $\sigma = 10$ (direita). As funções são apresentadas sobre o seu suporte (2 elementos).

4.3.3 Sumário do MHM

O método de elementos finitos MHM (*Multiscale Hybrid-Mixed*) desenvolvido a partir da formulação variacional (4.5) fornece uma solução aproximada $u_h \approx u$ dada em (4.38), que é completamente determinada pelo problema global discreto (4.37), as funções de base multi-escalas (4.49) e os problemas locais (4.16). Com o intuito de melhorar a apresentação didática do método já construído, propomos um sumário do método.

Como mencionado, o método MHM fornece uma solução aproximada $u_h \approx u$ que pode ser decomposta como $u_h = T\lambda_h + u_f$, em termos de problemas locais e globais. Existem duas coleções diferentes de problemas locais:

(1) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } u_f|_K \in H^1(K) \text{ tal que} \\ a_K(u_f, w)_K = (f, w)_K, \\ \text{para todo } w \in H^1(K). \end{array} \right\} \quad (4.45)$$

(2) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$, $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ e $i \in \{1, \dots, l+1\}$ resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } \eta_{F,K}^{(i)} \in H^1(K) \text{ tal que} \\ a_K(\eta_{F,K}^{(i)}, w)_K = -(\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K})(\psi_F^{(i)}, w)_F, \\ \text{para todo } w \in H^1(K). \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

Usando as funções de base (4.46) e os problemas locais (4.45) o método MHM torna-se:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } \lambda_h \in \Lambda_h \text{ tal que} \\ (\mu_h, T\lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = -(\mu_h, u_f)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\ \text{para todo } \mu_h \in \Lambda_h. \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Assim os termos que compõem a solução $u_h = T\lambda_h + u_f$, são descritas como:

(1) *Influência do fluxo*: $T\lambda_h \in V$, é a combinação linear de funções de base multi-escalas, e os seus graus de liberdade são determinados no problema

global (4.47) e coincidem com os graus de liberdade da interpolação para o fluxo nos contornos $\partial K \in \partial\mathcal{T}_h$, representado por $\lambda_h \in \Lambda_h$. Isto pode ser expressado formalmente em cada $K \in \mathcal{T}_h$ por:

$$\left[\lambda_h^{\partial K} = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} (\mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F^{\partial K}) \psi_F^{(i)} \right] \Rightarrow \left[T\lambda_h|_K = \sum_{F \in \mathcal{E}^{\partial K}} \sum_{i=1}^{l+1} c_F^{(i)} \eta_{F,K}^{(i)} \right],$$

onde para cada $F \subset \mathcal{E}$ as constantes $c_F^{(1)}, \dots, c_F^{(l+1)} \in \mathbb{R}$ são determinadas pelo problema global (4.47). As funções $\psi_F^{(1)}, \dots, \psi_F^{(l+1)}$ dependem da escolha de $\Lambda_F^{(l)}$ (ver sub-seção 4.3.1) e as funções de base $\eta_{F,K}^{(1)}, \dots, \eta_{F,K}^{(l+1)}$ resolvem os problemas locais (4.46) capturando os aspectos multi-escalas do problema.

- (2) *Influência da fonte:* $u_f \in V$ é uma função determinada pelo problema local (4.45). A componente u_f contém características multi-escalas dos coeficientes do problema e a influência do termo de fonte $f \in L^2(\Omega)$ na solução.

4.3.4 Indicador de erro e adaptividade

A estrutura baseada em faces aqui proposta induz a definição de um estimador de erro *a-posteriori* equivalente ao proposto no capítulo 3 para a equação de Darcy. Neste capítulo desenvolvemos um estimador para a equação de reação-advecção-difusão, que será validado na seção seguinte. Além disso, usamos o estimador para derivar um algoritmo adaptativo para definir o espaço $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r,m)}(F)$ em função de m (ver definição (4.40)) em cada face $F \in \mathcal{E}$. Isto induz a uma nova estratégia de adaptatividade de espaço sem que a topologia da malha, se altere. Esta nova estratégia possui um apelo prático claro, uma vez que não demanda geradores de malhas adaptativos externos. De fato, a adaptividade via redefinição de espaços é feita no interior do próprio código, evitando a preocupação usual com a deterioração da qualidade dos elementos quando do uso de geradores de malhas adaptativos. Lembramos que o estimador *a-posteriori* considera uma função de

resíduos R_F para cada face, definida por

$$R_F := \begin{cases} -\frac{1}{2} \llbracket u_h \rrbracket, & F \in \mathcal{E}^0, \\ -u_h \mathbf{n}_F, & F \in \mathcal{E}^D. \end{cases} \quad (4.48)$$

Assim, sejam $F_1, \dots, F_m \subseteq F$ e $F \in \mathcal{E}$. Defina

$$\eta_{F_i} = \frac{C_\eta}{\sqrt{h_F}} \|R_F\|_{0, F_i}, \quad \eta_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \eta_{F_i}^2}, \quad \eta = \sqrt{\sum_{F \in \mathcal{E}} \eta_F^2}, \quad (4.49)$$

e a constante

$$M = \max\{\eta_{\hat{F}} : \hat{F} \in \hat{\mathcal{T}}_h(F), F \in \mathcal{E}\}. \quad (4.50)$$

A constante $C_\eta > 0$ é dada por

$$C_\eta := \max\{\sqrt{c_{\max}}, d_\Omega \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty, d_\Omega^2 \|\bar{\sigma}\|_\infty\}. \quad (4.51)$$

A adaptação de espaço constrói de forma independente $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r, m_F)}$, considerando m_F definido em cada face $F \in \mathcal{E}$. Seja $\theta \in]0, 1[$ (usualmente $\theta = \frac{1}{2}$ ou $\theta = \frac{3}{4}$), e $l \in \mathbb{N}_0$ fixo. Considerando a escolha de espaços $\Lambda_F = \mathbb{D}^{(r, m_F)}$, com $m_F = 1$ para cada $F \in \mathcal{E}$ inicialmente, o algoritmo de adaptação é o seguinte:

Algoritmo 1: Adaptação de espaço

```

1 Entrada:  $\Lambda_h, \text{tol}$ 
2 Calcular  $u_h, \eta, M$ 
3 enquanto  $\eta > \text{tol}$  faça
4   para  $F \in \mathcal{E}$  faça
5      $M_F = m_F$ 
6     para  $i = 1, \dots, m_F$  faça
7       se  $\eta_{F_i} > \theta M$  então
8          $M_F = M_F + 2^{d-1} - 1$ 
9       fim
10    fim
11     $m_F = M_F$ 
12  fim
13  Calcular  $u_h, \eta, M$ 
14 fim
15 Saída:  $\Lambda_h, u_h$ .

```

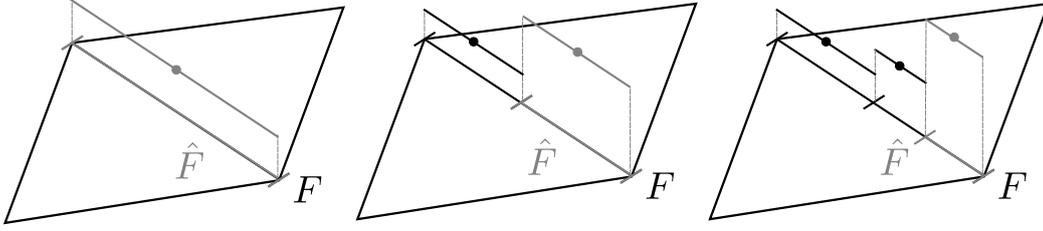


Figura 4.10: Processo de adaptação de espaço para $\mathbb{D}^{0,m_F}(F)$ (caso $d = 2$), para (da esquerda para a direita) $m_F = 1$, $m_F = 2$ e $m_F = 3$.

O algoritmo 1 é ilustrado sobre uma face $F \in \mathcal{E}$ (caso $d = 2$) na Figura 4.10. Note que não existe alteração na malha \mathcal{T}_h , e o processo atua “apenas” sobre o espaço de aproximação $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r,m_F)}(F)$ relativo a cada face.

4.4 Análise numérica

Esta seção é dedicada à análise numérica do método MHM (4.37). As normas usadas estão definidas na seção 3.3 do capítulo 3. Defina a função $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \sigma$, nesta seção assumimos a condição $\bar{\sigma} \geq \sigma_{\min} > 0$.

4.4.1 Existência e unicidade de solução

Primeiramente mostramos que o problemas locais (4.15) e (4.16) são bem postos. O seguinte lema mostra que a forma bilinear associada aos problemas locais (4.15) e (4.16) é contínua e coerciva.

Lema 4.1 Seja $K \in \mathcal{T}_h$. Considere a forma bilinear local $a_K(\cdot, \cdot)$ em (4.13). As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) Existe $c_1 > 0$, independente de h , tal que

$$a_K(u, v) \leq c_1 \left[\frac{1}{d_\Omega^2} \|u\|_{0,K}^2 + \|\nabla u\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{d_\Omega^2} \|v\|_{0,K}^2 + \|\nabla v\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

para todo $u, v \in H^1(K)$;

(2) Existe $c_2 > 0$, independente de h , tal que

$$a_K(v, v) \geq c_2 \left[\frac{1}{d_\Omega^2} \|v\|_{0,K}^2 + \|\nabla v\|_{0,K}^2 \right],$$

para todo $v \in H^1(K)$.

Logo, os problemas locais (4.15) e (4.16) são bem postos.

Demonstração: Seja $K \in \mathcal{T}_h$ e $u, v \in H^1(K)$. Usando a estimativa dada pelo Lema A.1 e a propriedade $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ para $a, b \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\begin{aligned} a_K(u, v) &\leq \sqrt{c_{\max}} \|\nabla u\|_{0,K} \|\nabla v\|_{0,K} + \|\bar{\sigma}\|_\infty \|u\|_{0,K} \|v\|_{0,K} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\alpha\|_\infty (\|\nabla u\|_{0,K} \|v\|_{0,K} + \|u\|_{0,K} \|\nabla v\|_{0,K}) \\ &\leq c_1 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d_\Omega} \|u\|_{0,K} + \|\nabla u\|_{0,K} \right] \left[\frac{1}{d_\Omega} \|v\|_{0,K} + \|\nabla v\|_{0,K} \right] \\ &\leq c_1 \left[\frac{1}{d_\Omega^2} \|u\|_{0,K}^2 + \|\nabla u\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{d_\Omega^2} \|v\|_{0,K}^2 + \|\nabla v\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

onde $c_1 = 2(\sqrt{c_{\max}} + d_\Omega \|\alpha\|_\infty + d_\Omega^2 \|\bar{\sigma}\|_\infty)$, e o resultado do item (1) segue. Para provar a estimativa do item (2) usamos novamente a estimativa do Lema A.1

$$\begin{aligned} a_K(v, v) &= (\epsilon \nabla v, \nabla v)_K + (\bar{\sigma} v, v)_K \\ &\geq \sqrt{c_{\min}} \|\nabla v\|_{0,K}^2 + \sigma_{\min} \|v\|_{0,K}^2 \\ &\geq c_2 \left[\frac{1}{d_\Omega^2} \|v\|_{0,K}^2 + \|\nabla v\|_{0,K}^2 \right], \end{aligned}$$

onde, $c_2 = \min\{\sqrt{c_{\min}}, d_\Omega^2 \sigma_{\min}\}$. Finalmente, usando as condições (1) e (2) com o Lema A.7, os problemas locais são bem postos. ■

Para mostrar que o problema global (4.17) é bem posto, precisamos de alguns resultados técnicos fornecidos pelo seguinte lema.

Lema 4.2 Seja o operador linear $T : \Lambda \rightarrow V$ definido em (4.15). Então, as seguintes estimativas ocorrem:

$$(1) \quad -(T\mu, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \geq c_2 \|T\mu\|_V^2,$$

$$(2) \quad -(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \leq \|\mu\|_{\Lambda} \|T\lambda\|_V,$$

$$(3) \quad c_2 \|T\mu\|_V \leq \|\mu\|_{\Lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \|T\mu\|_V,$$

para todo $\mu, \lambda \in \Lambda$, onde $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ são as constantes dadas pelo Lema 4.1.

Demonstração: Sejam $\mu, \lambda \in \Lambda$. Considere a equivalência (4.23) e o item (2) do Lema 4.1, logo temos

$$\begin{aligned} -(T\mu, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_K(T\mu, T\mu) \\ &\geq c_2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{d_{\Omega}^2} \|T\mu\|_{0,K}^2 + \|\nabla T\mu\|_{0,K}^2 \\ &\geq c_2 \|T\mu\|_V^2, \end{aligned}$$

e o resultado do item (1) segue. O item (2) é resultado direto do Lema 3.1 que garante a estimativa $\sup_{v \in V} \frac{(v, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}}{\|v\|_V} \leq \|\mu\|_{\Lambda}$. De fato temos,

$$-(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = -\frac{(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}}{\|T\lambda\|_V} \|T\lambda\|_V \leq \sup_{v \in V} \frac{(v, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}}{\|v\|_V} \|T\lambda\|_V \leq \|\mu\|_{\Lambda} \|T\lambda\|_V. \quad (4.52)$$

Logo, do item (2) temos $-(T\mu, \mu) \leq \|\mu\|_{\Lambda} \|T\mu\|_V$, e usando o item (1) obtemos $c_2 \|T\mu\|_V^2 \leq \|\mu\|_{\Lambda} \|T\mu\|_V$, e a estimativa inferior do item (3) segue. A estimativa superior do item (3) é resultado da definição da norma $\|\cdot\|_{\Lambda}$ e do problema local (4.19), como segue:

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{\Lambda}^2 &\leq \left\| -\epsilon \nabla T\mu + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} T\mu \right\|_{\text{div}}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\| -\epsilon \nabla T\mu + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} T\mu \right\|_{0,K}^2 + d_{\Omega}^2 \|\nabla \cdot (-\epsilon \nabla T\mu + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} T\mu)\|_{0,K}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\| -\epsilon \nabla T\mu + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} T\mu \right\|_{0,K}^2 + d_{\Omega}^2 \left\| \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla T\mu + \bar{\sigma} T\mu \right\|_{0,K}^2 \\ &\leq (2c_{\min} + d_{\Omega}^2 \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^2 + 2d_{\Omega}^4 \|\bar{\sigma}\|_{\infty}^2) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla T\mu\|_{0,K}^2 + \frac{1}{d_{\Omega}^2} \|T\mu\|_{0,K}^2) \\ &\leq \frac{c_1^2}{2} \|T\mu\|_V^2. \end{aligned}$$

■

A seguir, como um corolário do Lema 4.2, mostramos a existência e unicidade de solução para o problema global (4.17).

Corolário 4.3 Considere o problema global (4.17). As seguintes afirmações são verdadeiras:

$$(1) \quad -(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \leq \frac{1}{c_2} \|\lambda\|_{\Lambda} \|\mu\|_{\Lambda}, \text{ para todo } \lambda, \mu \in \Lambda;$$

$$(2) \quad -(T\mu, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \geq \sqrt{2} \frac{c_2}{c_1} \|\mu\|_{\Lambda}^2, \text{ para todo } \mu \in \Lambda;$$

onde $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ são as constantes dadas pelo Lema 4.1. Logo, o problema global (4.17) é bem posto.

Demonstração: Os itens (1) e (2) seguem usando os resultados do Lema 4.2, aplicando os itens (3) em (2), e (3) em (1) respectivamente. O problema global (4.17) é bem posto usando-se as condições (1) e (2) junto com o Lema A.7. ■

4.4.2 Melhor aproximação

Considere $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (4.17) e (4.37), respectivamente. Do problema (4.17), temos a seguinte propriedade de consistência:

$$(T\lambda - T\lambda_h, \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \forall \mu_h \in \Lambda_h. \quad (4.53)$$

Esta propriedade será fundamental na demonstração do seguinte lema.

Lema 4.4 Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (4.17) e (4.37), respectivamente, e sejam $u = T\lambda + u_f$ e $u_h = T\lambda_h + u_f$. A seguinte estimativa ocorre

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{c_2} \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda},$$

onde $c_2 > 0$ é a constante dada pelo Lema 4.1.

Demonstração: Usando o item (1) do Lema 4.2, a consistência (4.53), e o item (2) do Lema 4.2, temos

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_V^2 &= \|T\lambda - T\lambda_h\|_V^2 \\
&\leq -\frac{1}{c_2}(T\lambda - T\lambda_h, \lambda - \lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\leq -\frac{1}{c_2}(T\lambda - T\lambda_h, \lambda - \mu_h)_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\leq \frac{1}{c_2}\|T\lambda - T\lambda_h\|_V\|\lambda - \mu_h\|_\Lambda \\
&= \frac{1}{c_2}\|u - u_h\|_V\|\lambda - \mu_h\|_\Lambda
\end{aligned}$$

para todo $\mu_h \in \Lambda_h$, e o resultado segue. \blacksquare

A seguir mostraremos uma estimativa de erro na norma $L^2(\Omega)$ através de argumentos de dualidade, assumindo que o problema (4.5) possui *propriedades suavizantes* (ver definição em [27], página 119). Defina $e = u - u_h$ o erro entre as soluções (4.17) e (4.37). A transformação $T^* : \Lambda \rightarrow V$ é tal que, dado $\lambda \in \Lambda$, associamos $T^*\lambda$ à solução do problema:

$$\left. \begin{aligned}
&\text{Achar } T^*\lambda|_K \in H^1(K) \text{ tal que} \\
&\quad a_K(w, T^*\lambda) = -(\lambda, w)_{\partial K}, \\
&\text{para todo } w \in H^1(K).
\end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Similarmente definimos $u_e \in V$ como a solução do problema:

$$\left. \begin{aligned}
&\text{Achar } u_e|_K \in H^1(K) \text{ tal que} \\
&\quad a_K(w, u_e) = (e, w)_K, \\
&\text{para todo } w \in H^1(K).
\end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

Em seguida, definimos o problema global adjunto por:

$$\left. \begin{aligned}
&\text{Achar } \nu \in \Lambda \text{ tal que} \\
&\quad (\mu, T^*\nu)_{\partial\mathcal{T}_h} = -(\mu, u_e)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\
&\text{para todo } \mu \in \Lambda.
\end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Da definição dos problemas locais (4.15) e (4.54) é imediato que $(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = -a(T\lambda, T^*\mu) = (\lambda, T^*\mu)_{\partial\mathcal{T}_h}$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$, e de (4.15) e (4.55) temos $(e, T\lambda)_{\mathcal{T}_h} = a(T\lambda, u_e) = -(\lambda, u_e)_{\partial\mathcal{T}_h}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Observe que o Lema 4.2 vale também para T^* . A demonstração segue de substituir T por T^* em todos os passos e utilizar as seguintes equivalências advindas da integração por partes do problema local (4.54):

- $\mu = -\epsilon \nabla T^* \mu \cdot \mathbf{n}^{\partial K} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}) T^* \mu$ em ∂K , para cada $K \in \mathcal{T}_h$;
- $\mathcal{L}^* T^* \mu = 0$, em cada $K \in \mathcal{T}_h$, onde \mathcal{L}^* é o operador adjunto de \mathcal{L} .

Os problemas (4.54) e (4.55) são bem postos pelo Lema 4.1. Similarmente, observando que $(T\lambda, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = (\lambda, T^*\mu)_{\partial\mathcal{T}_h}$ para todo $\mu, \lambda \in \Lambda$, a existência e unicidade de solução para o problema (4.56) segue do Corolário 4.2. Assim, os problemas locais (4.54) e (4.55) e o problema global (4.56), fornecem uma forma de caracterizar a solução exata do problema adjunto de (4.1) com o termo de fonte $f = e$. Tal caracterização é dada por

$$w = T^* \nu + u_e. \quad (4.57)$$

Lema 4.5 Suponha $\Lambda_h^{(0)} \subseteq \Lambda_h \subset \Lambda$. Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (4.17) e (4.37), respectivamente, e sejam $u = T\lambda + u_f$ e $u_h = T\lambda_h + u_f$. Assumindo que o problema (4.5) possui *propriedades suavizantes*, a seguinte estimativa ocorre

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{c_1}{c_2} Ch \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda},$$

onde $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ são as constantes dadas pelo Lema 4.1, e a constante $C > 0$ é independente de h .

Demonstração: Considere o seguinte problema em dimensão finita

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } \nu_0 \in \Lambda_h^{(0)} \text{ tal que} \\ (\mu_0, T^* \nu_0)_{\partial\mathcal{T}_h} = -(\mu_0, u_e)_{\partial\mathcal{T}_h}, \\ \text{para todo } \mu_0 \in \Lambda_h^{(0)}, \end{array} \right\} \quad (4.58)$$

e defina $w_h = T^*\nu_0 + u_e$. Assumindo regularidade suficiente para w o Lema 4.8 fornece a seguinte estimativa de interpolação

$$\inf_{\mu_0 \in \Lambda_h^{(0)}} \|\nu - \mu_0\|_{\Lambda} \leq Ch\|w\|_{2,\Omega}, \quad (4.59)$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de h . As hipóteses de regularidade assumidas implicam que existe $C > 0$, independente de h , tal que $\|w\|_{2,\Omega} \leq C\|e\|_{0,\Omega}$.

Logo,

$$\|T^*\nu - T^*\nu_0\|_V \leq \frac{1}{c_2}\|\nu - \nu_0\|_{\Lambda} \leq \frac{C}{c_2}h\|w\|_{2,\Omega} \leq \frac{C}{c_2}h\|e\|_{0,\Omega}. \quad (4.60)$$

Observe que a propriedade de consistência (4.53), pode ser reescrita como

$$(\lambda - \lambda_h, T^*\mu_0)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \forall \mu_0 \in \Lambda_h^{(0)}. \quad (4.61)$$

Agora usando os problema locais (4.55) e (4.15), o problema global (4.56), a propriedade de consistência (4.61), o problema local (4.15) novamente, a estimativa do item (1) no Lema 4.1 e a estimativa mostrada em (4.60), temos

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\Omega}^2 &= (e, T\lambda - T\lambda_h)_{\mathcal{T}_h} \\ &= a(T\lambda - T\lambda_h, u_e) \\ &= -(\lambda - \lambda_h, u_e)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= (\lambda - \lambda_h, T^*\nu)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= (\lambda - \lambda_h, T^*\nu - T^*\nu_0)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= -a(T\lambda - T\lambda_h, T^*\nu - T^*\nu_0) \\ &\leq c_1\|T\lambda - T\lambda_h\|_V\|T^*\nu - T^*\nu_0\|_V \\ &\leq \frac{c_1}{c_2}Ch\|T\lambda - T\lambda_h\|_V\|e\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

Finalmente, temos que $\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{c_1}{c_2}Ch\|u - u_h\|_V$ e o resultado segue da estimativa dada no Lema 4.4. ■

O resultado seguinte aponta à propriedade conservativa local da solução do MHM.

Lema 4.6 Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (4.17) e (4.37), respectivamente, e sejam $u = T\lambda + u_f$, $u_h = T\lambda_h + u_f$ e $\boldsymbol{\sigma} = -\epsilon\nabla u + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}u$, $\boldsymbol{\sigma}_h = -\epsilon\nabla u_h + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}u_h \in H(\text{div}, \Omega)$. As seguintes identidades ocorrem:

$$(1) \quad \mathcal{L}(u - u_h) = 0, \text{ em cada } K \in \mathcal{T}_h,$$

$$(2) \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}(\nabla u - \nabla u_h) + \bar{\sigma}(u - u_h), \text{ em cada } K \in \mathcal{T}_h.$$

Demonstração: O item (1) segue do problema (4.1) e dos problemas locais (4.19) e (4.20). O item (2) é imediato do item (1). \blacksquare

Corolário 4.7 Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (4.17) e (4.37), respectivamente, sejam $u = T\lambda + u_f$, $u_h = T\lambda_h + u_f$, $\boldsymbol{\sigma} = -\epsilon\nabla u + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}u$, $\boldsymbol{\sigma}_h = -\epsilon\nabla u_h + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}u_h \in H(\text{div}, \Omega)$. A seguinte estimativa ocorre:

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\text{div}} \leq C \inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda}.$$

Demonstração: Tome $K \in \mathcal{T}_h$, logo usando $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ para $a, b \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,K}^2 &= \frac{1}{4} \| -2\epsilon(\nabla u - \nabla u_h) + \boldsymbol{\alpha}(u - u_h) \|_{0,K}^2 \\ &\leq 2c_{\max} \|\nabla u - \nabla u_h\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^2 \|u - u_h\|_{0,K}^2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

agora usando novamente $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ para $a, b \in \mathbb{R}^+$ e o item (2) do Lema 4.6, temos

$$\|\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,K}^2 = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^2 \|\nabla u - \nabla u_h\|_{0,K}^2 + \|\bar{\sigma}\|_{\infty}^2 \|u - u_h\|_{0,K}^2 \quad (4.63)$$

Das estimativas (4.62) e (4.63) temos que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\text{div}}^2 \leq \bar{C} \|u - u_h\|_V^2, \quad (4.64)$$

onde \bar{C} é dado pela expressão:

$$\bar{C} = 2c_{\max} + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^2 d_{\Omega}^2 + \|\bar{\sigma}\|_{\infty}^2 d_{\Omega}^4. \quad (4.65)$$

Finalmente, usando o Lema 4.4 segue o resultado com a constante C dada por $C = c_2 \sqrt{\bar{C}}$, onde c_2 é uma constante dada pelo Lema 4.1. \blacksquare

4.4.3 Estimativas de erro *a-priori*

Nesta seção apresentamos através de um exemplo as possíveis taxas de convergência que o método MHM pode proporcionar. Portanto, adaptamos as estimativas de erro *a-priori* apresentadas no Capítulo 3 baseadas na estimativa dada em [61], esta garante que, para $w \in H^{k+1}(\Omega)$, existe uma constante $C > 0$ independente de h tal que

$$\inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} \leq Ch^k |w|_{k+1, \Omega}, \quad (4.66)$$

onde $\lambda|_{\partial K} = -\mathcal{K} \nabla w|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$, onde \mathcal{K} é um tensor simétrico uniformemente elíptico e Λ_h é gerado por $\Lambda_F^{(k)} = \mathbb{P}^k(F)$. No seguinte lema estendemos este resultado ao caso advectivo, assumindo $\epsilon = \varepsilon \mathcal{I}$ com $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$. Neste exemplo, apesar de importante, não nos preocupamos com a dependência das constantes com relação aos parâmetros físicos. Este estudo deverá ser tema de trabalhos futuros.

Lema 4.8 Seja $w \in H^{k+1}(\Omega)$. Existe $C > 0$, independente de h , tal que

$$\inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_{\Lambda} \leq Ch^k \|w\|_{k+1, \Omega}, \quad (4.67)$$

onde $\lambda|_{\partial K} = -\epsilon \nabla w|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}^{\partial K})w|_{\partial K}$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$.

Demonstração: Seja $v_e(\mathbf{x}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}{2\epsilon}} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Dado $w \in H^{k+1}(\Omega)$, defina $\tilde{w} = v_e w \in H^{k+1}(\Omega)$. De (4.66), existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\inf_{\mu_h \in \Lambda_h} \|\lambda - \mu_h\|_\Lambda \leq \tilde{C} h^k |\tilde{w}|_{k+1, \Omega}, \quad (4.68)$$

onde $\lambda|_{\partial K} = -\mathcal{K} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n}^{\partial K}$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$. Note que $\epsilon \nabla v_e + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} v_e = 0$, logo escolhendo $\mathcal{K} = v_e^{-1} \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} -\mathcal{K} \nabla \tilde{w} &= -v_e^{-1} \epsilon \nabla (v_e w) \\ &= -v_e^{-1} \epsilon (v_e \nabla w + w \nabla v_e) \\ &= -\epsilon \nabla w - v_e^{-1} w (\epsilon \nabla v_e) \\ &= -\epsilon \nabla w + v_e^{-1} w \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} v_e \right) \\ &= -\epsilon \nabla w + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} w \end{aligned}$$

Assim, $\lambda|_{\partial K} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = -\mathcal{K} \nabla \tilde{w} \cdot \mathbf{n}^{\partial K} = -\epsilon \nabla w \cdot \mathbf{n}^{\partial K} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}^{\partial K})w$, para todo $K \in \mathcal{T}_h$.

Finalmente, defina $C := \tilde{C} \|v_e\|_\infty$, logo

$$\tilde{C} \|\tilde{w}\|_{k+1, \Omega} = \tilde{C} \|v_e w\|_{k+1, \Omega} \leq \tilde{C} \|v_e\|_\infty \|w\|_{k+1, \Omega} = C \|w\|_{k+1, \Omega}. \quad (4.69)$$

Usando (4.69) em (4.68) o resultado segue. ■

Estamos prontos para apresentar as taxas de convergência do método MHM no caso da interpolação proposta nesta seção.

Teorema 4.9 Suponha $\Lambda_h^{(0)} \subseteq \Lambda_h \subset \Lambda$. Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (4.17) e (4.37), respectivamente, e sejam $u = T\lambda + u_f$, $u_h = T\lambda_h + u_f$, $\boldsymbol{\sigma} = -\epsilon \nabla u + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} u$, $\boldsymbol{\sigma}_h = -\epsilon \nabla u_h + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} u_h \in H(\text{div}, \Omega)$. Assuma $u \in H^{k+1}(\Omega)$ e que o problema (4.5) possui propriedades suavizantes. Existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, independentes de h , tal que as seguintes estimativas ocorrem:

$$(1) \|u - u_h\|_{0, \Omega} + h \|u - u_h\|_V \leq C_1 h^{k+1} |u|_{\Omega, k+1},$$

$$(2) \quad \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\text{div}} \leq C_2 h^k |u|_{\Omega, k+1}.$$

Demonstração: Os itens (1) e (2) seguem do Lema 4.8, Lema 4.4, Lema 4.5 e Corolário 4.7, respectivamente. ■

4.4.4 Estimativas de erro *a-posteriori*

Considere a função resíduo R_F em (4.48) e o estimador de erro *a-posteriori* η , definido em (4.49). Note que Lema 3.18 vale também para o estimador de erro *a-posteriori* (4.49). Em seguida apresentamos uma versão do Lema 3.18 com uma modificação na constante devido à definição do estimador (4.49). As demonstrações aqui apresentadas são análogas às versões enunciadas no capítulo 3.

Lema 4.10 Seja $\lambda_h \in \Lambda$ a solução de (4.37), $u_h = T\lambda_h + u_f$. Existe $\chi_h \in V$ tal que satisfaz

$$(\chi_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} = -(u_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} + (g, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h}, \quad \forall \mu \in \Lambda \quad (4.70)$$

e a seguinte estimativa

$$\|\chi_h\|_V \leq \frac{C}{C_\eta} \eta \quad (4.71)$$

onde a constante $C > 0$ é independente de h .

Demonstração: Ver demonstração do Lema 3.18, considerando o estimador de erro *a-posteriori* (4.49). ■

Usamos o resultado auxiliar anterior para provar a seguintes estimativa para a norma do erro entre a solução de (4.37) e de (4.17).

Teorema 4.11 Sejam $\lambda \in \Lambda$ e $\lambda_h \in \Lambda_h$ as soluções de (3.10) e (3.13), respectivamente. Defina $u = T\lambda + u_f$ e $u_h = T\lambda_h + u_f$. Seja η definido em (4.49). As seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) Existe $C > 0$, independente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{c_2} \eta;$$

(2) Existe $c_F > 0$, independente de h , tal que

$$\eta_F \leq c_F \|u - u_h\|_{V,F}.$$

Demonstração: Seja $\mu \in \Lambda$. No Lema 3.2 consideremos o caso em que $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \nabla T\mu$, onde $T\mu$ representa a solução do problema (3.4) com $\mathcal{K} = \mathcal{I}$. Assim $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}} \leq \sqrt{2}\|\mu\|_{\Lambda}$. Logo, usando o Lema 4.10, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, integração por partes e novamente o Lema 4.10, temos

$$\begin{aligned} (u - u_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} &= \sum_{F \in \mathcal{E}^D} (g, \mu)_F - (u_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} & (4.72) \\ &= (\chi_h, \mu)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \chi_h)_{\mathcal{T}_h} + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla \chi_h)_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\text{div}} \|\chi_h\|_V \\ &\leq \frac{C}{C_\eta} \|\mu\|_{\Lambda} \eta & (4.73) \end{aligned}$$

onde C é uma constante independente de h . Usando o item (1) do Lema 4.2, a estimativa 4.73 e o item (3) do Lema 4.2, temos

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 &= \|T\lambda - T\lambda_h\|_V^2 \\ &\leq -\frac{1}{c_2} (T\lambda - T\lambda_h, \lambda - \lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\leq -\frac{1}{c_2} (u - u_h, \lambda - \lambda_h)_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\leq \frac{C}{c_2 C_\eta} \|\lambda - \lambda_h\|_{\Lambda} \eta \\ &\leq \frac{c_1}{c_2} \frac{C}{C_\eta} \|T\lambda - T\lambda_h\|_V \eta \\ &= \frac{C}{c_2} \|u - u_h\|_V \eta \end{aligned}$$

e segue o resultado do item (1).

Provamos agora a estimativa (2). Seja $F \in \mathcal{E}$, e consideremos $\mu \in \Lambda$ com suporte em F tal que, $\mu_F^{\partial K} \mathbf{n}_F^{\partial K} = \frac{1}{2} R_F$ se $F \in \mathcal{E}^0$, e $\mu_F^{\partial K} \mathbf{n}_F^{\partial K} = R_F$ se $F \in \mathcal{E}^D$, para cada $K \in \mathcal{T}_h^F$. De (4.48), temos que $R_F \in [L^2(F)]^d$. Seja $K \in \mathcal{T}_h^F$, usando (4.72), temos

$$\|R_F\|_{0,F}^2 = (\mu \mathbf{n}_F^{\partial K}, R_F)_F = (R_F, \llbracket p_h - p \rrbracket)_F \leq \|R_F\|_{0,F} \|\llbracket p_h - p \rrbracket\|_{0,F}.$$

Em seguida, usando a desigualdade do traço (A.10) e a regularidade da malha, temos

$$\begin{aligned} \|R_F\|_{0,F} &\leq \|\llbracket p - p_h \rrbracket\|_{0,F} \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \left[\frac{1}{h_K} \|p - p_h\|_{0,K}^2 + h_K \|\nabla p - \nabla p_h\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sqrt{h_F} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^F} \left[\frac{1}{h_K^2} \|p - p_h\|_{0,K}^2 + \|\nabla p - \nabla p_h\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= C \sqrt{h_F} \|p - p_h\|_{V,F}, \end{aligned}$$

e o resultado segue da multiplicação em ambos os lados por $\frac{C_\eta}{\sqrt{h_F}}$ e da definição de $c_F := C_\eta C$. ■

4.5 Validações numéricas

Nesta seção validamos o novo método MHM e os resultados teóricos das seções anteriores. Para tanto, são feitas comparações com o método de Galerkin usando elementos \mathbb{P}^k contínuos e com os métodos estabilizados SUPG e UNSUAL e com o elemento \mathbb{P}^1 . Comparamos o custo computacional entre os métodos em função do número de graus de liberdade globais (desconsiderando o custo envolvidos nos problemas locais). Uma comparação de tempos de processamento que considera a totalidade dos graus de liberdade é apresentado na seção B.4 do apêndice B.

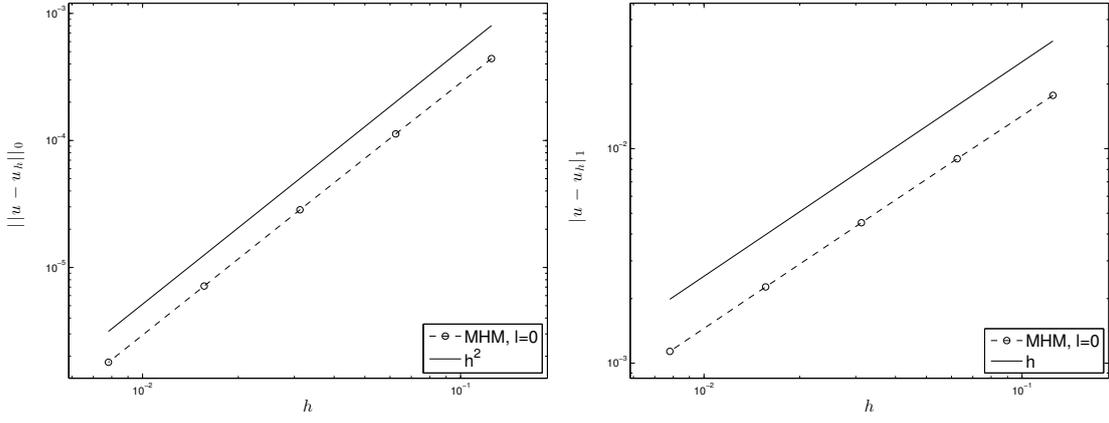


Figura 4.11: Curvas de convergência para MHM com $l = 0$, norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 1$, $a = 1$ e $\sigma = 0$.

4.5.1 Validação da convergência

Consideremos o problema de reação-advecção-difusão (4.27) com $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \Gamma : (x = 0) \vee (x = 1)\}$, $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$, definimos $\epsilon = \varepsilon \mathcal{I}$, $\alpha := (a, 0)^T$ para $\varepsilon, a, \sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $f = 1$. Se $\sigma = 0$ e $a \neq 0$ então a solução exata do problema é dada por

$$u(x, y) := \frac{1}{a} \left(x - \frac{\sinh(\frac{a}{2\varepsilon}x)}{\sinh(\frac{a}{2\varepsilon})} e^{\frac{a}{2\varepsilon}(x-1)} \right), \quad (4.74)$$

e se consideramos $\sigma > 0$ então,

$$u(x, y) := \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sinh(\frac{\sqrt{a^2+4\varepsilon\sigma}(x-1)}{2\varepsilon})}{\sinh(\frac{\sqrt{a^2+4\varepsilon\sigma}}{2\varepsilon})} e^{\frac{a}{2\varepsilon}x} - \frac{\sinh(\frac{\sqrt{a^2+4\varepsilon\sigma}x}{2\varepsilon})}{\sinh(\frac{\sqrt{a^2+4\varepsilon\sigma}}{2\varepsilon})} e^{\frac{a}{2\varepsilon}(x-1)} + 1 \right). \quad (4.75)$$

Apresentamos na sequência um estudo da influência do espaço $\Lambda_F^{(l)}$ e dos parâmetros ε , a e σ sobre as taxas de convergência e no comportamento numérico da solução.

4.5.1.1 Caso advectivo-difusivo

Assumimos $a = 1$ e $\sigma = 0$ e usamos diferentes valores de ε para estudar o comportamento numérico de MHM. Nas Figuras 4.11 e 4.12 mostramos a convergência ótima do método MHM com os espaços de aproximação $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$ e

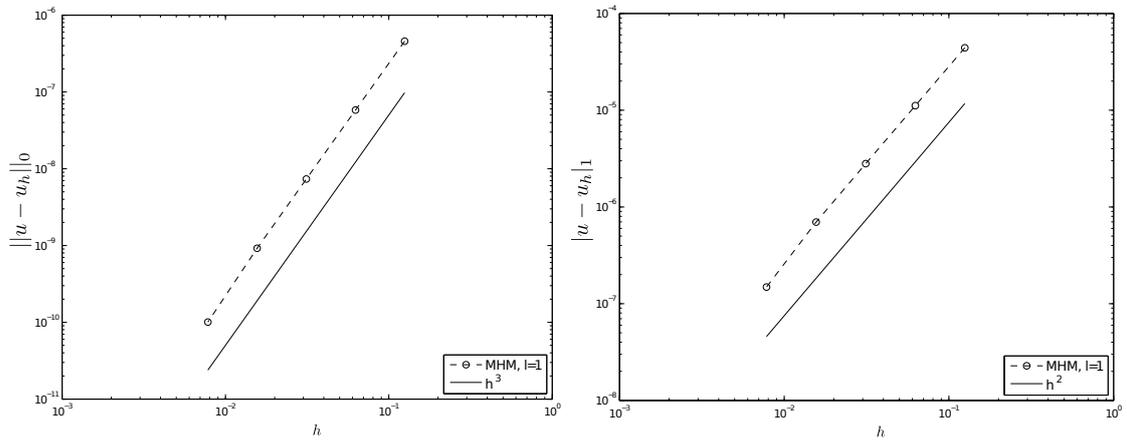


Figura 4.12: Curvas de convergência para MHM com $l = 1$, norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 1$, $a = 1$ e $\sigma = 0$.

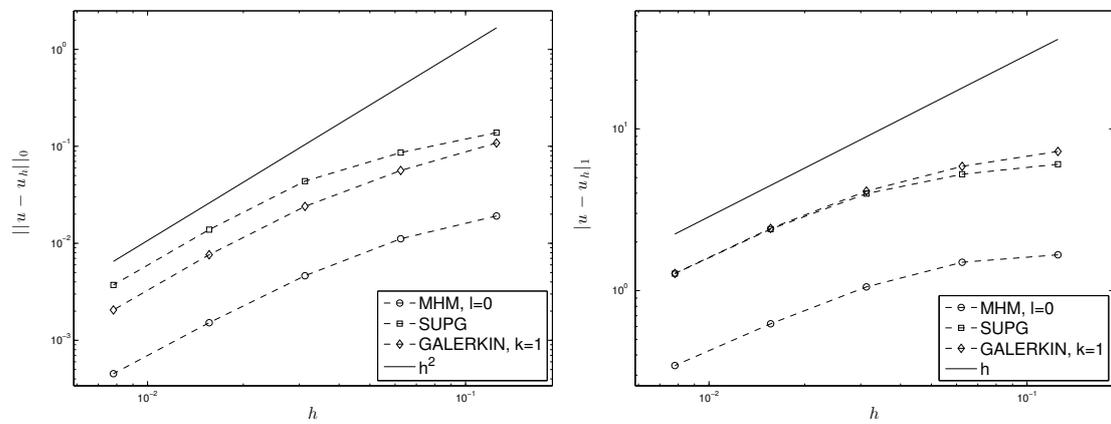


Figura 4.13: Comparação convergência MHM com $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$, Galerkin ($k = 1$) e SUPG. Norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 1$ e $\sigma = 0$

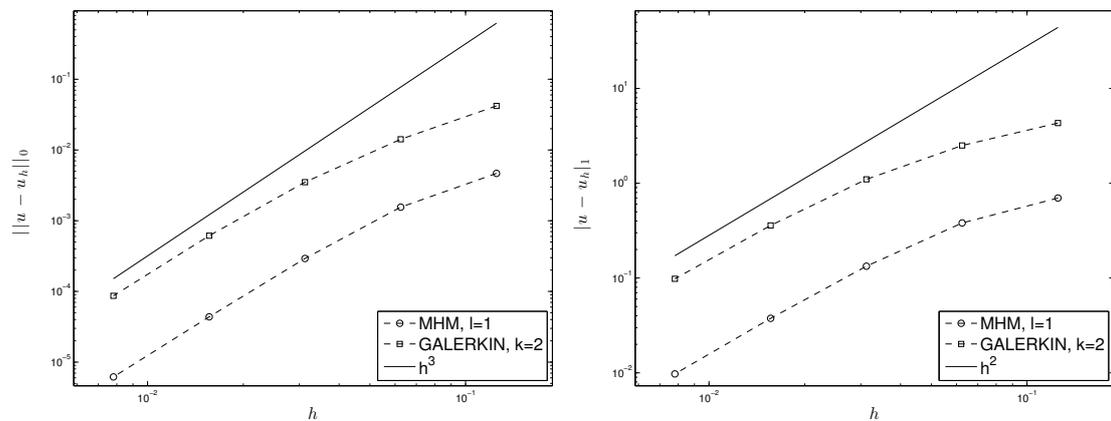


Figura 4.14: Comparação convergência MHM com $\Lambda_F^{(1)} = \mathbb{P}^1(F)$, Galerkin ($k = 2$). Norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 1$ e $\sigma = 0$

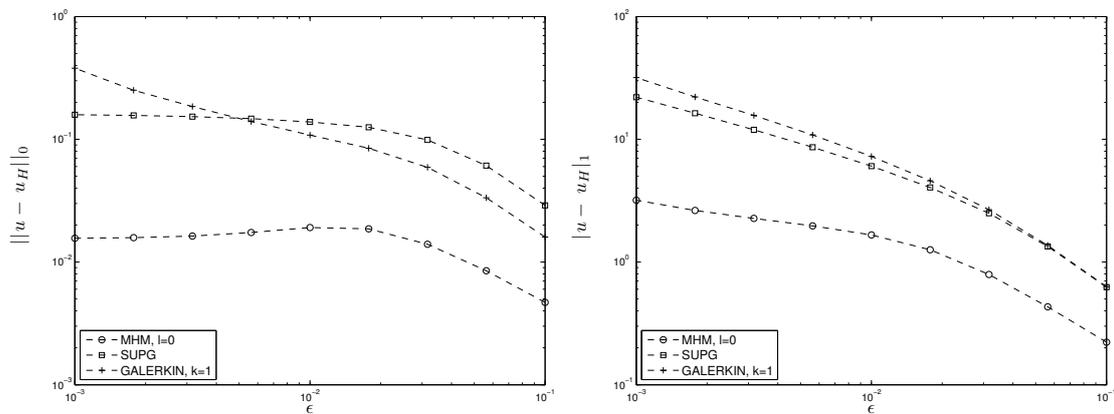


Figura 4.15: Curvas de erro com respeito de ε para o método de Galerkin ($k = 1$), SUPG e MHM com espaços $\Lambda_F^0 = \mathbb{P}^0(F)$. Normas $L^2(\Omega)$ (esquerda) e $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita).

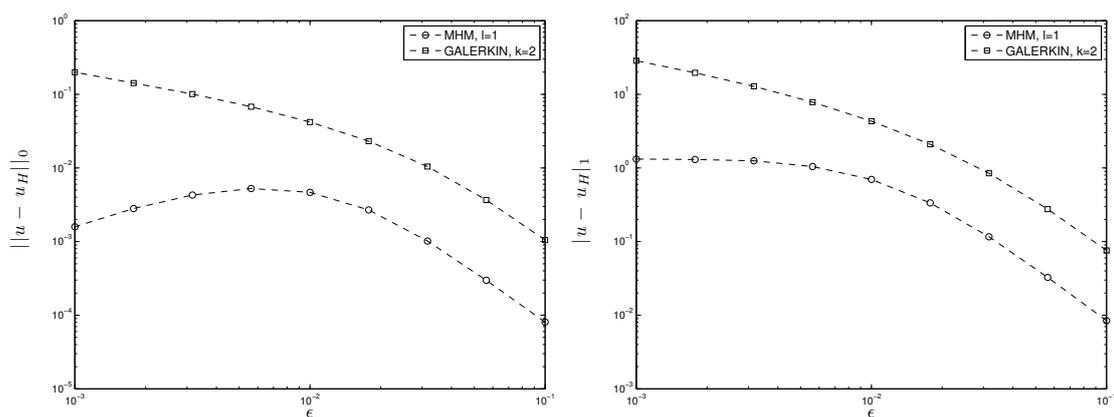


Figura 4.16: Curvas de erro com respeito de ε para o método Galerkin ($k = 2$) e MHM com os espaços $\Lambda_F^0 = \mathbb{P}^0(F)$. Normas $L^2(\Omega)$ (esquerda) e $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita).

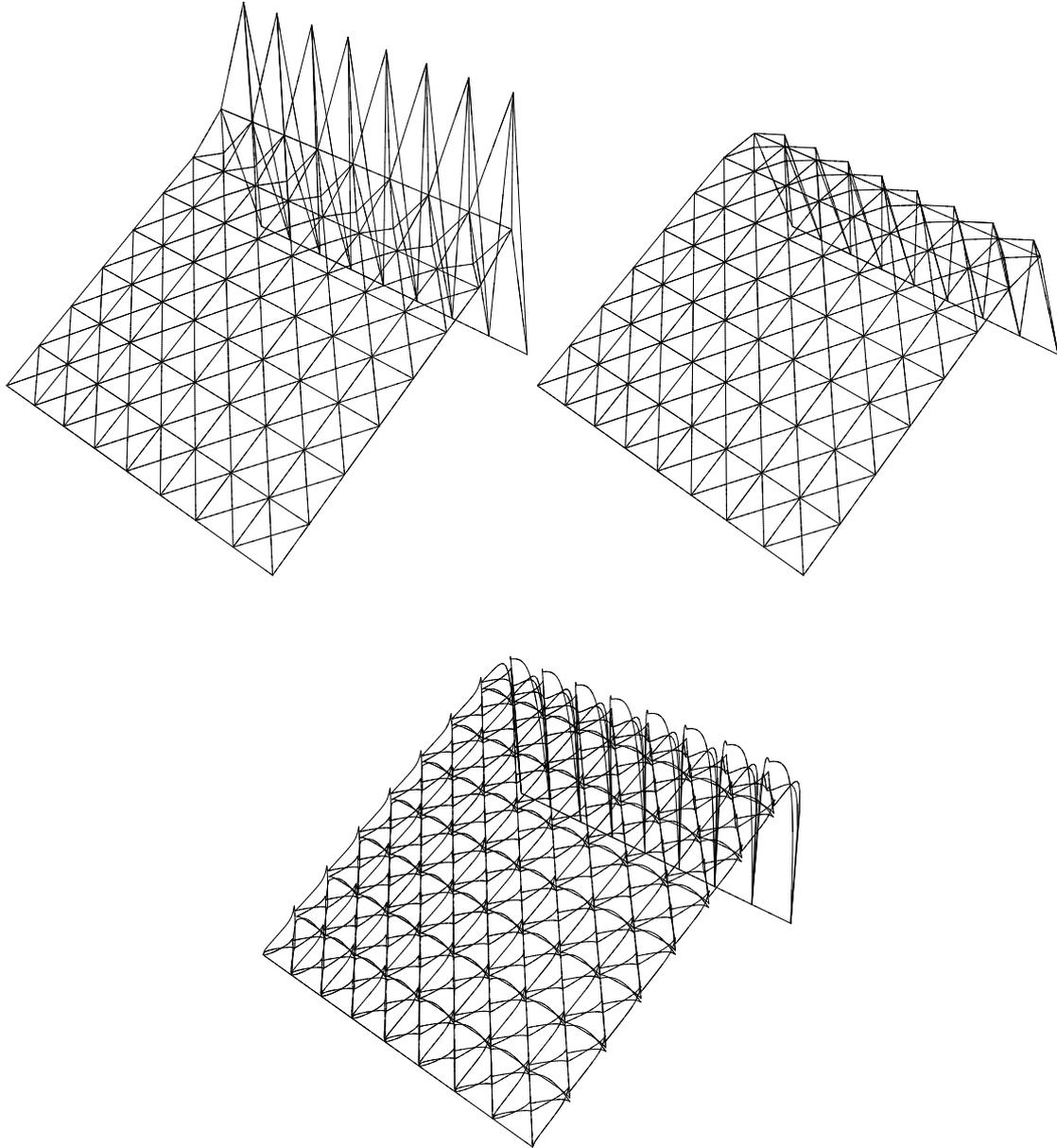


Figura 4.17: Elevações de: Galerkin (acima à esquerda), SUPG (acima à direita) e MHM com $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$ (embaixo).

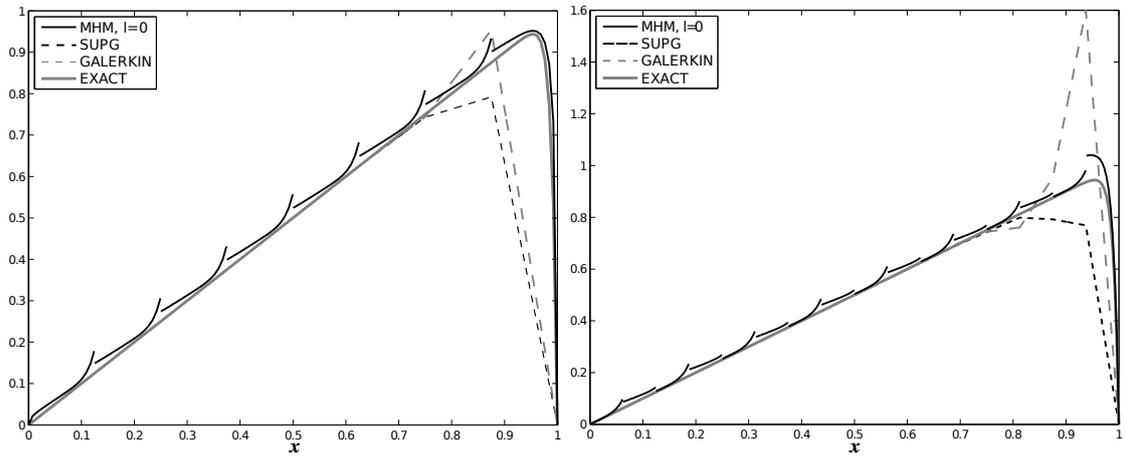


Figura 4.18: Perfis de corte para a Figura 4.17. Corte em $y = 0.5$ (esquerda) e em $y = 0.4375$ (direita).

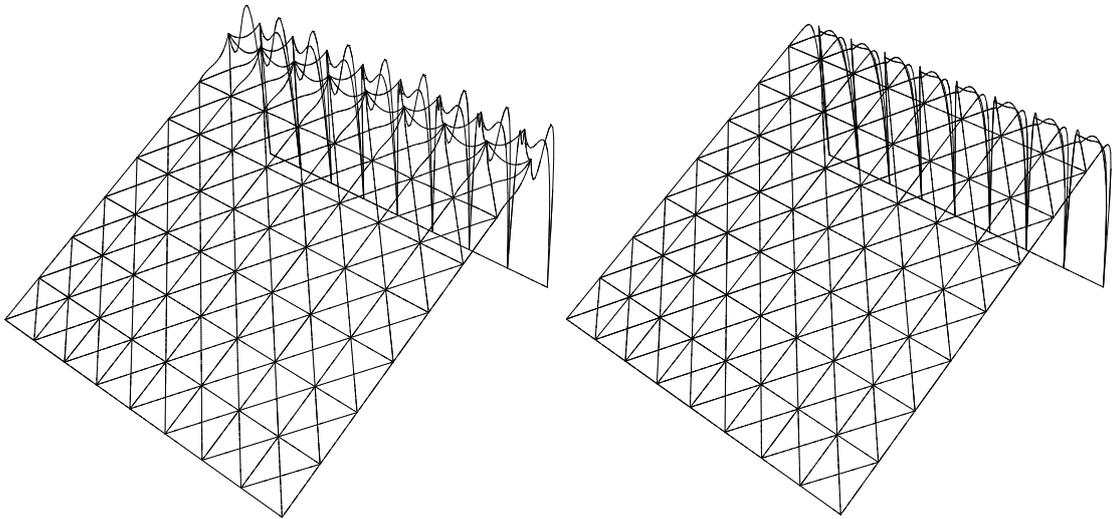


Figura 4.19: Comparação de elevações para o método de Galerkin $k = 3$ (esquerda) e o método MHM com $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{P}^2(F)$ (direita).

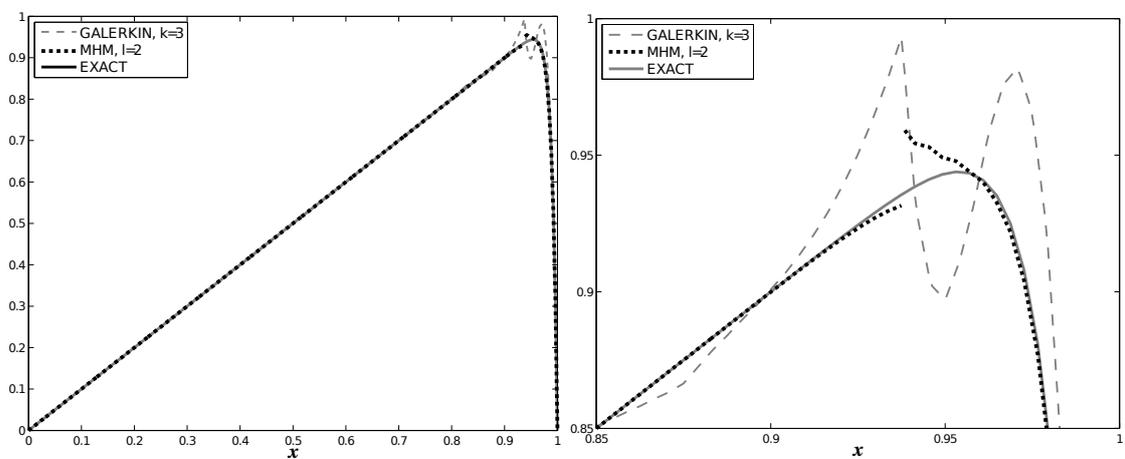


Figura 4.20: Perfis de corte para a 4.19. Corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (direita).

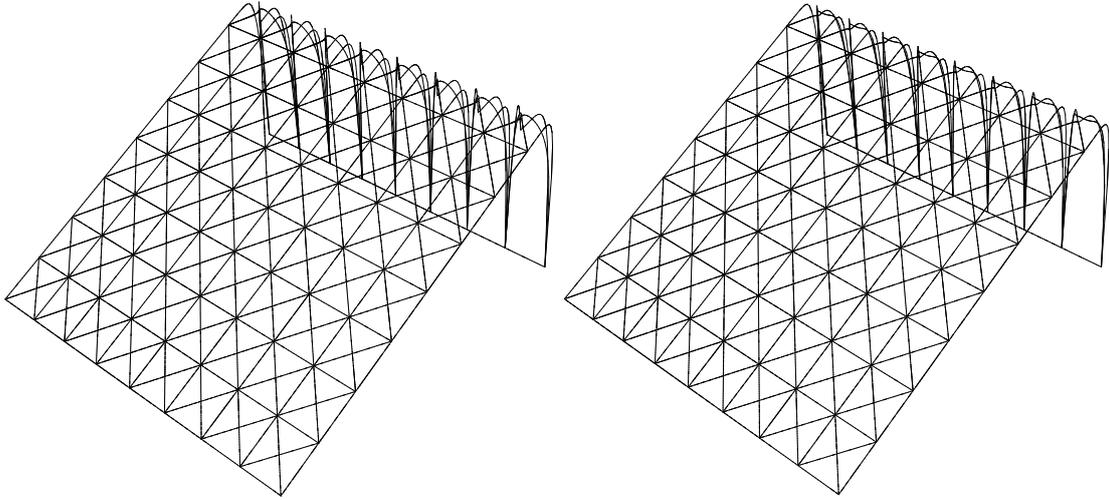


Figura 4.21: Comparação de resultados de MHM com $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$: Elevações para $l = 1$ e $l = 2$.

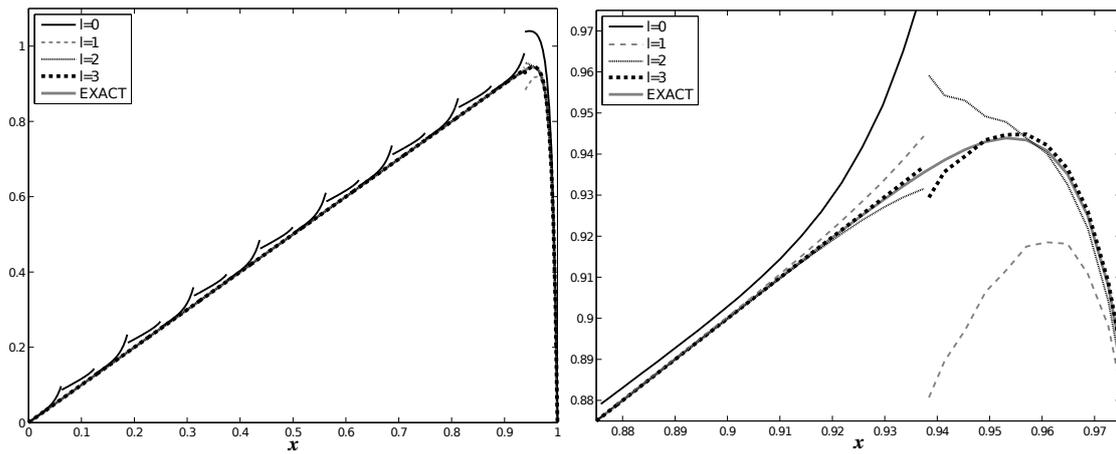


Figura 4.22: Comparação de resultados de MHM com $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$: Perfis de corte em $y = 0.4375$ comparando $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$ e $l = 3$ com a solução exata.

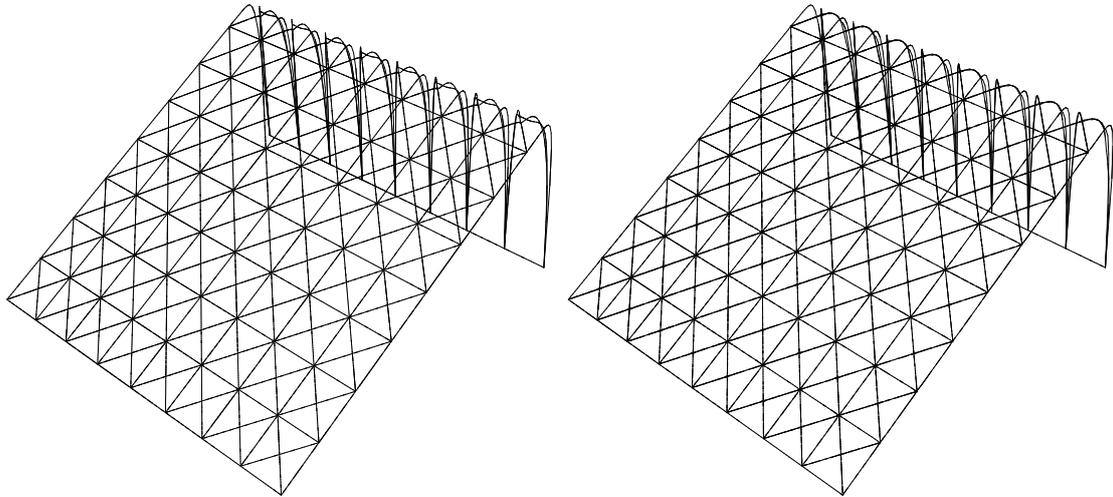


Figura 4.23: Diferentes opções para o espaço $\Lambda_F^{(2)}$: Elevação para $\mathbb{D}^{(2,1)}(F)$ (esquerda) e para $\mathbb{D}^{(0,3)}(F)$ (direita)

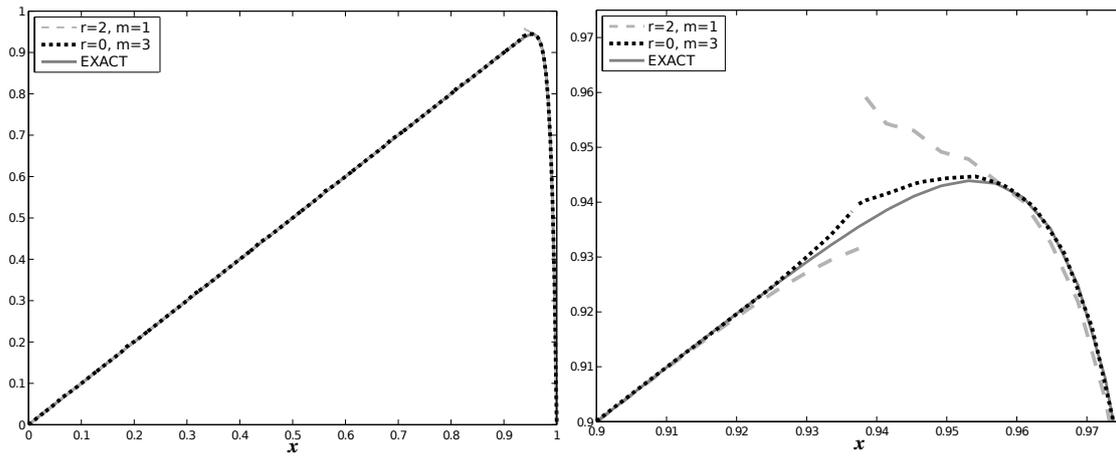


Figura 4.24: Diferentes opções para o espaço $\Lambda_F^{(2)}$: Perfis de corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (direita).

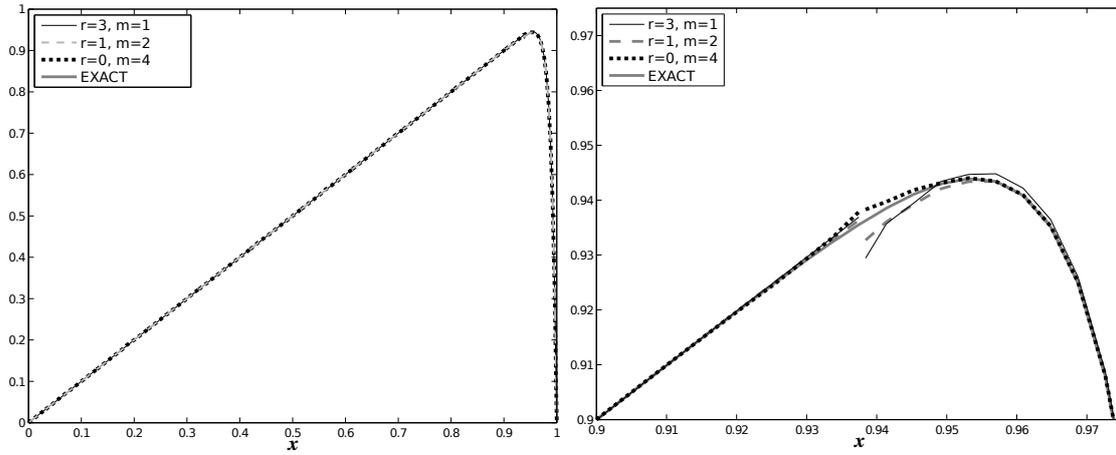


Figura 4.25: Diferentes opções para o espaço $\Lambda_F^{(3)} = \mathbb{D}^{(m,r)}(F)$. Perfil do corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (direita).

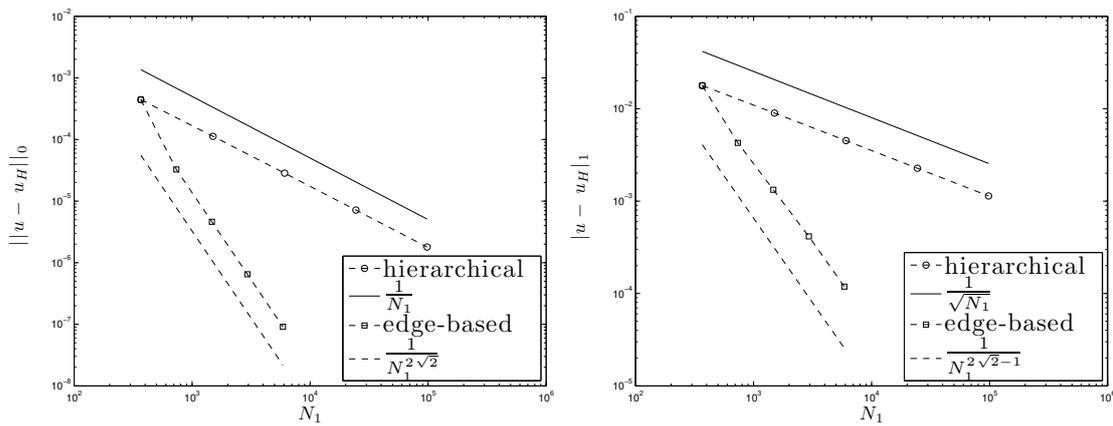


Figura 4.26: Curvas de convergência em função dos graus de liberdade globais. Comparação entre um refinamento baseado em faces e um refinamento clássico. Para $\varepsilon = 1$, $a = 1$ e $\sigma = 0$.

$\Lambda_F^{(1)} = \mathbb{P}^1(F)$, com $\varepsilon = 1$, respectivamente. Em seguida, estudamos a convergência com respeito a h do método MHM assumindo $\varepsilon = 10^{-2}$ (advecção dominante) e comparamos os resultados a solução pelo método de Galerkin e SUPG. Nas Figuras 4.13 e 4.14 observamos que as taxas de convergência de todos os métodos são afetadas pelo valor de ε , porém o método MHM apresenta um erro notadamente menor e uma recuperação mais rápida da taxa de convergência ótima. Para mostrar que, independente da escolha de ε , o método MHM com os espaços $\Lambda^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$ apresenta um comportamento mais preciso (em termos do erro) do que os métodos clássicos, nas Figuras 4.15 e 4.16 fazemos uma comparação em função de ε . Podemos ver que o erro do método MHM é sempre menor do que o erro obtido pelo método de Galerkin e SUPG. Além disso, o método MHM com $l = 1$ apresenta maior estabilidade com respeito a ε , tanto na norma $L^2(\Omega)$ quanto na norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (ver Figura 4.16).

Fixamos o caso $\varepsilon = 10^{-2}$ e $h = 0.125$ (advecção dominante). Na Figura 4.17 comparamos os resultados do método MHM usando $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$ com o método de Galerkin ($k = 1$) e SUPG, e na Figura 4.18 comparamos os cortes com a solução exata. Podemos ver que o método de Galerkin apresenta grandes instabilidades numéricas perto do contorno, enquanto que o método SUPG é muito difusivo e não aproxima corretamente a camada limite. Do ponto de vista de aproximação, os resultados de MHM, são melhores. Porém notamos as dificuldades de aproximação da parte linear da solução. Este comportamento se deve à escolha do espaço e não à instabilidade do método. Este fato fica claro nas Figuras 4.19 e 4.20, onde podemos ver que, aumentando o espaço de aproximação, o método MHM fornece melhores aproximações enquanto que o método de Galerkin com interpolação polinomial ainda apresenta instabilidades numéricas. Nas Figuras 4.21 e 4.22 estudamos a influência de l na escolha dos espaços $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$. Note que para $l > 0$ a aproximação da parte linear da solução é perfeita, e a aproximação da camada limite melhora rapidamente aumentando l , porém os resultados ainda podem ser melhorados.

Note que os resultados do MHM apresentados nas Figura 4.19 e 4.20 são melhores do que os obtidos usando o método de Galerkin, usando ambos um número similar de graus de liberdade. Porém, como mencionado anteriormente, fica evidente que os resultados de MHM para $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$ ainda podem ser melhorados (ver Figuras 4.21 e 4.22). Em virtude disto, testamos o desempenho do MHM usando os espaços $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r,m)}(F)$ (ver definição em (4.40)). Nas Figuras 4.23 e 4.24 exploramos as duas opções admitidas pelo espaço $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{D}^{(r,m)}$, e obtemos resultados consideravelmente superiores no caso $(r, m) = (0, 2)$. Finalmente na Figura 4.25 apresentamos as três opções admitidas pelo espaço $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{D}^{(r,m)}$. Neste caso a opção com melhor comportamento foi $(r, m) = (0, 4)$. Assim, concluimos que para gerar um espaço de aproximação Λ_h com o melhor compromisso custo/precisão, a melhor opção é usar polinômios por partes de baixa ordem. Tal observação nos leva a estudar o comportamento numérico do MHM usando os espaços $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r,m)}$ em função do parâmetro m . Para isto, fixamos $r = 0$ e definimos o refinamento usando o método MHM com os espaços $\Lambda_F^{(m_i)} = \mathbb{D}^{0,m_i}(F)$, com $m_i = 2^{i-1}$ e $i \in \mathbb{N}$. Comparamos a convergência deste processo baseado em faces com um refinamento clássico (usando malhas estruturadas hierárquicas) com respeito aos graus de liberdade globais do sistema (ver Figura 4.26). Observamos que esta nova estratégia, induzida pelos espaços $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r,m)}$ é muito mais precisa do ponto de vista do que o refinamento clássico, para um número fixo de graus de liberdade por face.

4.5.1.2 Caso reativo-difusivo

Assumimos $a = 0$ e $\sigma = 1$ e usamos diferentes valores de ε para estudar o comportamento numérico de MHM. Nas Figuras 4.27 e 4.28 com $\varepsilon = 10^{-2}$, mostramos convergência ótima com os espaços de aproximação $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$ e $\Lambda_F^{(1)} = \mathbb{P}^1(F)$, respectivamente. Em seguida, estudamos a convergência com respeito a h do método MHM para $\varepsilon = 10^{-4}$ (reação dominante) e comparamos os resultados com o método de Galerkin e UNUSUAL [37]. Nas Figuras 4.29 e 4.30 observamos que as taxas de convergência de todos os métodos são afetadas pelo

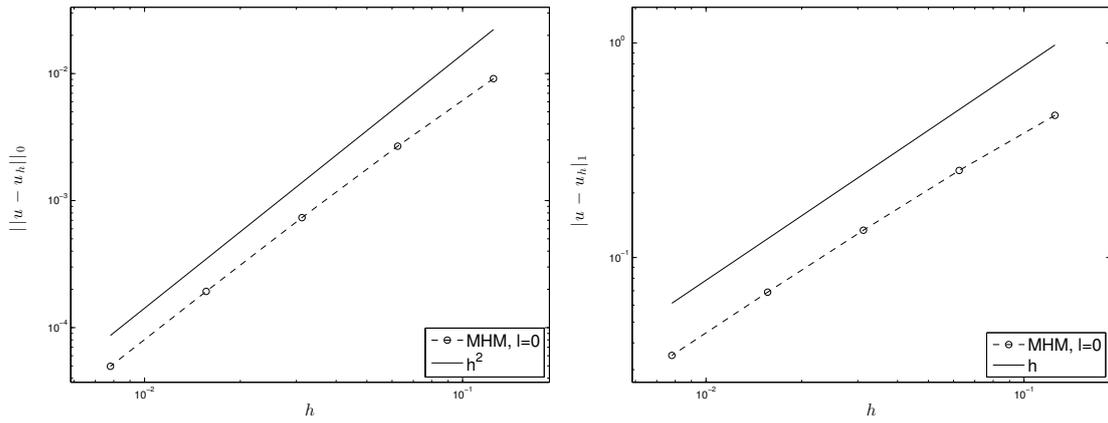


Figura 4.27: Curvas de convergência para MHM com $l = 0$, norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 0$ e $\sigma = 1$.

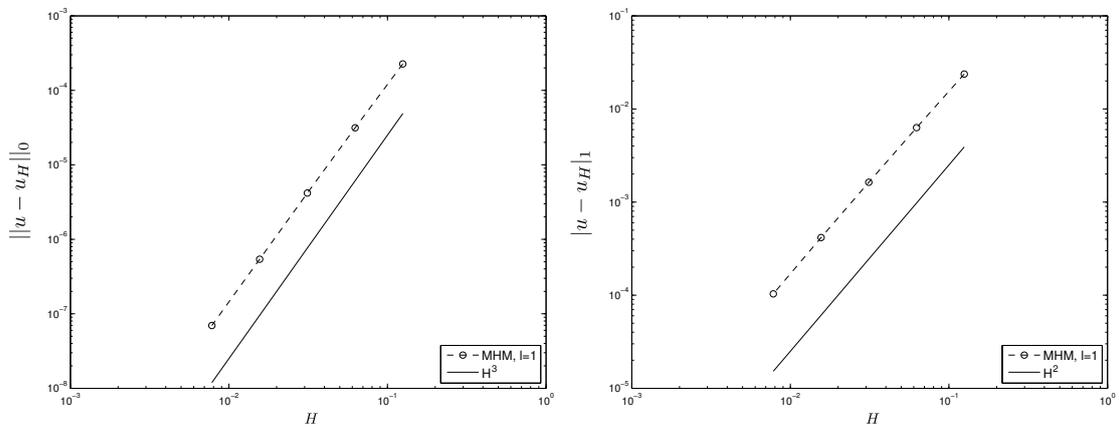


Figura 4.28: Curvas de convergência para MHM com $l = 1$, norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 0$ e $\sigma = 1$.

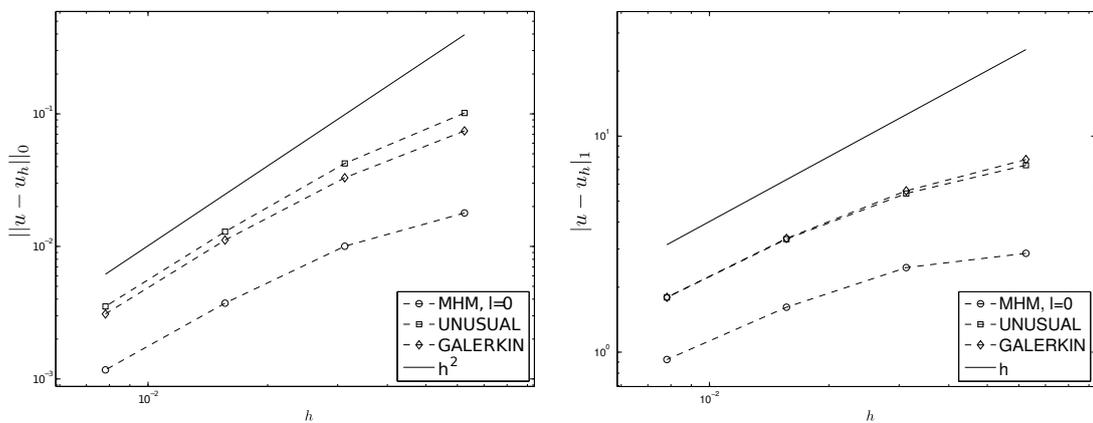


Figura 4.29: Comparação convergência MHM com $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$, Galerkin ($k = 1$) e UNUSUAL. Norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 0$ e $\sigma = 1$

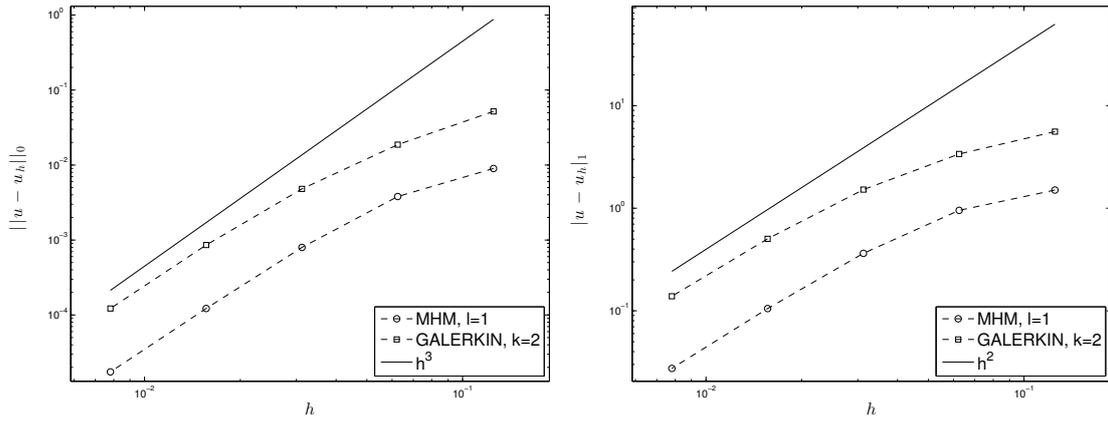


Figura 4.30: Comparação convergência MHM com $\Lambda_F^{(1)} = \mathbb{P}^1(F)$, Galerkin ($k = 2$). Norma $L^2(\Omega)$ (esquerda) e norma $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita). Caso $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 1$ e $\sigma = 0$

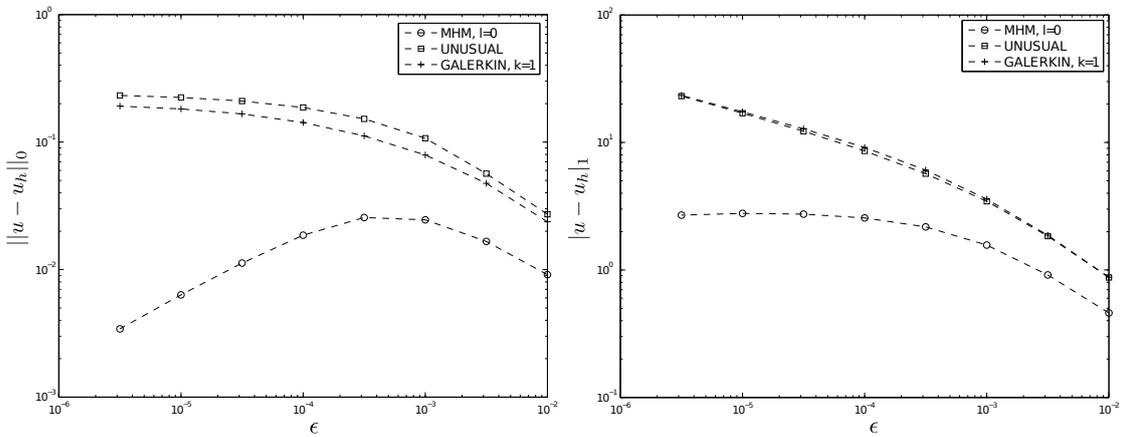


Figura 4.31: Curvas de erro com respeito de ε para o método MHM, Galerkin e SUPG. Espaço $\Lambda_F^0 = \mathbb{P}^0(F)$. Norma de $L^2(\Omega)$ (esquerda) e de $H^1(\mathcal{T}_h)$ (direita).

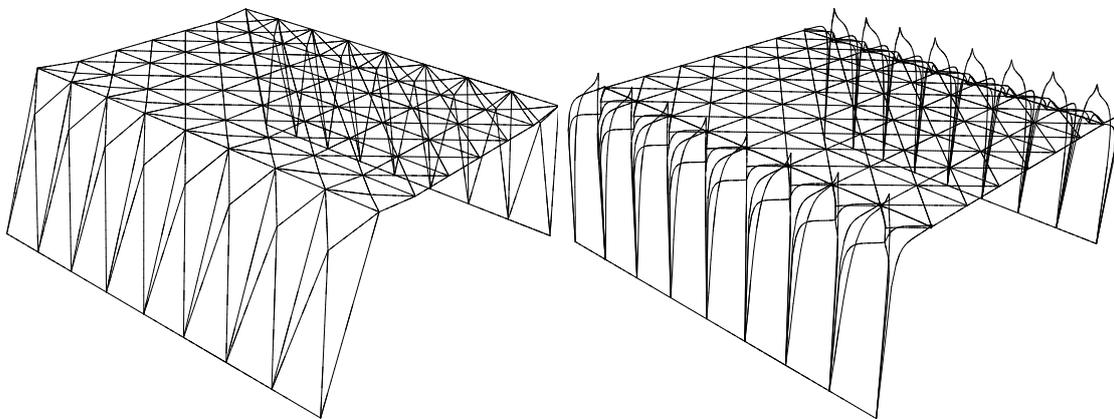


Figura 4.32: Elevações da solução: UNUSUAL (esquerda) e MHM $l = 0$ (direita).

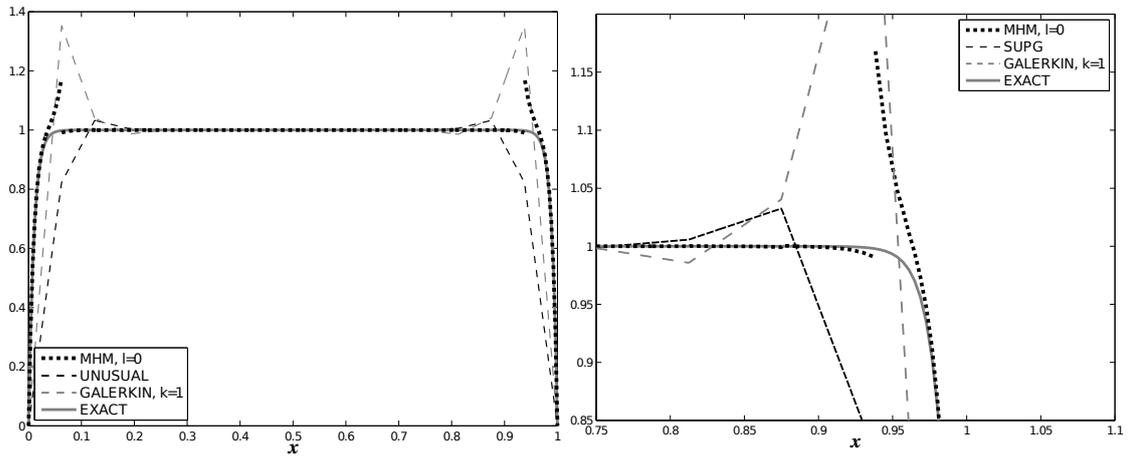


Figura 4.33: Perfis de corte para a Figura 4.32. Corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (à direita).

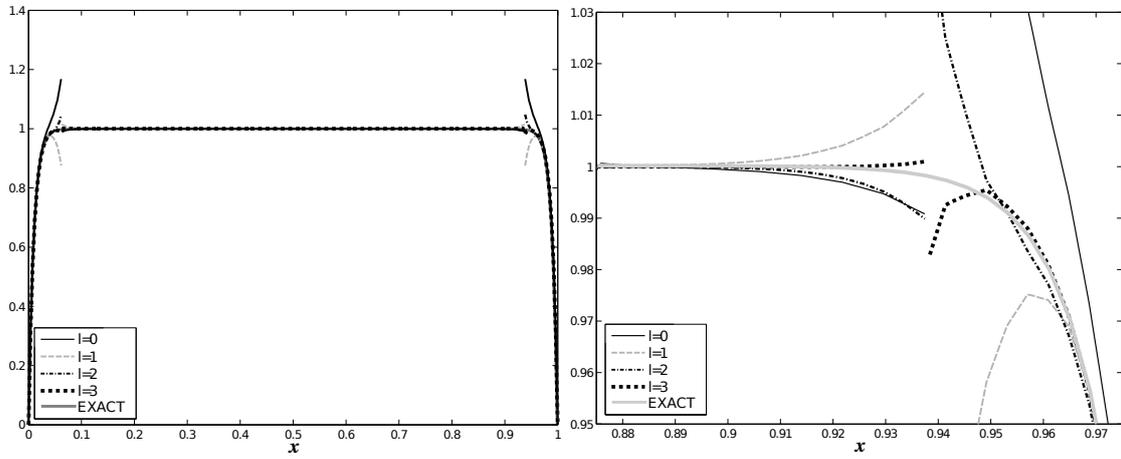


Figura 4.34: Comparação de resultados de MHM com $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$: Perfis de corte em $y = 0.4375$ comparando $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$ e $l = 3$ com a solução exata.

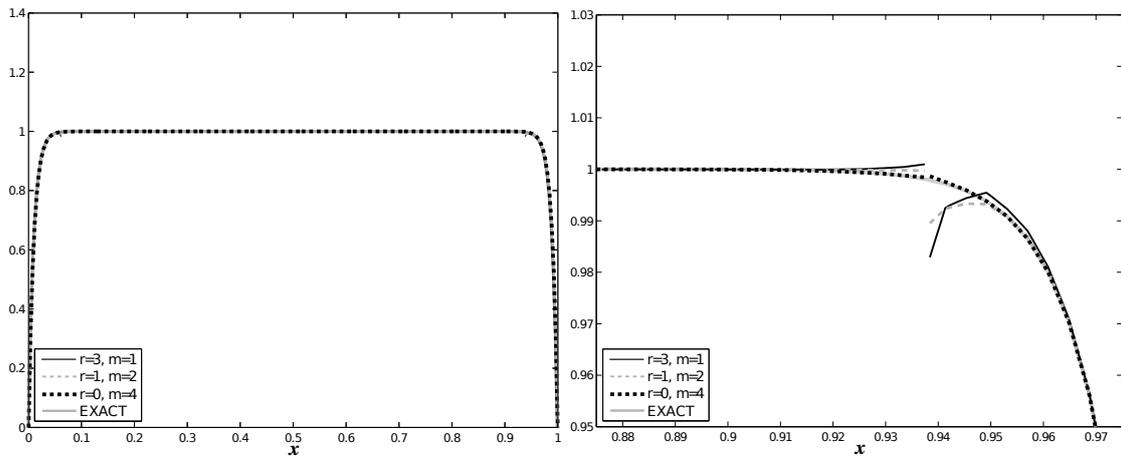


Figura 4.35: Diferentes opções para o espaço $\Lambda_F^{(3)} = \mathbb{D}^{(m,r)}(F)$. Perfil do corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (à direita).

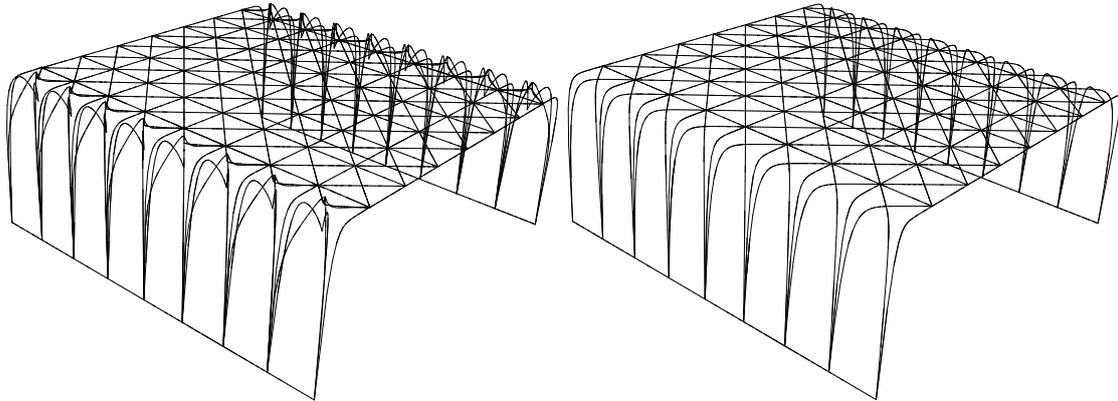


Figura 4.36: Duas opções para $\Lambda_F^{(1)}$: elevação da solução com $\mathbb{P}^1(F)$ (esquerda) e $\rho(\mathbb{P}^1(F))$ (direita).

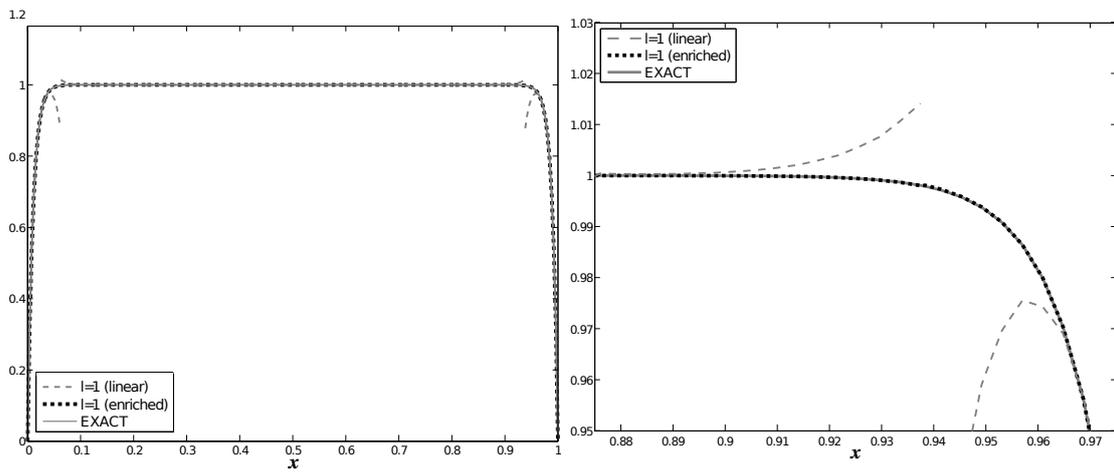


Figura 4.37: Duas opções para $\Lambda_F^{(1)}$: $\mathbb{P}^1(F)$ e $\rho(\mathbb{P}^1(F))$. Perfis do corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (direita).

valor de ε . Porém o método MHM apresenta um erro consideravelmente menor e uma recuperação mais rápida da taxa de convergência ótima (no caso $l = 1$). Para mostrar que, independente da escolha de ε , MHM apresenta um comportamento mais preciso (em termos do erro). Na Figura 4.31 comparamos o erro em função de ε . Podemos ver que o erro pelo método MHM é sempre menor do que o erro pelo métodos de Galerkin e UNUSUAL. Além disso o método de MHM com $l = 0$ apresenta uma estabilidade com respeito de ε , tanto na norma $L^2(\Omega)$ como na norma natural $H^1(\mathcal{T}_h)$.

Fixamos o caso $\varepsilon = 10^{-4}$ e $h = 0.125$ (reação dominante). Na Figura 4.32 comparamos os resultados do método MHM usando $\Lambda_F^{(0)} = \mathbb{P}^0(F)$ com o método UNUSUAL. Na Figura 4.33 comparamos os perfis das soluções com a solução aproximada usando o método de Galerkin ($k = 1$) e com a solução exata. Podemos ver que o método de Galerkin apresenta grandes instabilidades numéricas perto do contorno, enquanto que o método UNUSUAL é muito difusivo e não aproxima a bem a camada limite. O método MHM aproxima a camada limite mas ainda existe um espaço significativo para melhorias. Na Figura 4.34 estudamos a influência de l na escolha dos espaços $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{P}^l(F)$. Neste caso obtemos melhores resultados. Procurando resultados ainda melhores utilizamos os espaços $\Lambda_F^{(l)} = \mathbb{D}^{(r,m)}(F)$ (ver definição em (4.40)). Na Figura 4.35 apresentamos as três opções admitidas pelo espaço $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{D}^{(r,m)}$, e verificamos que a melhor aproximação foi obtida com $(r, m) = (0, 4)$. Assim, mais uma vez o método MHM apresenta resultados muito mais competitivos quando usados com polinômios por partes de baixa ordem para aproximar o fluxo. Por outro lado, neste caso contamos com a opção adicional $\Lambda_F^{(1)} = \rho(\mathbb{P}^1(F))$. Nas Figuras 4.36 e 4.37 podemos ver como o método MHM apresenta um desempenho superior usando enriquecimento de espaço sobre $\mathbb{P}^1(F)$. E esta opção torna o método MHM uma alternativa ainda mais competitiva e com baixo número de graus de liberdade quando se trata de problemas do tipo reação-difusão.

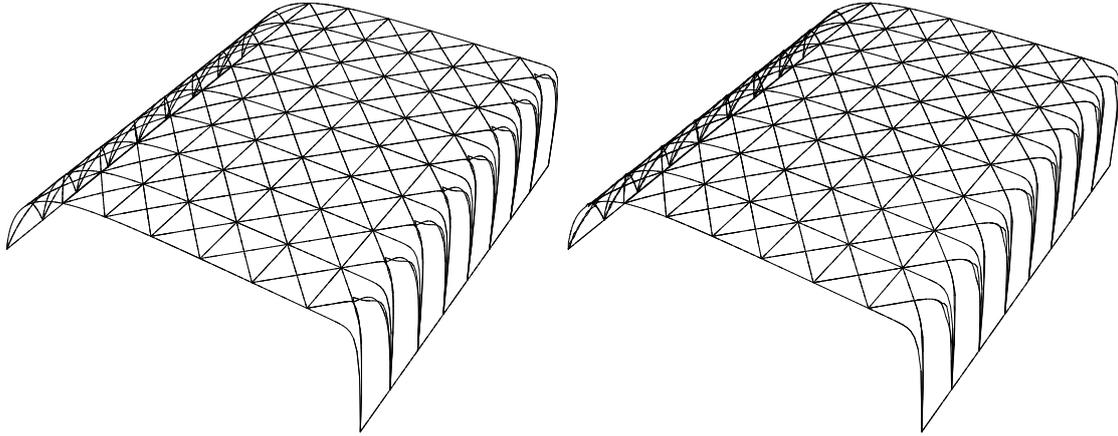


Figura 4.38: Duas opções para $\Lambda_F^{(2)}$: elevações da solução para $\mathbb{D}^{2,1}(F)$ (esquerda) e $\mathbb{D}^{0,3}(F)$ (direita).

4.5.1.3 Caso reativo-advectivo-difusivo

Nesta sub-seção nos limitamos a estudar o caso $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 1$ e $\sigma = 10^4$ (reação e advecção dominantes) uma vez que em sub-seções anteriores estudamos o comportamento do método MHM em casos de advecção e reação dominantes, separadamente.

Nas Figuras 4.38 e 4.39 validamos a escolha do espaço $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{D}^{(r,m)}(F)$. Tal como nos casos anteriores, podemos notar que polinômios de baixa ordem por partes são a melhor opção custo/benefício quando uma estratégia de enriquecimento de espaços não está disponível.

4.5.2 Problema da fonte unitária

Aqui estudamos o comportamento numérico do MHM quando usado para aproximar a solução de (4.1), considerando $\epsilon = \varepsilon \mathcal{I}$ e $f = 1$.

4.5.2.1 Caso Advectivo-difusivo

Consideremos o caso $\varepsilon = 10^{-3}$, $\alpha = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ e $\sigma = 0$. Na Figura 4.40 podemos ver uma comparação entre o método de Galerkin clássico ($k = 5$), e uma aproximação de alta ordem com o método MHM. Neste caso, o método de Galerkin utiliza 3281 graus de liberdade enquanto que o método MHM apenas 2208, sendo

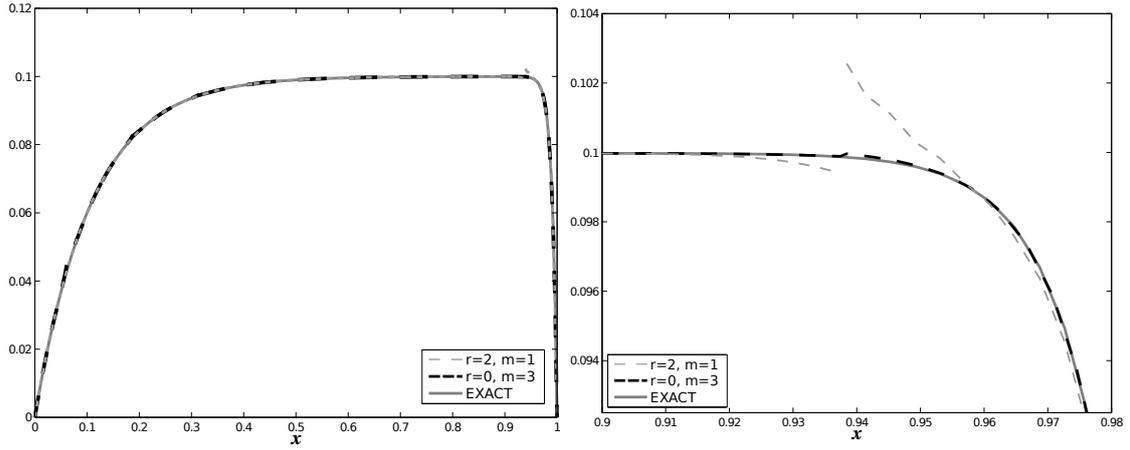


Figura 4.39: Duas opções para $\Lambda_F^{(2)}$: $\mathbb{D}^{2,1}(F)$ e $\mathbb{D}^{0,3}(F)$. Perfis de corte em $y = 0.4375$ (esquerda) e zoom (direita).

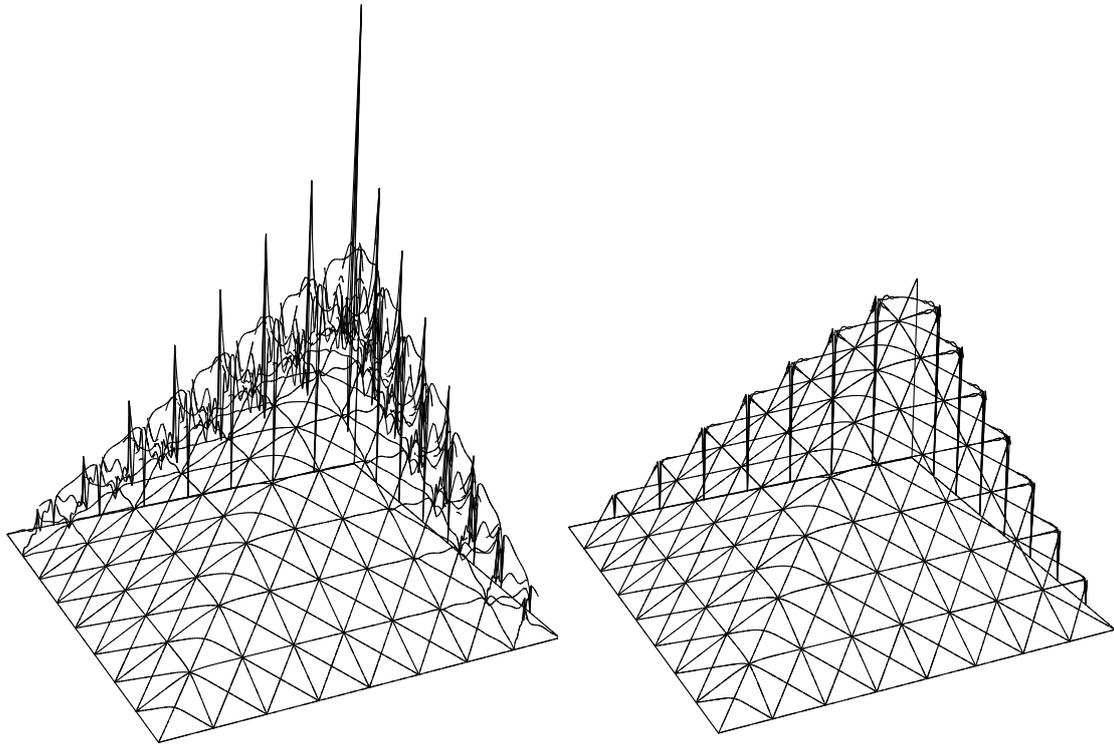


Figura 4.40: Elevações da solução pelo método de Galerkin ($k = 5$) (esquerda) e da solução pelo método MHM usando $\Lambda_F^{(5)} = \mathbb{D}^{(2,2)}(F)$ (direita).

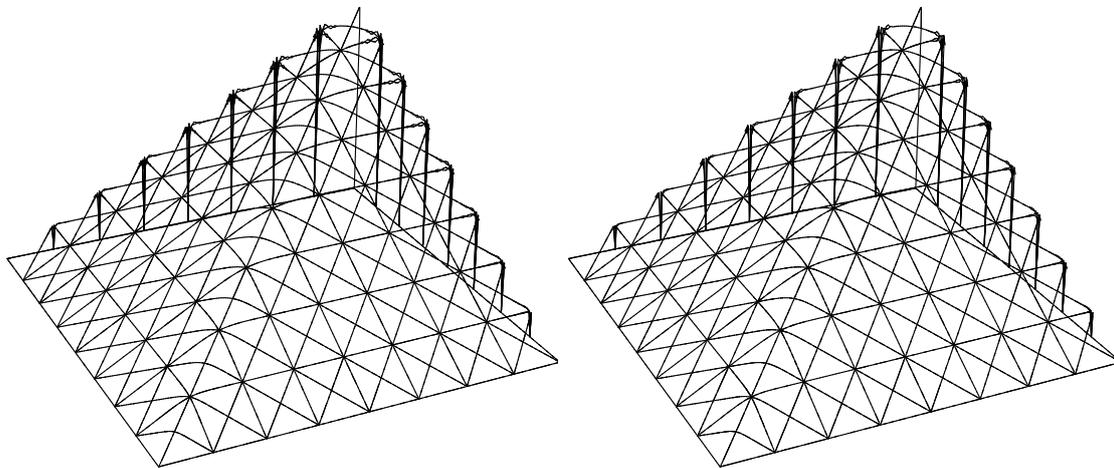


Figura 4.41: Elevações da solução pelo método MHM usando $\Lambda_F^{(8)} = \mathbb{D}^{(3,2)}(F)$ (esquerda) e $\Lambda_F^{(8)} = \mathbb{D}^{(1,4)}(F)$ (direita)

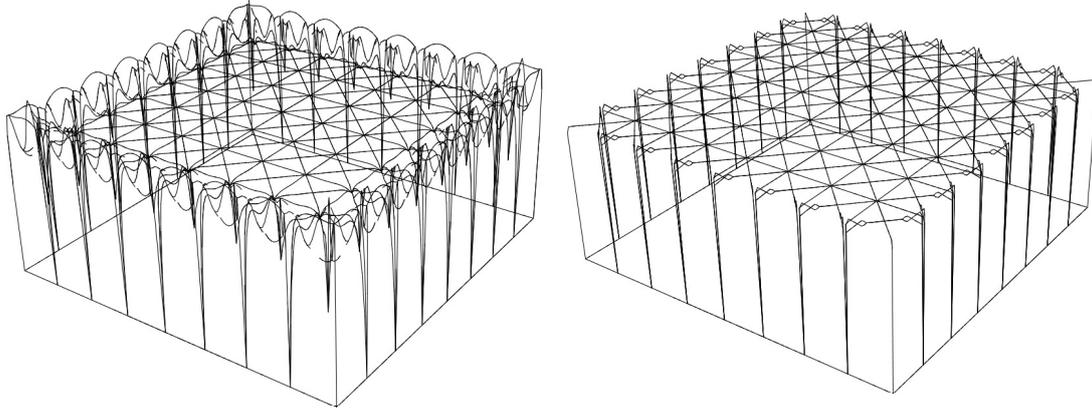


Figura 4.42: Elevações da solução pelo método de Galerkin ($k = 4$) (esquerda) e da solução pelo método MHM usando $\Lambda_F^{(3)} = \mathbb{D}^{(1,2)}(F)$ (direita).

que o MHM apresenta resultados superiores em termos de desempenho. Resultados levemente melhores podem ser obtidos usando o método MHM com uma ordem ainda mais alta, usando 2044 graus de liberdade, ver Figura 4.41.

4.5.2.2 Caso reativo-difusivo

Consideremos o caso $\varepsilon = 10^{-6}$, $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0)^T$ e $\sigma = 1$. Na Figura 4.42 podemos ver uma comparação entre o método de Galerkin clássico ($k = 4$) e uma aproximação de baixa ordem com o método MHM. Neste caso o método de Galerkin emprega 2113 graus de liberdade enquanto que MHM apenas 1472, sendo o MHM superior em termos de desempenho. Na Figura 4.43 comparamos as melhores opções fornecidas pelo método MHM, funções constantes por partes e enriquecidas nas faces, é evidente que os resultados deste último são superiores tanto em desempenho quanto em custo (3312 contra 736 graus de liberdade), quando comparado com as outras opções.

4.5.2.3 Caso reativo-advectivo-difusivo

Consideremos o caso $\varepsilon = 10^{-3}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ e $\sigma = 10$. Na Figura 4.44 podemos ver uma comparação entre o método de Galerkin clássico ($k = 5$), e uma aproximação de alta ordem com o método MHM. Neste caso o método de Galerkin utiliza 3281 graus de liberdade enquanto que o método MHM emprega

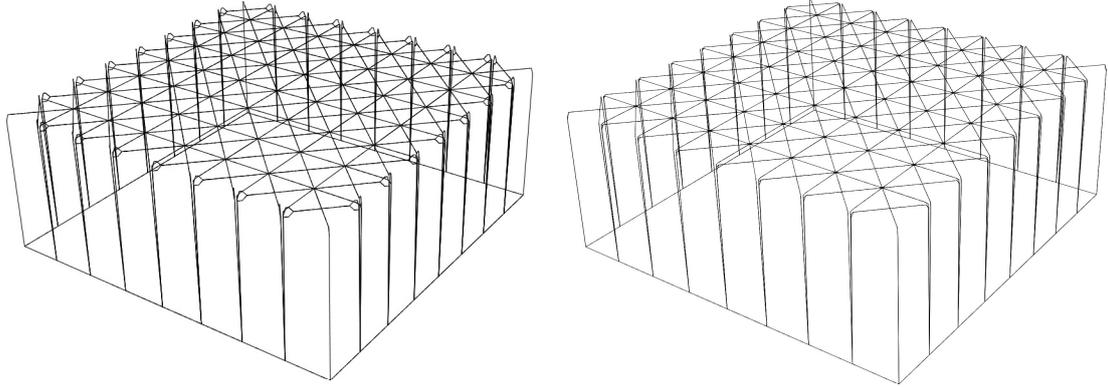


Figura 4.43: Elevações da solução pelo método MHM usando $\Lambda_F^{(3)} = \mathbb{D}^{(0,4)}(F)$ (esquerda) e $\Lambda_F^{(1)} = \rho(\mathbb{P}^1(F))$ (direita).

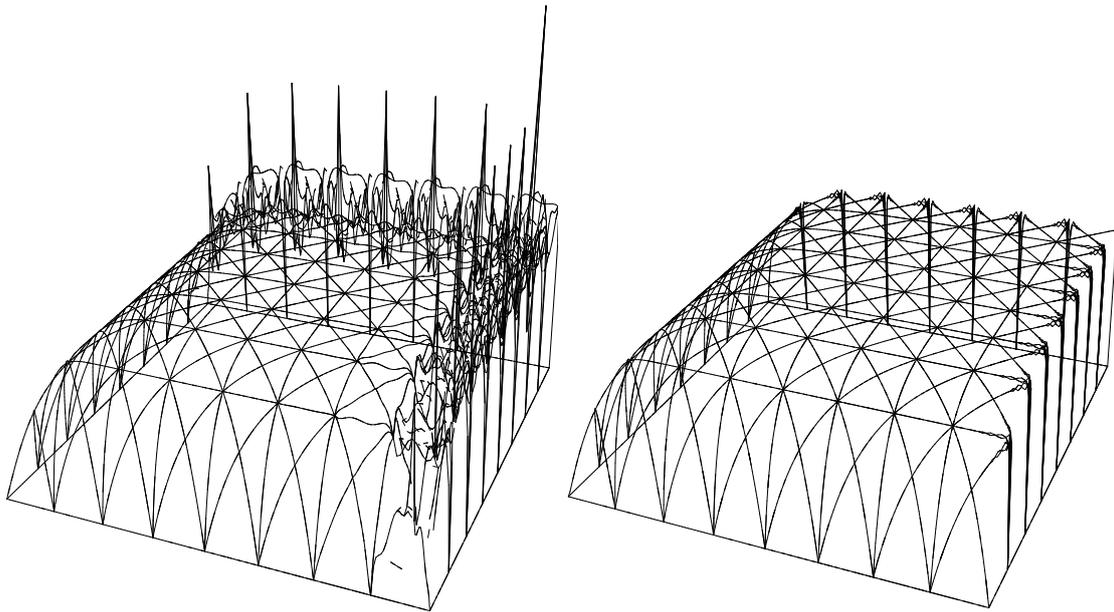


Figura 4.44: Elevações da solução pelo método de Galerkin ($k = 5$) (esquerda) e MHM usando $\Lambda_F^{(5)} = \mathbb{D}^{(2,2)}(F)$ (direita).

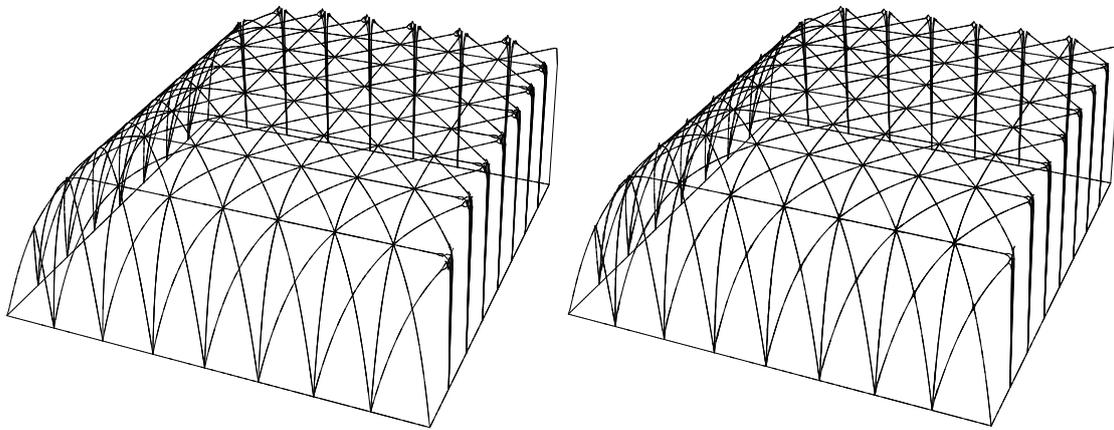


Figura 4.45: Elevações da solução pelo método MHM usando $\Lambda_F^{(7)} = \mathbb{D}^{(1,4)}(F)$ (esquerda) e $\Lambda_F^{(7)} = \mathbb{D}^{(0,8)}(F)$ (direita)

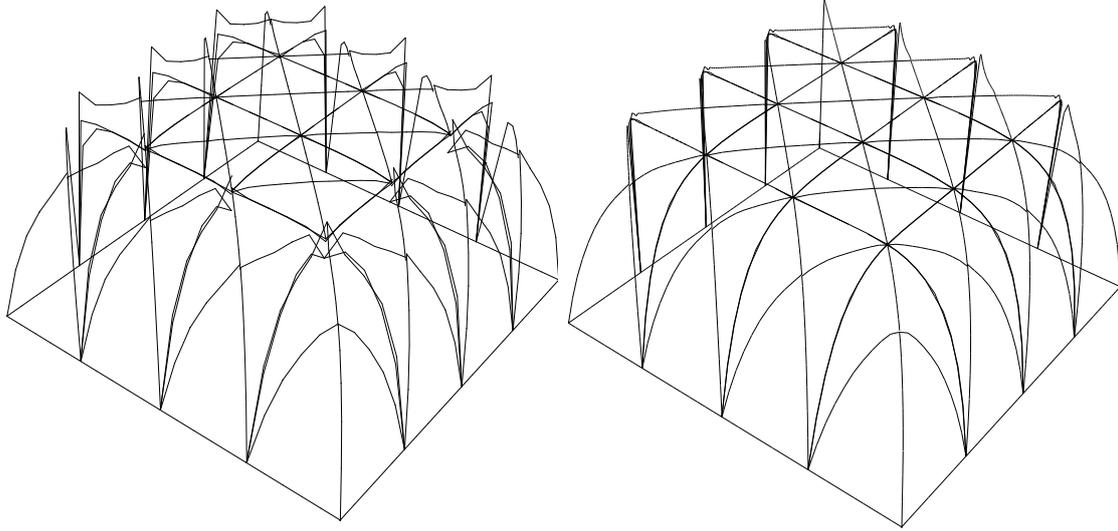


Figura 4.46: Solução inicial e final por um processo de adaptação de espaço (5 iterações).

2944, observe que o método MHM é muito superior em termos de desempenho. Os resultados do método MHM ainda podem ser melhorados usando polinômios por partes e mantendo o mesmo número de graus de liberdade, (ver Figura 4.45).

Em seguida apresentamos o caso $\varepsilon = 10^{-3}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ e $\sigma = 10$, com $h = 0.25$ e usamos o espaço $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{D}^{(2,1)}(F)$ com a estratégia adaptativa apresentada na sub-seção 4.3.4. Na Figura 4.46 podemos ver resultados muito competitivos em uma malha grossa após usar um processo de adaptação de espaços. Ilustramos com um círculo vermelho as arestas para as quais o espaço de aproximação foi aumentado graças ao estimador de erro (ver Figura 4.47). Na Figura 4.47 mostraremos a malha após a concatenação de todas as sub-malhas utilizadas. Vale lembrar que tais problemas locais são completamente independentes, e logo malhas diferentes podem ser empregadas em cada elemento da malha grossa. Este fato mostra a grande flexibilidade do método MHM em aproximar regiões de camada limite de forma diferenciada.

4.5.3 Problema *skew-advection*

Aqui estudamos o desempenho do método MHM quando usado para aproximar numericamente a solução do problema *skew-advection*. Apesar deste teste

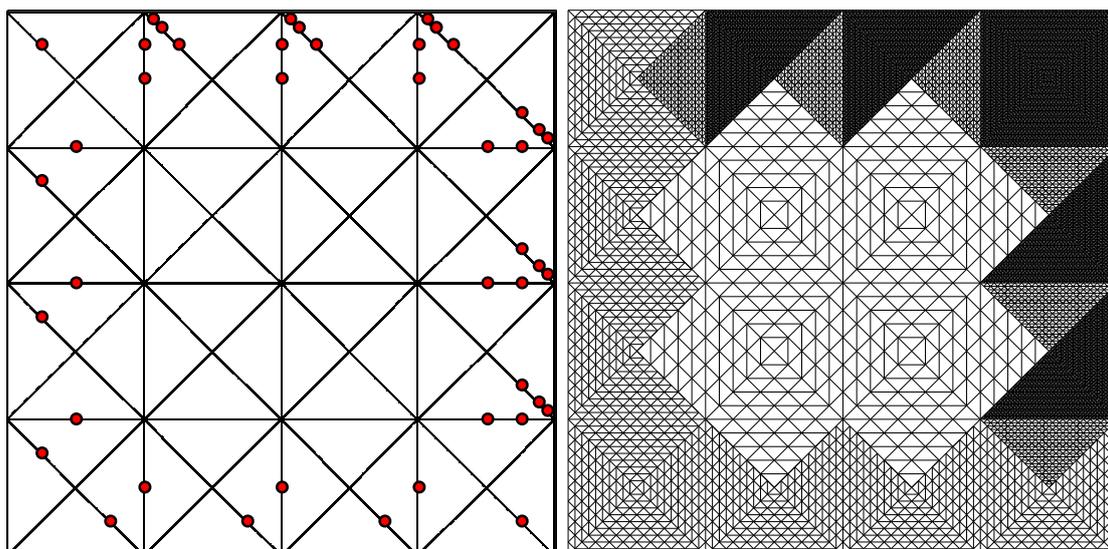


Figura 4.47: Ilustração do espaço modificado final (esquerda), e combinação das malhas de segundo nível utilizadas (direita).

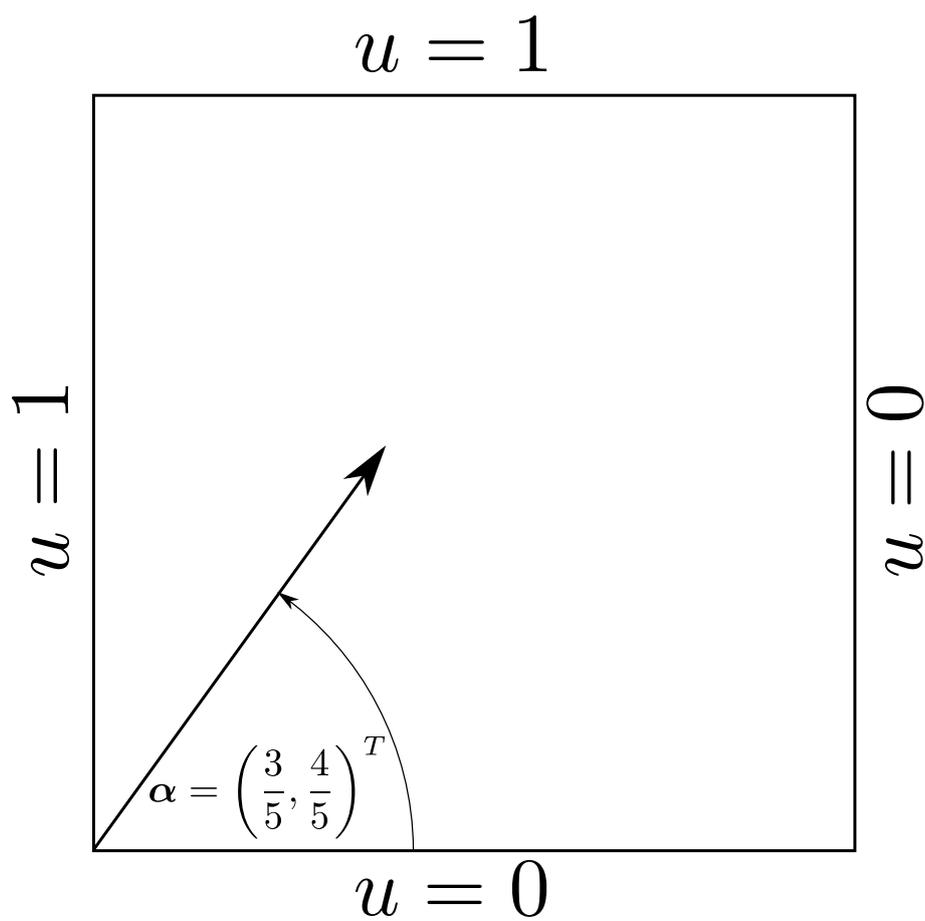


Figura 4.48: Descrição do problema *skew-advection*.

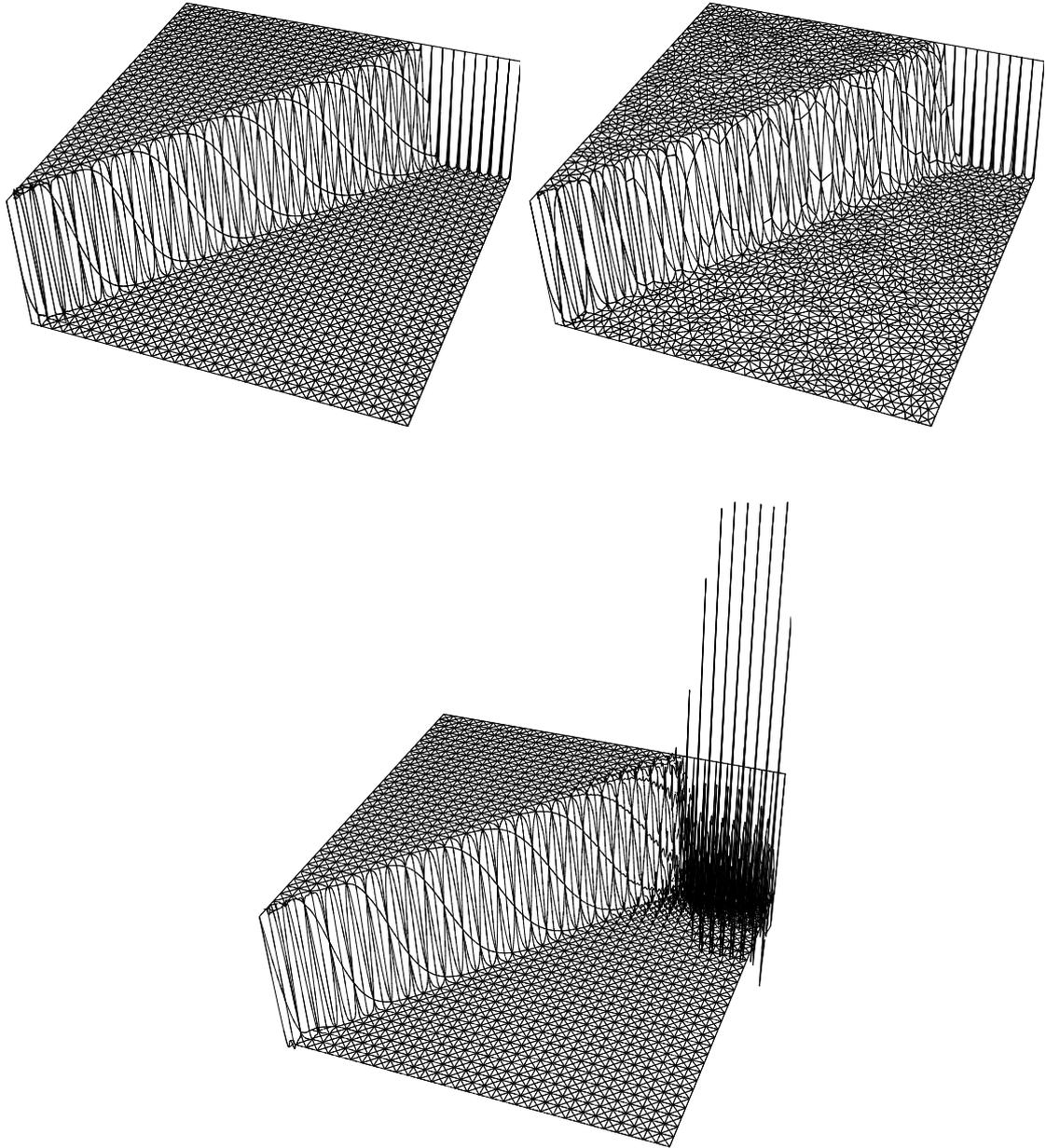


Figura 4.49: Elevações de MHM para uma malha estruturada (acima à esquerda) e não-estruturada (acima à direita) e Galerkin (embaixo). Aqui $\sigma = 0$.

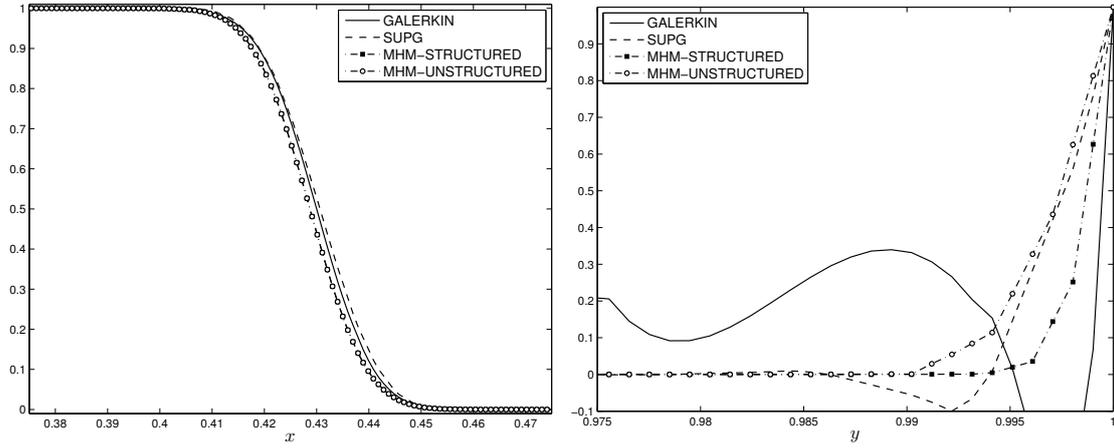


Figura 4.50: Perfis da solução para na Figura 4.49 e comparação com SUPG. Corte em $y = 1 - x$ (esquerda) e em $y = 0.9$ (direita).

estar fora do escopo na teoria (a solução exata não está em $H^1(\Omega)$), este problema tornou-se um teste padrão para os métodos numéricos. Considere o problema (4.27) com $\Gamma_N = \emptyset$, fronteira de Dirichlet descontínua como descrita na Figura 4.48. O coeficiente de difusão é definido por $\epsilon = \epsilon \mathcal{I}$ com $\epsilon = 10^{-4}$, a advecção é definida como $\alpha = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^T$ não alinhada com as arestas da malha. Escolhemos diferentes valores para o coeficiente de reação $\sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, e estudamos a sua influência nos resultados numéricos. A fonte f é nula em todo o domínio. A dificuldade numérica deste problema está concentrada na existência de uma camada limite interna e uma camada limite externa. É importante notar que este problema está fora da teoria aqui desenvolvida devido a que a condição de Dirichlet é descontínua e a solução do problema original não está em $H^1(\mathcal{T}_h)$.

Na Figura 4.49 comparamos o método MHM usando $\Lambda_F^{(4)} = \mathbb{P}^4(F)$ (30.400 graus de liberdade) sobre uma malha estruturada e sobre uma malha não-estruturada, com a solução pelo método de Galerkin usando \mathbb{P}^4 (33.025 graus de liberdade). O método de Galerkin apresenta grandes instabilidades numéricas enquanto que o método MHM, tanto para a malha estruturada como para a malha não-estruturada, apresenta um comportamento estável e não apresenta oscilações espúrias. Na figura 4.50 mostramos os perfis para os experimentos da Figura 4.49, e adicionamos uma comparação com o método SUPG usando 33.024 graus de liberdade. Podemos

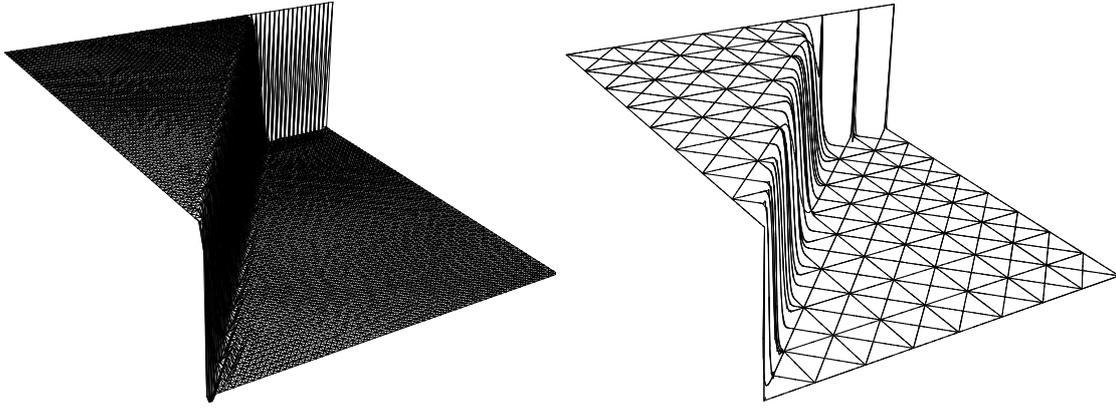


Figura 4.51: Elevações da solução para SUPG (esquerda) e MHM (direita). Aqui $\sigma = 0$.

observar que o comportamento na camada limite externa é similar em todos os métodos, porém na camada limite externa existem diferenças importantes. O método de Galerkin mostra grandes oscilações espúrias nesta região o método SUPG apresenta uma oscilação espúria em torno de 10% da solução, enquanto que o método MHM não apresenta oscilações espúrias em nenhum dos casos.

Para estudar o comportamento do MHM de baixa ordem, na Figura 4.51 comparamos os resultados obtidos pelo método MHM sobre uma malha grossa usando $\Lambda_F^{(21)} = \mathbb{D}^{(11,1)}(F)$, com SUPG em uma malha fina usando um número similar de graus de liberdade (8.096 para MHM e 8.321 para SUPG). No perfil da solução e zooms das Figuras 4.52, 4.53 e 4.54, observamos oscilações espúrias residuais (*undershooting* e *overshooting*). Este comportamento é muito atenuado nos resultados obtidos pelo método MHM. Concluímos que os resultados obtidos pelo MHM são de melhor qualidade.

Finalmente, para validar o estimador de erro *a-posteriori* apresentado em (4.49) e a nova estratégia de *adaptação de espaço*, estudamos uma série de exemplos numéricos. Nas Figuras 4.55, 4.56, 4.57 e 4.58 usamos um valor diferente do coeficiente de reação com o espaço inicial $\Lambda_F^{(2)} = \mathbb{D}^{(2,1)}(F)$ em cada aresta $F \in \mathcal{E}$. Em todos os casos, o processo iterativo foi implementado com um critério de parada relativo ao erro estimado com uma tolerância de 10^{-4} . Na Figura 4.55 observamos a elevação da solução e uma ilustração do espaço de aproximação

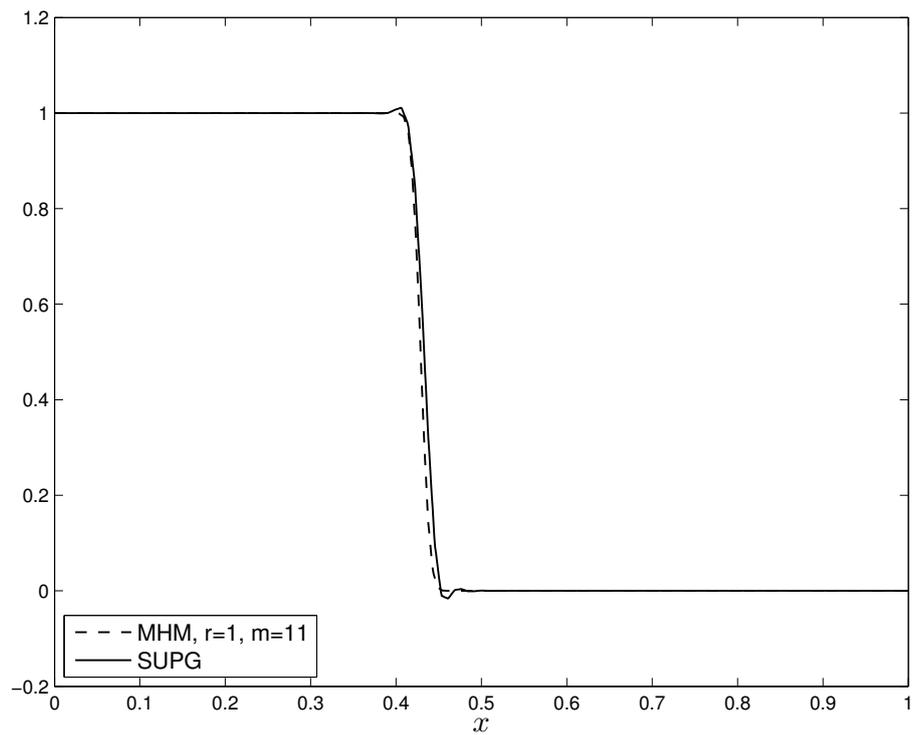


Figura 4.52: Perfis da solução em $y = 1 - x$ da Figura 4.51.

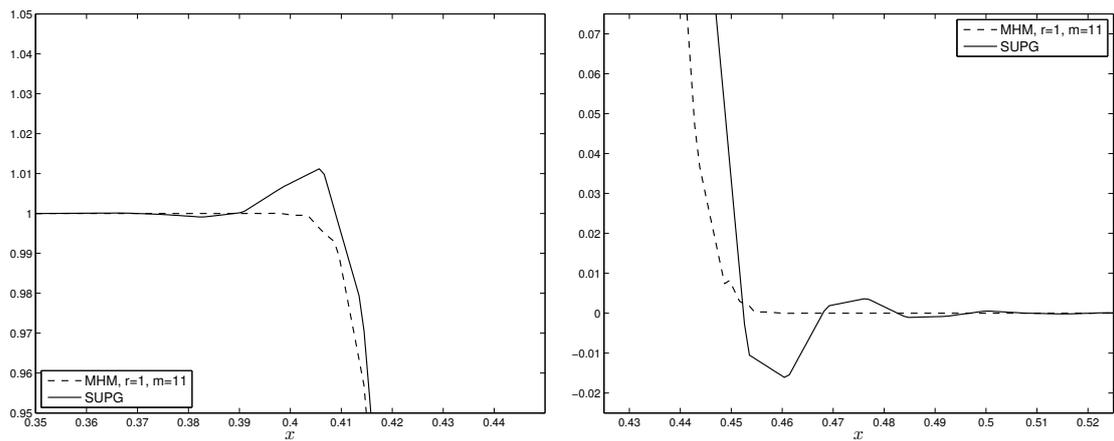


Figura 4.53: Diferentes zooms dos cortes da Figura 4.52. Parte superior (esquerda) e parte inferior (direita)

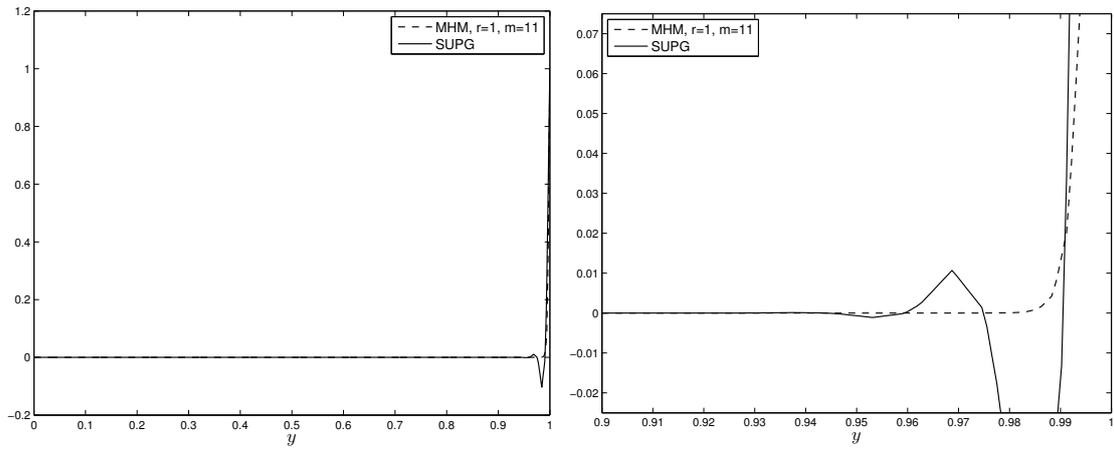


Figura 4.54: Perfil da solução em $y = 0.9$ da Figura 4.51 (esquerda) e zoom (direita).

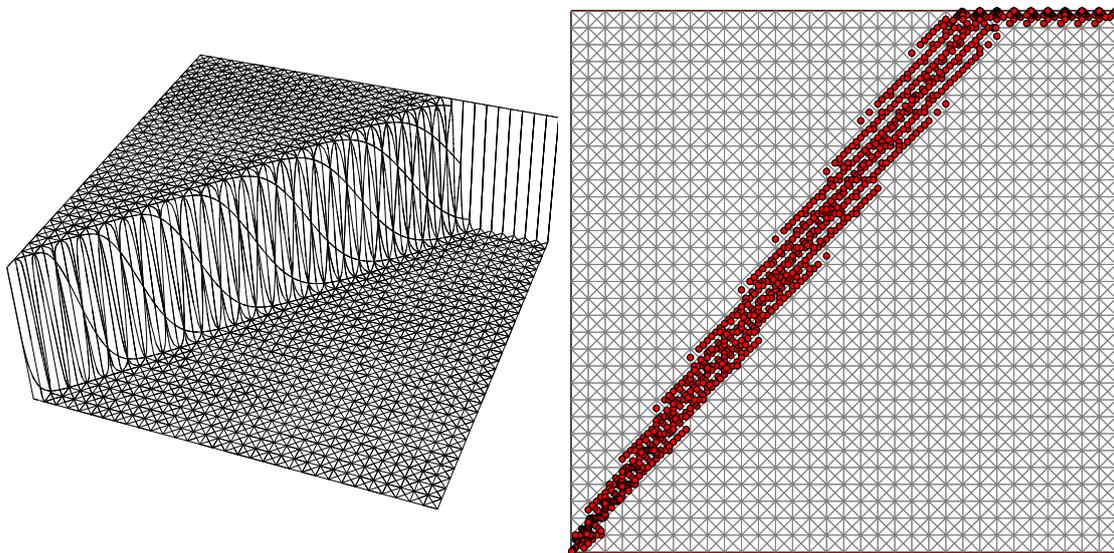


Figura 4.55: Elevação da solução do problema *skew-advection* (esquerda) e ilustração do refinamento baseado em faces (direita). Caso $\sigma = 0$.

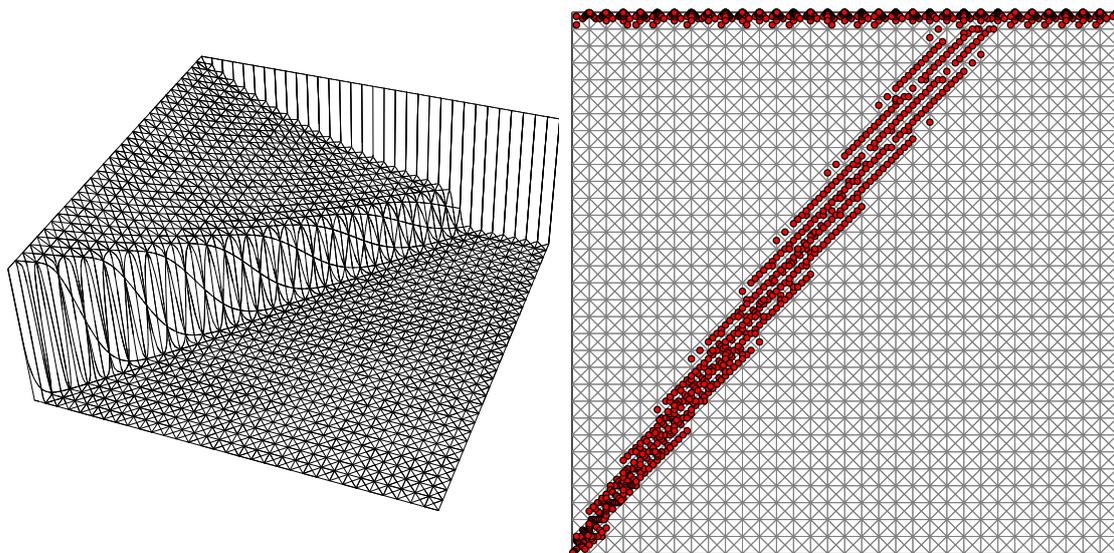


Figura 4.56: Elevação da solução do problema *skew-advection* (esquerda) e ilustração do refinamento baseado em faces (direita). Caso $\sigma = 1$.

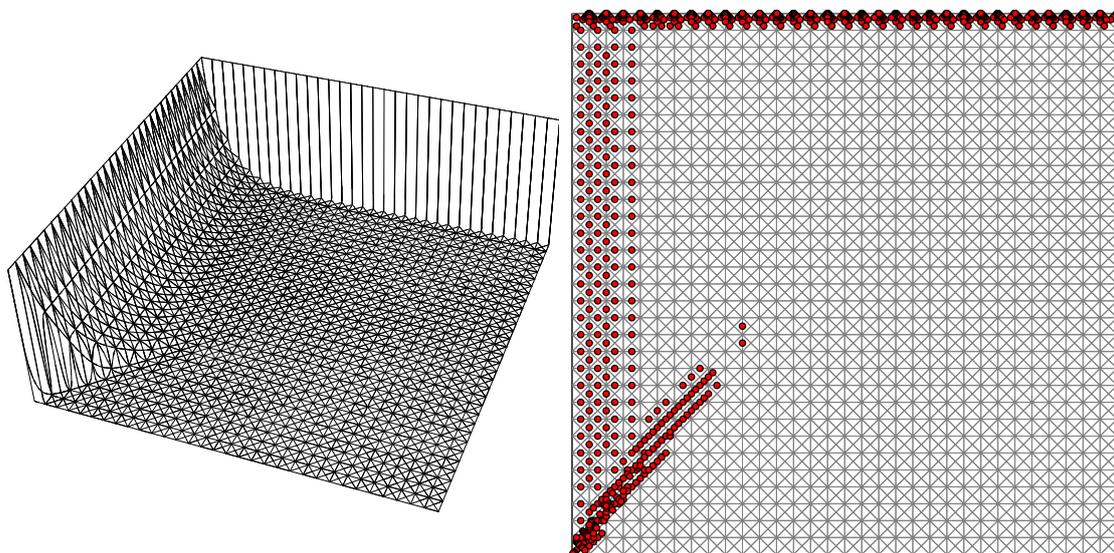


Figura 4.57: Elevação da solução do problema *skew-advection* (esquerda) e ilustração do refinamento baseado em faces (direita). Caso $\sigma = 10$.

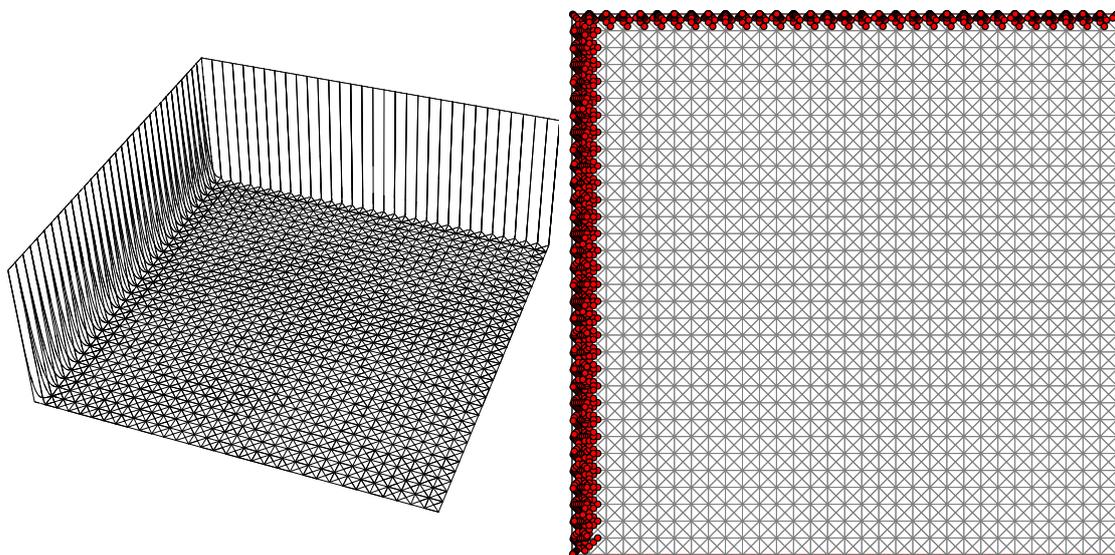


Figura 4.58: Elevação da solução do problema *skew-advection* (esquerda) e ilustração do refinamento baseado em faces (direita). Caso $\sigma = 100$.

final adaptado para o caso $\sigma = 0$. O número de graus de liberdade do problema global é 21.315, e observamos que os espaços duplicados se concentram ao longo da camada limite interna e na camada limite externa. Uma situação similar para o caso $\sigma = 1$ foi obtida (ver Figura 4.56), porém neste caso a camada limite externa sendo extensa, o número de graus de liberdade usados foi 22.155. Na Figura 4.57 podemos ver como a camada limite interna se atenua e a camada limite externa é muito mais forte. Neste caso temos 21.366 graus de liberdade. Finalmente na Figura 4.58 temos o caso para $\sigma = 100$, onde foram usados 23.220 graus de liberdade. Observamos que a camada limite interna desapareceu completamente, e observamos agora duas camadas limite externas. Em todos os casos relatados observamos que o estimador de erro *a-posteriori* induz uma adaptação de espaço precisamente onde estão posicionadas as camadas limite, validando desta forma a nova estratégia de adaptatividade.

4.6 Transporte passivo em um meio altamente heterogêneo

O modelo de transporte passivo representa a concentração de uma *especie* transportada pela hidrodinâmica de um fluido escoando através de um meio poroso (ver [20], página 29). Se considerarmos um meio altamente heterogêneo o modelo de transporte passivo define um problema com características multi-escalas.

Nesta seção estudamos o comportamento do método MHM para a equação reação-advecção-difusão, quando usado para aproximar a solução de um modelo de transporte passivo em um meio altamente heterogêneo. O modelo estudado é representado pelo problema de advecção-difusão-dispersão parabólico (4.76) acoplado ao problema de Darcy (4.78).

4.6.1 Problema de transporte

Consideremos o seguinte problema de advecção-difusão-dispersão parabólico:

Achar u tal que

$$\left. \begin{aligned} u_t + \nabla \cdot (-\epsilon \nabla u + \mathbf{v} u) &= 0 \text{ em } \Omega \times]0, T], \\ -\epsilon \nabla u \cdot \mathbf{n}^\Gamma &= 0 \text{ em } \Gamma_N \times]0, T], \\ u &= 1 \text{ em } \Gamma_D \times]0, T], \\ u &= 0 \text{ em } \Omega \times \{0\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

onde $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \Gamma : x = 0\}$, $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$ e T é o tempo final. O tensor de dispersão-difusão ϵ é dado pela expressão

$$\epsilon(\mathbf{x}) = (\alpha_m + |\mathbf{v}| \alpha_t) \mathcal{I} + (\alpha_l - \alpha_t) \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad (4.77)$$

onde $\alpha_m, \alpha_l, \alpha_t \in \mathbb{R}$ são parâmetros físicos do problema os quais satisfazem a relação $\alpha_m, \alpha_t \in]0, \alpha_l]$. A velocidade de Darcy \mathbf{v} é dada por $\mathbf{v} = -\mathcal{K} \nabla p$ onde p satisfaz o seguinte problema elíptico: *Achar p tal que*

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (-\mathcal{K} \nabla p) &= 0 \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{K} \nabla p \cdot \mathbf{n}^\Gamma &= 0 \text{ em } \Gamma|_{y=0} \cup \Gamma|_{y=1}, \\ p &= 1 \text{ em } \Gamma|_{x=0}, \\ p &= 0 \text{ em } \Gamma|_{x=3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

onde $\mathcal{K} = \kappa \mathcal{I}$ é o tensor heterogêneo uniformemente elíptico descrito na Figura 4.59. O problema (4.78) é resolvido usando o método MHM (com $l = 2$) apresentado no capítulo 2 e usando a malha na Figura 4.60. A solução p é pós-processada e obtemos a velocidade de Darcy $\mathbf{v} = -\mathcal{K} \nabla p$ com características multi-escalas (ver Figura 4.61). Este campo de velocidade é um dado para o problema de transporte (4.76).

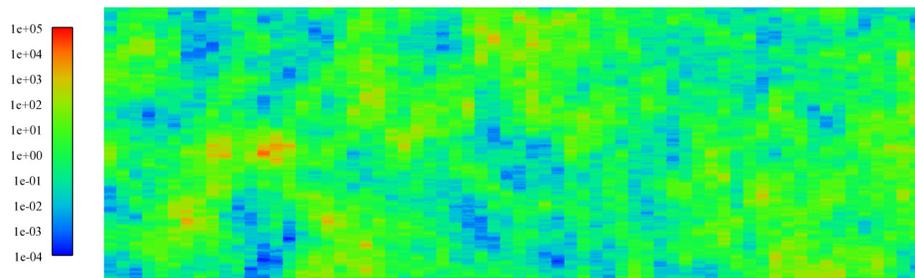


Figura 4.59: Permiabilidade com 64×256 valores.

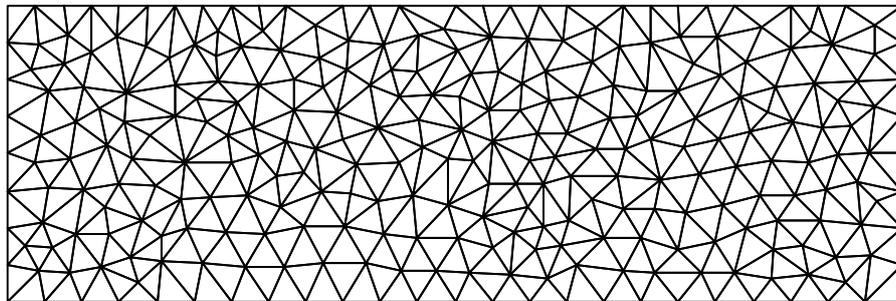


Figura 4.60: Malha regular não estruturada, 499 elementos.

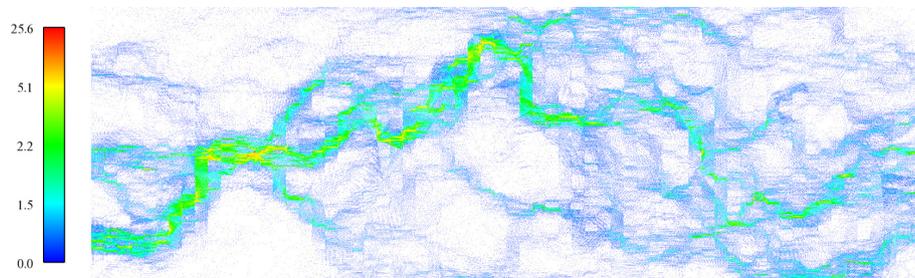


Figura 4.61: Campo da velocidade de Darcy multi-escalas.

4.6.2 Discretização temporal

Usamos uma discretização temporal de tipo *Euler implícito* (ver [50] página 156) para reduzir o problema parabólico (4.76) a uma coleção de problemas elípticos. Em seguida aplicamos o método MHM apresentado neste capítulo. Seja $N \in \mathbb{N}$ e defina $\Delta t = \frac{1}{N}$. Logo $0 = t_0 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$, onde

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t, \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

que define uma partição para o intervalo de tempo $[0, T]$. Introduzimos as aproximações $u^n \approx u(t_n)$ e $\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \approx u_t(t_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Assim, o problema parabólico (4.76) é aproximado resolvendo-se o problema de reação-advecção-difusão: *Achar u^n tal que*

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (-\epsilon \nabla u^n + \mathbf{v} u^n) + \frac{1}{\Delta t} u^n &= \frac{1}{\Delta t} u^{n-1} \text{ em } \Omega \times]0, T], \\ -\epsilon \nabla u^n \cdot \mathbf{n}^\Gamma &= 0 \text{ em } \Gamma_N \times]0, T], \\ u^n &= 1 \text{ em } \Gamma_D \times]0, T], \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, podemos aplicar o método MHM para uma aproximação de u^n em cada passo de tempo t_n . Note que no problema (4.79) o único dado que se altera ao longo do processo é o lado direito $\frac{1}{\Delta t} u^{n-1}$. Portanto, em termos computacionais, o problema se reduz a montar o lado direito do problema (4.79) em cada passo de tempo e resolver o sistema linear associado ao problema global.

4.6.3 Resultados numéricos

Usamos os parâmetros físicos $\alpha_m = 10^{-6}$, $\alpha_l = 1$, $\alpha_t = 10^{-3}$ e fixamos o tempo final $T = 3.75$. A variável temporal foi discretizada uniformemente com $N = 750$. Aplicamos o método MHM usando a malha grossa na Figura 4.60 e aproximamos o fluxo através das fases usando o espaço $\Lambda_F^{(11)} = \mathbb{D}^{2,4}(F)$, e o segundo nível é aproximado usando 1024 elementos do tipo \mathbb{P}^3 .

Após 25 iterações, observamos nas Figuras 4.62 e 4.63 que o comportamento

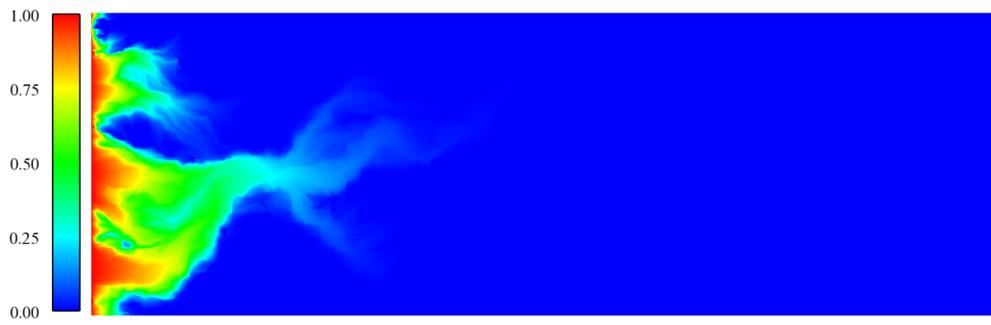


Figura 4.62: Saturação no tempo $t = 0.125$.

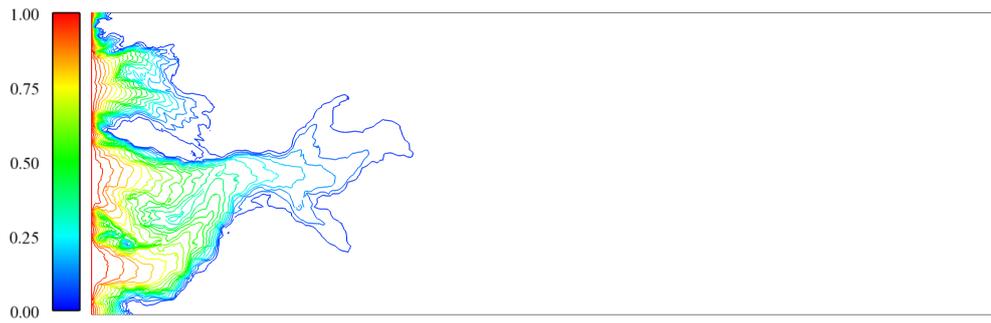


Figura 4.63: Saturação no tempo $t = 0.125$.

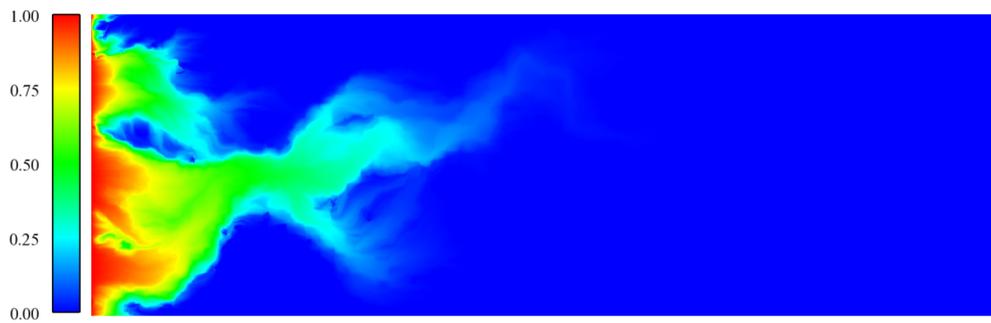


Figura 4.64: Saturação no tempo $t = 0.5$.

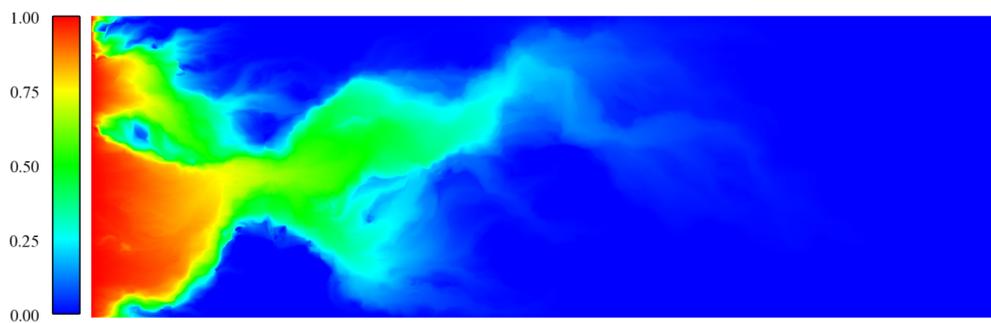


Figura 4.65: Saturação no tempo $t = 0.625$.

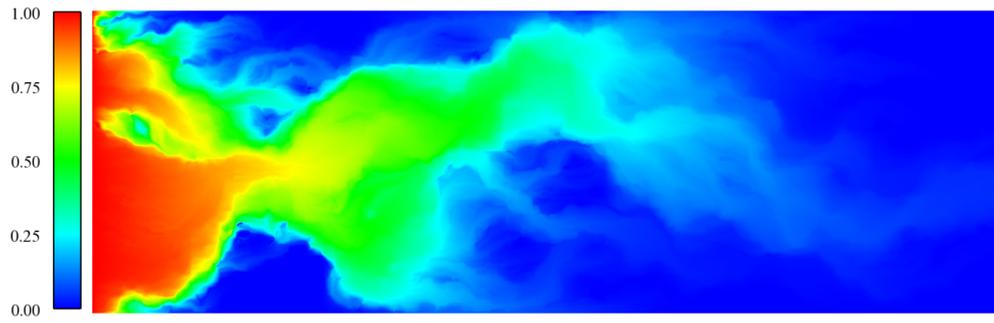


Figura 4.66: Saturação no tempo $t = 1.25$.

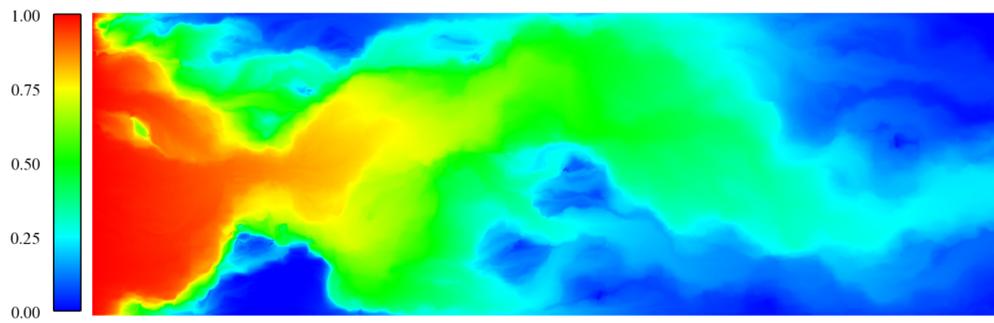


Figura 4.67: Saturação no tempo $t = 2.5$.

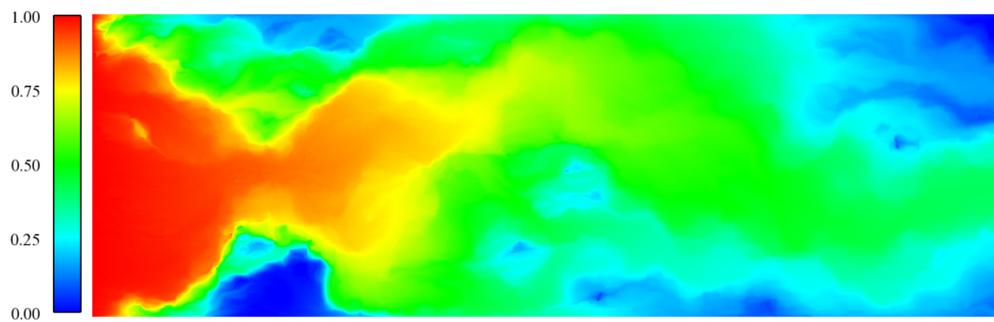


Figura 4.68: Saturação no tempo $t = 3.75$.

multi-escalas induzido pelo coeficiente de difusão ϵ e de advecção \mathbf{v} são bem capturados pelo método MHM, apresentado uma solução com um comportamento multi-escalas sem oscilações espúrias (ver Figura (4.63)).

Na sequência, apresentamos resultados numéricos que mostram a evolução no tempo da solução aproximada para o problema parabólico (4.76), (ver Figuras 4.64, 4.65, 4.66, 4.67 e 4.68). A solução apresenta características multi-escalas em cada passo de tempo. Como esperado a solução u apresenta valores maiores nas zonas em que o meio apresenta permeabilidade mais alta (ver Figura 4.59).

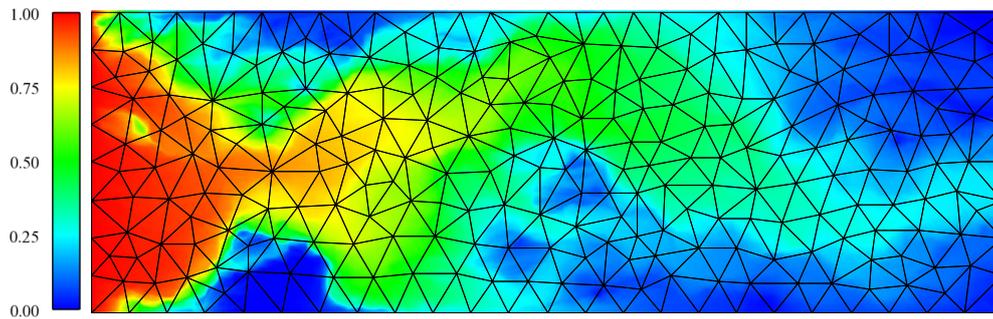


Figura 4.69: Saturação no tempo $t = 2.5$ sobre a malha usada.

Para mostrar a relação entre a solução usando o método MHM e a malha grossa usada apresentamos uma comparação nas Figuras 4.69 e 4.70. Novamente aqui podemos ver como o segundo nível captura de forma eficiente os aspectos multi-escalas. Nos zooms apresentados na Figura 4.70 podemos ver que o comportamento multi-escalas da saturação é perfeitamente “transmitido” através dos elementos e seguindo direção da velocidade \mathbf{v} . Concluimos que o método MHM é eficiente para a aproximação numérica de problemas de transporte com comportamento multi-escalas induzido pela natureza multi-escalas dos dados.

4.7 Conclusões

Neste capítulo foi proposta uma nova família de métodos de elementos finitos para a equação de reação-advecção-difusão, denominados de MHM, que capturam com precisão as pequenas escalas do problema induzidas tanto pela natureza multi-escalas dos dados quanto por um comportamento singularmente perturbado da

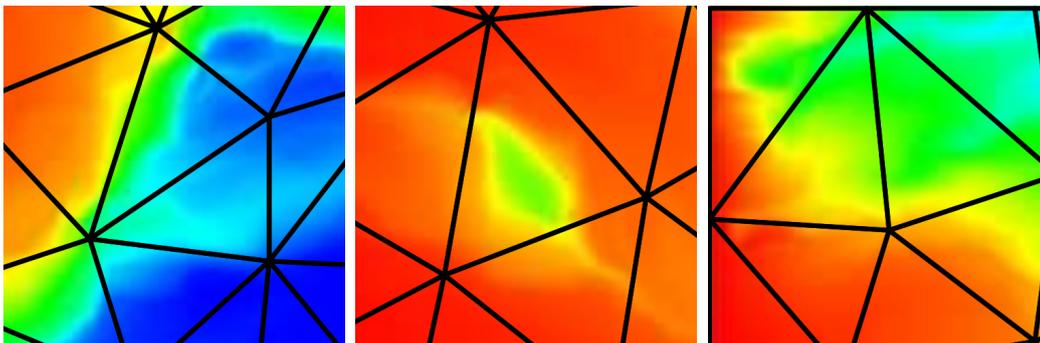


Figura 4.70: Diferentes ampliações da Figura 4.69.

própria solução. Os métodos MHM foram desenvolvidos usando uma estratégia de decomposição de espaços similar a usada no capítulo 2. A análise matemática dos métodos mostrou convergência ótima nas normas naturais e permitiu construir um estimador de erro *a-posteriori* localmente eficiente e confiável. Como consequência, foi possível definir uma nova estratégia de adaptatividade de espaços. Os resultados numéricos verificam os resultados teóricos e mostram a capacidade do método MHM em tratar de forma precisa heterogeneidades e coeficientes de alto contraste. A nova estratégia de adaptação mostrou-se bastante conveniente do ponto de vista prático. Assim o método MHM surge como uma alternativa atrativa para resolver problemas com aspectos multi-escalas e reativo e/ou advectivo dominantes em malhas grossas, além de possuir a característica de poder ser naturalmente adaptado a ser implementado em máquinas de processamento paralelo.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Este trabalho propôs uma nova família de métodos, denominados de MHM, para problemas caracterizados por conter múltiplas escalas. A metodologia MHM foi aplicada à solução do problema de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos e ao problema de reação-advecção-difusão. No primeiro caso, o método MHM se apresenta em sua forma mista, enquanto que no segundo caso o método é elíptico. Os métodos são caracterizados por uma representação em termos de uma coleção de problemas locais e uma formulação global definida no “esqueleto” da partição. Com base nesta decomposição da solução, os métodos MHM apresentam as seguintes características:

- Localidade, através da qual os aspectos multi-escalas são capturados de forma independente em cada elemento;
- Precisão em malhas grossas;
- Estrutura naturalmente paralelizável;
- Bem posto, com convergência ótima para as variáveis primal e dual nas normas naturais;
- Soluções localmente conservativas;
- Induz a construção de um estimador de erro *a-posteriori* baseado em faces, localmente eficiente e confiável;

- Possibilita a introdução de uma nova estratégia de *adaptatividade de espaços*.

Os resultados teóricos foram validados através de diversos experimentos numéricos que comprovaram tanto as taxas de convergência quanto a capacidade do método MHM em capturar os aspectos multi-escalas do problema. Os testes numéricos também apontaram formas eficientes (do ponto de vista prático), de se utilizar o MHM, a saber:

- No caso da equação de Darcy com coeficientes altamente heterogêneos foi suficiente utilizar aproximações polinomiais de baixa ordem e contínuos nas faces;
- No caso da equação de reação-advectação-difusão, a melhor opção custo-benefício consistiu em se utilizar aproximações polinomiais de baixa ordem definidos por partes em cada face.
- No caso particular da equação de reação-difusão obtivemos resultados notadamente superiores quando usadas funções enriquecidas não polinomiais para aproximar a variável dual (fluxo).
- O estimador de error a posteriori baseado em faces mostrou-se muito eficiente em dirigir um algoritmo de adaptação de malhas.
- A nova estratégia de *adaptatividade de espaços* mostrou-se uma alternativa muito eficiente e prática para se evitar a construção de uma nova malha adaptada. Tal processo tem grande apelo prático por evitar o uso de geradores de malha externos.

A partir dos resultados acima, propomos a seguir uma série de possíveis extensões teóricas e práticas dos métodos MHM:

- Análise da possível convergência uniforme do método MHM com respeito aos pequenos parâmetros dos modelos (por exemplo, o comportamento do

coeficiente de permeabilidade na equação de Darcy ou, do coeficiente de difusão na equação de transporte);

- Desenvolvimento e análise numérica de espaços de aproximação não polinomiais para o multiplicador de Lagrange (fluxo);
- Propor termos estabilizantes para o método MHM com o intuito de permitir o uso de elementos $\mathbb{P}^k(F)$ contínuos no “esqueleto” da partição, para aproximar o multiplicador de Lagrange;
- Extensão da metodologia MHM a modelos parabólicos ou hiperbólicos;
- Extensão do método MHM a problemas mistos lineares (por exemplo, equação de Stokes) e não lineares (por exemplo, equação de Navier-Stokes).
- Aplicação do método MHM à resolução de modelos acoplados (por exemplo, escoamentos multi-fásicos em meios porosos com acoplamento geomecânico). O objetivo é aplicar o mesmo método numérico a todas as equações que compõem o modelo acoplado.

Além disso, por suas características, o método MHM, é naturalmente paralelizável em máquinas massivamente paralelas, e logo um estudo de *speed-up* e comparação com outros métodos multi-escalas, seguirá naturalmente deste trabalho.

Concluimos que a família de métodos MHM proposta nesta tese constitui uma alternativa eficiente e inovadora para a simulação computacional de problemas com múltiplas escalas, desenvolvida dentro de um escopo teórico preciso e naturalmente adaptado a computação paralela. Deste ponto de vista, a extensão dos métodos MHM a modelos mais complexos deverá ter seu ponto de partida neste trabalho. Este trabalho de tese não se encerra em si e intenciona abrir novas perspectivas para a simulação computacional de problemas complexos com aspectos multi-escalas.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Abry, R. Baraniuk, P. Flandrin, R. Riedi, and D. Veitch. Multiscale nature of network traffic. **Signal Processing Magazine, IEEE**, 19(3):28–46, 2002.
- [2] S. Adamson, V. Astapenko, I. Chernysheva, V. Chorkov, M. Deminsky, G. Demchenko, A. Demura, A. Demyanov, N. Dyatko, A. Eletzki, A. Knizhnik, I. Kochetov, A. Napartovich, E. Rykova, L. Sukhanov, S. Umanskii, A. Vetchinkin, A. Zaitsevskii, and B. Potapkin. Multiscale multiphysics nonempirical approach to calculation of light emission properties of chemically active nonequilibrium plasma: application to ar-gai 3 system. **Journal of Physics D: Applied Physics**, 40(13):3857, 2007.
- [3] S. Agmon and National Science Foundation (U.S.). **Lectures on elliptic boundary value problems**. Van Nostrand mathematical studies. Van Nostrand, 1965.
- [4] A. Allendes, G. R. Barrenechea, E. Hernández, and F. Valentin. A two-level enriched finite element method for a mixed problem. **Mathematics of Computation**, 80(273):11–41, 2011.
- [5] T. Arbogast. Analysis of a two-scale, locally conservative subgrid upscaling for elliptic problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 42(2):576–598, 2005.
- [6] T. Arbogast and K. J. Boyd. Subgrid upscaling and mixed multiscale finite elements. **SIAM journal on Numerical Analysis**, 44(3):1150–1171, 2006.
- [7] S. J. Axler. **Linear Algebra Done Right**. Springer, 1997.

- [8] I. Babuška and J. E. Osborn. Generalized finite element methods: Their performance and their relation to mixed methods. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 20(3):510–536, 1983.
- [9] S.A. Baeurle. Multiscale modeling of polymer materials using field-theoretic methodologies: a survey about recent developments. **Journal of Mathematical Chemistry**, 46(2):363–426, 2009.
- [10] C. Baiocchi, F. Brezzi, and L. P. Franca. Virtual bubbles and galerkin-least-squares type methods (Ga.L.S.). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 105(1):125–141, 1993.
- [11] G. R. Barrenechea, L. P. Franca, and F. Valentin. A Petrov-Galerkin enriched method: a mass conservative finite element method for the Darcy Equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 196(21-24):2449–2464, 2007.
- [12] G. R. Barrenechea, L. P. Franca, and F. Valentin. A symmetric nodal conservative finite element method for the Darcy Equation. **SIAM J. Numerical Analysis**, 47(5):3652–3677, 2009.
- [13] F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini, and Süli E. Stabilization mechanisms in discontinuous galerkin finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 195(25 - 28):3293 – 3310, 2006.
- [14] F. Brezzi and M. Fortin. volume 15 of **Springer Series in Computational Mathematics**. 1991.
- [15] F. Brezzi and A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, 04(04):571–587, 1994.
- [16] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the

- incompressible navier-stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 32(32):199–259, 1982.
- [17] E. Burman and Fernández M. A. Finite element methods with symmetric stabilization for the transient convection-diffusion-reaction equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 198(33?36):2508–2519, 2009.
- [18] E. Burman and P. Hansbo. Edge stabilization for galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 193(15-16):1437–1453, 2004.
- [19] Z. Chen and T. Hou. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. **Mathematics of Computation**, 72(242):541–576, 2003.
- [20] Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media**. SIAM, 2006.
- [21] B. Cockburn, B. Dong, J. Guzmán, M. Restelli, and R. Sacco. A hybridizable discontinuous galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, 31(5):3827–3846, 2009.
- [22] B. Cockburn and J. Gopalakrishnan. A characterization of hybridized mixed methods for second order elliptic problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 42(1):283–301, 2004.
- [23] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, and R. Lazarov. Unified hybridization of discontinuous galerkin, mixed, and continuous galerkin methods for second order elliptic problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 47(2):1319–1365, 2009.
- [24] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. 1943.

- [25] L. Demkowicz and J. Gopalakrishnan. Analysis of the dpg method for the poisson equation. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 49(5):1788–1809, 2011.
- [26] H. Egger and J. Schöberl. A hybrid mixed discontinuous galerkin finite-element method for convection-diffusion problems. **IMA Journal of Numerical Analysis**, 30(4):1206–1234, 2010.
- [27] A. Ern and J. L. Guermond. **Theory and Practice of Finite Elements**. Number 159 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2004.
- [28] X. Fang, W. Jiang, S. Miao, N. Zhang, M. Xu, C. Ji, X. Chen, J. Wei, Z. Wang, and X. Wang. The multi-scale numerical modeling system for research on the relationship between urban planning and meteorological environment. **Advances in Atmospheric Sciences**, 21(1):103–112, 2004.
- [29] C. Farhat, I. Harari, and L. P. Franca. The discontinuous enrichment method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 190(48):6455–6479, 2001.
- [30] M. Farhloul and Mounim A. S. A mixed-hybrid finite element method for convection-diffusion problems. **Applied Mathematics and Computation**, 171(2):1037–1047, 2005.
- [31] H. Fernando, C. Harder, D. Paredes, and F. Valentin. Numerical multiscale methods for a reaction-dominated model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 201-204(0):228–244, 2012.
- [32] L. P. Franca and Russo A. Deriving upwinding, mass lumping and selective reduced integration by residual-free bubbles. **Applied Mathematics Letters**, 9:83–88, 1996.
- [33] L. P. Franca, S .L. Frey, and T. J. R. Hughes. Stabilized finite element methods. I. application to the advective-diffusive model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 95(2):253–276, 1992.

- [34] L. P. Franca, C. Harder, and F. Valentin. On a residual local projection method for the darcy equation. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, 347(17-18):1105–1110, 2009.
- [35] L. P. Franca, A. L. Madureira, and F. Valentin. Towards multiscale functions: enriching finite element spaces with local but not bubble-like functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 194:3006–3021, 2005.
- [36] L. P. Franca, J. V. A. Ramalho, and F. Valentin. Enriched finite element methods for unsteady reaction-diffusion problems. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 22(6):619–625, 2006.
- [37] L. P. Franca and F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 190(13-14):1785–1800, 2000.
- [38] A. T. A Gomes, D. Paredes, and F. Valentin. Supporting the perpetuation and reproducibility of numerical method publications. **Procedia Computer Science**, 4(0):688 – 696, 2011.
- [39] P. Grisvard. **Singularities in Boundary Value Problems**. Recherches en mathématiques appliquées. Masson, 1992.
- [40] C. Harder, D. Paredes, and F. Valentin. A family of multiscale hybrid-mixed finite element methods for the darcy equation with rough coefficients. **Journal of Computational Physics**, 245(0):107 – 130, 2013.
- [41] T. Y. Hou and X. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. **Journal of Computational Physics**, 134(1):169–189, 1997.
- [42] T. J. R. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei, and J. B. Quincy. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 166(1-2):3–24, 1998.

- [43] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 73(2):173–189, 1989.
- [44] W. W. Hwu. **GPU Computing Gems Emerald Edition**. Applications of GPU Computing Series. Elsevier Science, 2011.
- [45] P. Jenny, S. H. Lee, and H. A. Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. **Journal of Computational Physics**, 187(1):47–67, 2003.
- [46] P. Jenny, S. H. Lee, and H. A. Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. **Multiscale Modeling & Simulation**, 3(1):50–64, 2005.
- [47] K. F. Jensen, S. T. Rodgers, and R. Venkataramani. Multiscale modeling of thin film growth. **Current Opinion in Solid State and Materials Science**, 3(6):562–569, 1998.
- [48] R. Juanes and F. X. Dub. A locally conservative variational multiscale method for the simulation of porous media flow with multiscale source terms. **Computational Geosciences**, 12:273–295, 2008.
- [49] A. Kurganov and E. Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. **Journal of Computational Physics**, 160(1):241–282, 2000.
- [50] S. Larsson and V. Thomee. **Partial Differential Equations with Numerical Methods**. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2003.
- [51] S. Lee, C. Wolfsteiner, and H. Tchelepi. Multiscale finite-volume formulation for multiphase flow in porous media: black oil formulation of compressible, three-phase flow with gravity. **Computational Geosciences**, 12:351–366, 2008.

- [52] G. Leoni. **A First Course in Sobolev Spaces**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009.
- [53] A. L. Madureira, D. Q. Madureira, and Pinheiro. P. O. A multiscale numerical method for the heterogeneous cable equation. **Neurocomputing**, 77(1):48 – 57, 2012.
- [54] M. A. Murad and C. Moyne. A three-scale computational model of reactive pollutant transport in smectitic clays. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 22(8):875–891, 2006.
- [55] J.C. Nédélec. Mixed finite elements in R^3 . **Numerische Mathematik**, 35(3):315–341, 1980.
- [56] P. J. Park and T. Y. Hou. Multiscale numerical methods for singularly perturbed convection-diffusion equations. **International Journal of Computational Methods**, 01(01):17–65, 2004.
- [57] L. E. Payne and H. F. Weinberger. An optimal poincaré inequality for convex domains. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 5(1):286–292, 1960.
- [58] Theodore H. H. Pian. In **The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations**, volume 49 of **Academic Press Rapid Manuscript Reproduction**, pages 671–687. Academic Press New York, 1972.
- [59] Theodore H. H. Pian and P. Tong. Basis of finite element methods for solid continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1(1):3–28, 1969.
- [60] P. A. Raviart and J. M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In **Mathematical Aspects of Finite Element Methods**, volume 606 of **Lecture Notes in Mathematics**, pages 292–315. Springer Berlin Heidelberg, 1977.

- [61] P. A. Raviart and J. M. Thomas. Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. **Mathematics of Computation**, 31(138):391–413, 1977.
- [62] Ph. Renard and G. de Marsily. Calculating equivalent permeability: a review. **Advances in Water Resources**, 20(5-6), 1997.
- [63] A. Riaz and H. A. Tchelepi. Dynamics of vertical displacement in porous media associated with CO₂ sequestration. **SPE Journal**, 13(3):305–313, 2008.
- [64] R. K. Romeu and B. Notinger. Calculation of internodal transmissibilities in finite-difference models of flow in heterogeneous media. **Water Resources Research**, 31(4):943–959, 1995.
- [65] G. Sangalli. Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method. **Multiscale Modeling & Simulation**, 1(3):485–503, 2003.
- [66] G.C. Sih and J.Z. Zuo. Multiscale behavior of crack initiation and growth in piezoelectric ceramics. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, 34(2):123 – 141, 2000.
- [67] L. Taleb and A. Hauet. Multiscale experimental investigations about the cyclic behavior of the 304l ss. **International Journal of Plasticity**, 25(7):1359 – 1385, 2009.
- [68] D. Z. Turner, K. B. Nakshatrala, and K. D. Hjelmstad. A stabilized formulation for the advection-diffusion equation using the generalized finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 66(1):64–81, 2011.
- [69] E. Weina and B. Engquist. The heterogeneous multi-scale methods. **Communications in Mathematical Sciences**, 1:87–132, 2002.

- [70] E. Weinberg and M. Kaazempur. Transient, three-dimensional, multiscale simulations of the human aortic valve. **Cardiovascular Engineering**, 7(4):140–155, 2007.
- [71] J. Xu and L. Zikatanov. Some observations on babuška and brezzi theories. **Numerische Mathematik**, 94(1), 2003.
- [72] G. Yun and H. S. Park. A multiscale, finite deformation formulation for surface stress effects on the coupled thermomechanical behavior of nanomaterials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 97(41 – 42):3337 – 3350, 2008.
- [73] G.M. Zaslavsky, P.N. Guzdar, M. Edelman, M.I. Sitnov, and A.S. Sharma. Multiscale behavior and fractional kinetics from the data of solar wind-magnetosphere coupling. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 13(2):314 – 330, 2008.

Apêndice A

Resultados clássicos

A.1 Desigualdades

Lema A.1 Seja $\mathcal{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$ tal que exista $c_{\min}, c_{\max} > 0$ onde

$$c_{\min} |\xi|^2 \leq \xi^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \xi \leq c_{\max} |\xi|^2, \quad (\text{A.1})$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ e para todo $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) $\sqrt{c_{\min}} \leq \|\mathcal{K}\|_\infty \leq \sqrt{c_{\max}}$;

(2) Para $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathcal{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ é inversível, denotando $\mathcal{K}^{-1}(\mathbf{x}) := [\mathcal{K}(\mathbf{x})]^{-1}$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{c_{\max}}} \leq \|\mathcal{K}^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{c_{\min}}}.$$

Demonstração: Os argumentos aqui expostos utilizam a definição de ess sup , e logo a norma $\|\cdot\|_\infty$ pode ser escrita como

$$\|\mathcal{K}\|_\infty = \inf \left\{ a \in \mathbb{R} : \text{meas} \left\{ \mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \max_{|\mathbf{y}|=1} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \mathbf{y}} > a \right\} = 0 \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Para (1): Seja $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ de (A.1) notamos que $\mathcal{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ satisfaz

$$\sqrt{c_{\min}} \leq \sqrt{\mathbf{y}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \mathbf{y}} \leq \sqrt{c_{\max}}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{y}| = 1. \quad (\text{A.3})$$

Logo, usando as propriedades do max, temos

$$\sqrt{c_{\min}} \leq \max_{|\mathbf{y}|=1} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \mathbf{y}} \leq \sqrt{c_{\max}}, \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (\text{A.4})$$

A expressão em (A.4) implica que

$$\text{meas} \left\{ \mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \max_{|\mathbf{y}|=1} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \mathbf{y}} > \sqrt{c_{\max}} \right\} = 0,$$

logo, da definição (3.22) temos $\|\mathcal{K}\|_{\infty} \leq \sqrt{c_{\max}}$. Se supomos que $\|\mathcal{K}\|_{\infty} < \sqrt{c_{\min}}$ então é possível definir $c_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{c_{\min}} + \|\mathcal{K}\|_{\infty})$, implicando $\|\mathcal{K}\|_{\infty} < c_0 < \sqrt{c_{\min}}$, e assim usando a definição em (A.2) temos

$$\text{meas} \left\{ \mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \max_{|\mathbf{y}|=1} \sqrt{\mathbf{y}^T \mathcal{K}(\mathbf{x}) \mathbf{y}} > c_0 \right\} = 0,$$

o que contradiz (A.4) pois $\text{meas} \bar{\Omega} > 0$. Logo, $\|\mathcal{K}\|_{\infty} \geq \sqrt{c_{\min}}$.

Para (2): Seja $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ e defina $A_{\mathbf{x}} = \mathcal{K}(\mathbf{x})$. Supondo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ tal que $A_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = \mathbf{0}$, e usando a condição (A.1), temos que

$$c_{\min} |\mathbf{y}|^2 \leq \mathbf{y}^T A_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = 0,$$

então $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e portanto $A_{\mathbf{x}}$ é inversível com inversa $A_{\mathbf{x}}^{-1}$. Logo, podemos definir a função $\mathcal{K}^{-1} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ tal que $\mathcal{K}^{-1}(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{x}}^{-1}$ em cada $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Da definição de \mathcal{K} temos que $A_{\mathbf{x}}$ é uma matriz simétrica (logo $A_{\mathbf{x}}^{-1}$ também é uma matriz simétrica), e de (A.3) temos que $\mathbf{y}^T A_{\mathbf{x}} \mathbf{y} > 0$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Escolhendo $\mathbf{y} = A^{-1} \mathbf{z}$, para $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ arbitrário temos $\mathbf{z}^T A_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{z} > 0$. Então existe $A_{\mathbf{x}}^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ simétrica e inversível tal que $A_{\mathbf{x}}^{-\frac{1}{2}} A_{\mathbf{x}}^{-\frac{1}{2}} = A_{\mathbf{x}}^{-1}$ (ver [7], página 145). Notemos que (A.3) pode ser escrita equivalentemente como

$$\sqrt{c_{\min}} \leq \frac{\sqrt{\mathbf{y}^T A_{\mathbf{x}} \mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|} \leq \sqrt{c_{\max}}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{y} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A.5})$$

Seja $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ arbitrário, e escolha $\mathbf{y} = A_{\mathbf{x}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ em (A.5). Logo obtemos que

$$\sqrt{c_{\min}} \leq \frac{|\mathbf{z}|}{\sqrt{\mathbf{z}^T A_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{z}}} \leq \sqrt{c_{\max}}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{A.6})$$

e assim, mostramos a estimativa

$$\frac{1}{\sqrt{c_{\max}}} \leq \frac{\sqrt{\mathbf{z}^T \mathcal{K}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|} \leq \frac{1}{\sqrt{c_{\min}}}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{A.7})$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{\sqrt{c_{\max}}} \leq \sqrt{\mathbf{z}^T \mathcal{K}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{z}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_{\min}}}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{z}| = 1. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, em (A.8) repetimos o procedimento feito no item (1) para obter a estimativa do item (2). ■

Teorema A.2 Seja K um domínio limitado e convexo e $v \in H^1(K) \cap L_0^2(K)$. Então a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\|v\|_{0,K} \leq \frac{h_K}{\pi} \|\nabla v\|_{0,K}, \quad (\text{A.9})$$

onde h_K representa o diâmetro de K .

Demonstração: ver [57]. ■

Teorema A.3 Seja K um domínio limitado e $v \in H^1(K)$. Existe uma constante $C > 0$, independente de h_K , tal que

$$\|v\|_{0,\partial K} \leq C \left[\frac{1}{h_K} \|v\|_{0,K}^2 + h_K \|\nabla v\|_{0,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.10})$$

onde h_K representa o diâmetro de K .

Demonstração: ver [3], página 40. ■

Teorema A.4 Seja K um domínio limitado, $F \subset \partial K$ e $v \in H^2(K)$. Existe uma constante $C > 0$, independente de h_K , tal que

$$\|\nabla v \cdot \mathbf{n}_F\|_{0,F} \leq C \left[\frac{1}{h_K} \|\nabla v\|_{0,K}^2 + h_K |v|_{2,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.11})$$

onde h_K representa o diâmetro de K .

Demonstração: ver [3], Teorema 3.11. ■

Teorema A.5 Seja $K \in \mathcal{T}_h$ e $v_h \in H^2(\mathcal{T}_h)$ uma função que pertence a um espaço de dimensão finita. Então existe $C > 0$, independente de h_K tal que

$$|v_h|_{2,K} \leq \frac{C}{h_K} \|\nabla v_h\|_{0,K}. \quad (\text{A.12})$$

Demonstração: Ver [27], página 75. ■

A.2 Resultados abstratos

Consideremos o problema da existência e unicidade de solução do seguinte problema misto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } (u, p) \in W \times Q \text{ tal que} \\ B(u, p; v, q) = F(v, q) \\ \text{para todo } (v, q) \in W \times Q, \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

onde W e Q são espaços de Banach reflexivos munidos com as normas $\|\cdot\|_W$ e $\|\cdot\|_Q$, respectivamente. Assumimos que a forma bilinear $B : (W \times Q) \times (W \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e está definida por

$$B(u, p; v, q) := a(u, v) + b(v, p) + b(u, q),$$

onde $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : W \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ são formas bilineares limitadas, e que a forma linear $F : W \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e está definida por

$$F(u, p) := f(u) + g(p),$$

onde $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ são formas lineares limitadas. Definimos a norma do espaço produto como

$$\|(q, w)\|_{W \times Q} := \|w\|_W + \|q\|_Q. \quad (\text{A.14})$$

O problema (A.13) está bem posto se e somente se,

(1) a seguinte condição de sobrejetividade é satisfeita: Existe $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{(u,p) \in W \times Q} \sup_{(w,q) \in W \times Q} \frac{B(u, p; w, q)}{\|(u, p)\|_{W \times Q} \|(w, q)\|_{W \times Q}} \geq \beta;$$

(2) a seguinte condição de injetividade é satisfeita: Seja $(u, p) \in W \times Q$, então

$$[B(u, p; w, q) = 0, \forall (w, q) \in W \times Q] \Rightarrow [(u, p) = (0, 0)].$$

Sabemos que (ver [27], página 101) as condições apresentadas em (1) e (2) são condições necessárias e suficientes sobre as formas bilineares $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$. A suficiência é revisitada no seguinte Lema de forma que as constantes envolvidas tenham uma menor dependência com respeito de \mathcal{K} do que a versão apresentada em [22]. Lembramos que, devido ao fato de $a(\cdot, \cdot)$ ser um operador limitado podemos definir sua norma, como

$$\|a\| := \sup_{u, v \in W} \frac{a(u, v)}{\|u\|_W \|v\|_W} < +\infty. \quad (\text{A.15})$$

Teorema A.6 Sejam $(W, \|\cdot\|_W)$ e $(Q, \|\cdot\|_Q)$ espaços de Banach reflexivos. Assumimos que o operador bilinear limitado $B : (W \times Q) \times (W \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido

por

$$B(u, p; w, q) := a(u, v) + b(v, p) + b(u, q),$$

onde $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : W \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ são formas bilineares limitadas, com $b(\cdot, \cdot)$ simétrica. Consideremos o espaço $\mathcal{N} := \{w \in W : b(w, q) = 0, \forall q \in Q\}$. Assuma que:

(a) Existe $c_a > 0$ tal que,

$$c_a \|w\|_W \leq \sup_{v \in \mathcal{N}} \frac{a(w, v)}{\|v\|_W}, \forall w \in \mathcal{N};$$

(b) Existe $c_b > 0$ tal que,

$$c_b \|q\|_Q \leq \sup_{w \in W} \frac{b(w, q)}{\|w\|_W}, \forall q \in Q.$$

Então,

(1) Existe $\beta > 0$ tal que,

$$\inf_{(u,p) \in W \times Q} \sup_{(w,q) \in W \times Q} \frac{B(u, p; w, q)}{\|(u, p)\|_{W \times Q} \|(w, q)\|_{W \times Q}} \geq \beta,$$

onde $\beta > 0$ é dado pela expressão

$$\beta := \left[2 \max \left\{ \frac{1}{c_b} + \frac{1}{c_a} \left(1 + \frac{\|a\|}{c_b} \right), \frac{1}{c_b} \left(1 + \|a\| \left(\frac{1}{c_b} + \frac{1}{c_a} \left(1 + \frac{\|a\|}{c_b} \right) \right) \right) \right\} \right]^{-1}.$$

(2) Seja $(u, p) \in W \times Q$, então

$$[B(u, p; w, q) = 0, \forall (w, q) \in W \times Q] \Rightarrow [(u, p) = (0, 0)].$$

Se $(W, (\cdot, \cdot)_W)$ e $(Q, (\cdot, \cdot)_Q)$ são espaços de Hilbert, então

$$\beta := \left[2 \max \left\{ \left(1 + \frac{\|a\|}{c_a} \right), \frac{1}{c_b} \left(1 + \frac{1}{c_a} \left(1 + \frac{\|a\|}{c_a} \right) \right) \right\} \right]^{-1}.$$

Demonstração: No caso em que $(W, \|\cdot\|_W)$ e $(Q, \|\cdot\|_Q)$ são espaços de Banach reflexivos, a demonstração é dada em [27], página 101. A seguir, estudamos o caso em que $(W, (\cdot, \cdot)_W)$ e $(Q, (\cdot, \cdot)_Q)$ são espaços de Hilbert, seguindo os passos propostos em [71]. Considere as transformações lineares $\mathbf{A} : W \rightarrow W$ e $\mathbf{B} : W \rightarrow Q$, definidas por:

- $(\mathbf{A}u, v)_W = a(u, v), \forall u, v \in W;$
- $(\mathbf{B}v, q)_Q = b(v, q), \forall v \in W, \forall q \in Q.$

Note que $\ker \mathbf{B} = \mathcal{N}$. Da decomposição $W = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$ temos que $u \in W$ pode escrever-se como $u = u_0 + u_1 \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$. Considere a projeção $\mathbf{N} : W \rightarrow \mathcal{N}$ e as transformações $\mathbf{A}_0 = \mathbf{N}\mathbf{A}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{N}$. Observe que as condições (a), (b) e (c) fazem com que os operadores \mathbf{A}_0 e $\mathbf{B}|_{\mathcal{N}^\perp}$ sejam isomorfismos. Logo, existe $u_0 \in \mathcal{N}$, $u_1 \in \mathcal{N}^\perp$ e $p \in Q$ tais que

- $\mathbf{A}_0 u_0 = \mathbf{N}(f - \mathbf{A}u_1);$
- $\mathbf{B}u_1 = g;$
- $\mathbf{B}^T p = f - \mathbf{A}u = (\mathbf{I} - \mathbf{N})(\mathbf{I} - \mathbf{P})(f - \mathbf{A}u_1).$

Observe que $\|\mathbf{A}_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{N})} \leq \frac{1}{c_a}$, $\|\mathbf{B}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Q, \mathcal{N}^\perp)} \leq \frac{1}{c_b}$ e $\|\mathbf{I} - \mathbf{P}\| \leq \frac{\|a\|}{c_a}$, logo, usando as identidades acima, temos

$$\begin{aligned} \|(u, p)\|_{W \times Q} &\leq \|u_0\|_W + \|u_1\|_W + \|p\|_Q \\ &\leq \|u_0\|_W \|f\|_W + \|\mathbf{A}u_0\|_W + \frac{\|a\|}{c_a} [\|f\|_W + \|\mathbf{A}u_0\|_W] \\ &\leq \frac{1}{c_b} \left(1 + \frac{1}{c_a} \left(1 + \frac{\|a\|}{c_a}\right)\right) \|g\|_Q + \left(1 + \frac{\|a\|}{c_a}\right) \|f\|_W. \end{aligned}$$

o resultado segue de observar que a melhor constante β satisfaz a condição

$$\beta \geq \left[2 \max \left\{ \left(1 + \frac{\|a\|}{c_a}\right), \frac{1}{c_b} \left(1 + \frac{1}{c_a} \left(1 + \frac{\|a\|}{c_a}\right)\right) \right\}\right]^{-1}.$$

■

Assuma agora $b(\cdot, \cdot) \equiv 0$. Reescrevemos o problema misto A.13 como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Achar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = (f, v), \\ \text{para todo } v \in V. \end{array} \right\} \quad (\text{A.16})$$

Em seguida apresentamos um resultado clássico que consiste em uma condição suficiente para a existência e unicidade de solução para o problema (A.16). Este Lema pode ser interpretado como um caso particular do Teorema de Banach-Nečas-Babuška (ver [27], página 85).

Lema A.7 (Lax-Milgram) Seja V um espaço de Hilbert, e $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear, contínua e coerciva, i.e.:

(a) existe $C > 0$ tal que

$$a(u, v) \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

(b) existe $\beta > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Assuma f no espaço dual de V . Então, o problema (A.16) é bem posto e a seguinte estimativa ocorre:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{V'},$$

onde $\|\cdot\|_{V'}$ representa a norma do espaço dual de V .

Demonstração: Ver [27], página 83. ■

Apêndice B

Considerações de implementação

O método MHM apresentado e analisado nesta tese propõe-se a aproximar a solução de problemas com comportamento multi-escalas. A metodologia empregada pelo método MHM está baseada na captura dos aspectos multi-escalas do problema através de problemas locais. Tais problemas locais são independentes e podem ser resolvidos paralelamente usando uma estratégia de dois níveis. Neste apêndice tratamos dos temas computacionais relativos tanto à (potencial) forma de paralelização do algoritmo, quanto à estratégia de dois níveis utilizada.

Os algoritmos aqui apresentados são aplicáveis tanto a versão do método MHM para a equação de Darcy quanto à equação reação-advecção-difusão. Denotamos por $H > 0$ o tamanho característico da malha global \mathcal{T}_H e por $h > 0$ o tamanho característico da malha $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(K)$ usada no segundo nível de cada elemento $K \in \mathcal{T}_H$.

B.1 Problemas locais

Os problemas locais associados ao método MHM são resolvidos numericamente usando o método de Galerkin clássico de alta ordem. Em cada $K \in \mathcal{T}_h$ usamos o espaço de aproximação

$$V_h(K) := \{v_h \in \mathcal{C}^0(K) : v_h|_{K_h} \in \mathbb{P}^k(K_h), K_h \in \mathcal{T}_h(K)\}, \quad (\text{B.1})$$

com $k \in \mathbb{N}$, ou o espaço de aproximação $V_h^0(K) := V_h(K) \cap L_0^2(K)$, quando necessário. Denotaremos por a_K indistintamente a forma bilinear associada aos problemas locais para resolver a equação de Darcy ou para resolver a equação reação-advectação-difusão. Para a equação de Darcy temos que $a_K : V_h^0(K) \times V_h^0(K) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$a_K(u_h, v_h) := (\mathcal{K} \nabla u_h, \nabla v_h)_K,$$

a qual está associada aos problemas locais (2.17) e (2.18). Para a equação reação-advectação-difusão $a_K : V_h(K) \times V_h(K) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$a_K(u_h, v_h) := (\epsilon \nabla u_h, \nabla v_h)_K + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u_h, v_h)_K - \frac{1}{2} (u_h, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla v_h)_K + \frac{1}{2} ((\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + 2\sigma) u_h, v_h)_K,$$

a qual está associada aos problemas locais (4.15) e (4.16). Considere $B_K = \{\phi_1, \dots, \phi_{N_K}\}$ a base canônica para $V_h(K)$. Do ponto de vista local, é necessário montar apenas uma matriz que denominamos $AK = \{AK_{ij}\}$, a qual está definida através das suas componentes:

$$AK_{ij} := a_K(\phi_j, \phi_i), \forall i, j = 1, \dots, N_K.$$

Seja $F \subset \partial K$ uma aresta (ou sub-aresta, ver definição (4.40)). Consideremos $B_F := \{\psi_1, \dots, \psi_{l+1}\}$ a base canônica do espaço $\mathbb{P}^l(F)$. Defina o vetor $BF^{(i)} := \{BF_j^{(i)}\}$, para cada $i = 1, \dots, l+1$, através das suas componentes:

$$BF_j^{(i)} = -(\psi_i, \phi_j)_F, \forall j = 1, \dots, N_K.$$

Finalmente, defina o vetor $Bf = \{Bf_j\}$ através das sua componentes:

$$Bf_j = (f, \phi_j)_K, \forall j = 1, \dots, N_K.$$

Para os problemas locais associados ao método MHM para a equação de Darcy devemos adicionar uma linha e uma coluna à matriz AK , a saber,

$$AK_{N_K+1,j} = AK_{j,N_K+1} := \frac{1}{|K|} \int_K \phi_j, \forall j = 1, \dots, N_K, \text{ e } AK_{N_K+1,N_K+1} = 0,$$

e uma componente nula a cada vetor

$$BF_{N_K+1}^{(i)} = 0, \text{ e } Bf_{N_K+1} = 0.$$

Considerando a representação local da forma bilinear, pode-se reescrever

$$a_K(\phi_j, \phi_i) = \sum_{K_h \in \mathcal{T}_h(K)} a_{K_h}(\phi_j|_{K_h}, \phi_i|_{K_h}),$$

onde $a_{K_h} = a_K|_{K_h \times K_h}$. Seja $K_h \in \mathcal{T}_h(K)$, pela natureza local das funções de base $\phi_1, \dots, \phi_{N_K}$, sabemos que existe um número finito delas com suporte em K_h dado por, $N_{K_h} = (k+1)^2$, se K_h é um quadrilátero, e por $N_{K_h} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ se K_h é um triângulo.

De forma similar, denotamos por $N_{K_h \cap F}$ o número de funções de base com suporte em $K_h \cap F$. Como este número da geometria da malha $\mathcal{T}_h(K)$, não podemos determiná-lo a priori. Note que para $K_h \cap F = \emptyset$ temos $N_{K_h \cap F} = 0$. Assim, a montagem e resolução dos problemas locais pode ser resumida no algoritmo 2, onde $S_F^K = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^{\partial K})$ representa o *sinal* associado à face $F \in \mathcal{E}^{\partial K}$ do elemento $K \in \mathcal{T}_h$.

B.2 Problema global

Os problemas locais descritos na seção 2 são usados pelo método MHM em um problema global ((2.29) para a equação de Darcy e (4.37) para a equação reação-advecção-difusão) o qual considera todos os elementos da malha $K \in \mathcal{T}_H$. No algoritmo 3 apresentamos uma parte de processo de montagem da matriz global a qual pode ser expressa localmente. Finalmente, no algoritmo 4 é apresentado o cálculo da solução usando o método MHM. Observe que o método MHM é

Algoritmo 2: SOLVER_LOCAL

```
1 Entrada:  $K$ ;  
2 para  $K_h \in \mathcal{T}_h(K)$  faça  
3   para  $i = 1 : N_{K_h}$  faça  
4     para  $j = 1 : N_{K_h}$  faça  
5        $AK_h(i, j) = a_{K_h}(\phi_j, \phi_i)$   
6     fim  
7      $Bf_h(i) = (f, \phi_i)_{K_h}$   
8      $AK_h(i, N_{K_h} + 1) = \frac{1}{|K|} \int_{K_h} \phi_i$ ; % Apenas para Darcy  
9      $AK_h(N_{K_h} + 1, i) = \frac{1}{|K|} \int_{K_h} \phi_i$ ; % Apenas para Darcy  
10  fim  
11   $AK_h(N_{K_h} + 1, N_{K_h} + 1) = 0$ ; % Apenas para Darcy  
12   $Bf_h(N_{K_h} + 1) = 0$ ; % Apenas para Darcy  
13  MONTAGEM:  $AK \leftarrow AK_h$ ;  $Bf \leftarrow Bf_h$ ;  
14  para  $F \subset \partial K$  faça  
15    para  $i = 1 : l + 1$  faça  
16      para  $j = 1 : N_{K_h \cap F}$  faça  
17         $BF_h^{(i)}(j) = -S_F^K(\psi_i, \phi_j)_{F \cap K_h}$ ;  
18      fim  
19       $BF_h^{(i)}(N_{K_h} + 1) = 0$ ; % Apenas para Darcy  
20      MONTAGEM:  $BF^{(i)} \leftarrow BF_h^{(i)}$ ;  
21    fim  
22  fim  
23 fim  
24 RESOLVE:  $AK u_f = Bf$ ;  
25 para  $F \subset \partial K$  faça  
26   para  $i = 1 : l + 1$  faça  
27     RESOLVE:  $AK \eta_F^{(i)} = BF^{(i)}$ ;  
28   fim  
29 fim  
30 Saída:  $\eta$ ;  $u_f$ ;
```

naturalmente paralelizável.

B.3 Discretização temporal

Considere o problema de reação-advecção-difusão-dispersão apresentado no capítulo 4. A discretização temporal (4.79) mostra que não é necessário calcular todos os problemas locais a cada passo de tempo ou montar novamente a matriz global. De fato, modificamos o algoritmo 2 para armazenar e disponibilizar todas as matrizes locais $\{AK\}_{K \in \mathcal{T}_H}$, e no algoritmo 5 apresentamos uma modificação do

Algoritmo 3: SALTOS_LOCAL

```
1 Entrada:  $K; \eta; u_f;$ 
2 para  $K_h \in \mathcal{T}_h(K)$  faça
3   para  $F \in \partial K$  faça
4     para  $j = 1 : l + 1$  faça
5       para  $E \subset \partial K$  faça
6         para  $i = 1 : l + 1$  faça
7            $J\eta_{E,F}^{(i,j)} = -S_F^K(\eta_E^{(i)}, \psi_j)_F$ 
8         fim
9       fim
10       $Jf_F^{(j)} = S_F^K(u_f, \psi_j)_F;$ 
11       $J1_F^{(j)} = -S_F^K(1_K, \psi_j)_F;$  % Apenas para Darcy
12    fim
13  fim
14 fim
15 Saída:  $J\eta; Jf;$  % Apenas para RAD
16 Saída:  $J\eta; Jf; J1;$  % Apenas para Darcy
```

Algoritmo 4: GLOBAL

```
1 Entrada: DATA PROBLEM
2 para  $K \in \mathcal{T}_H$  faça em paralelo
3    $\{\eta^K, u_f^K\} = \text{SOLVER\_LOCAL}(K);$ 
4    $\{A^K, b_f^K\} = \text{SALTOS\_LOCAL}(\eta^K, u_f^K);$  % Apenas para RAD
5    $\{A^K, b_f^K, B^K\} = \text{SALTOS\_LOCAL}(\eta^K, u_f^K);$  % Apenas para Darcy
6    $f_0^K = (f, 1_K)_K;$  % Apenas para Darcy
7 fim
8 MONTAGEM:  $A \leftarrow A^K; b \leftarrow b^K;$ 
9 MONTAGEM:  $B \leftarrow B^K; f_0 \leftarrow f_0^K;$  % Apenas para Darcy
10 RESOLVE:  $A\lambda_H = b;$  % Apenas para RAD
11 RESOLVE:  $[A \ B^T; B \ 0][\lambda_H; u_0] = [-f_0; b];$  % Apenas para Darcy
12 para  $K \in \mathcal{T}_H$  faça
13    $u_K^{\lambda_H} = \sum_{F \subset \partial K} \langle \lambda_H^F, \eta_F^K \rangle$ 
14 fim
15  $u_H = u^{\lambda_H} + u_f;$ 
16  $u_H = u_H + u_0;$  % Apenas para Darcy
17 Saída:  $u_H;$ 
```

algoritmo 3 com a finalidade de calcular os saltos apenas da função que contribuirá para o lado direito do sistema linear. Com isto, o método MHM usado sobre a discretização temporal de um problema parabólico pode ser representado pelo algoritmo 6.

Algoritmo 5: SALTOS_LOCAL_0

```
1 Entrada:  $K; v;$ 
2 para  $K_h \in \mathcal{T}_h(K)$  faça
3   para  $F \in \partial K$  faça
4     para  $j = 1 : l + 1$  faça
5        $Jv_F^{(j)} = S_F^K(v, \psi_j)_F;$ 
6     fim
7   fim
8 fim
9 Saída:  $Jv;$ 
```

Algoritmo 6: DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

```
1 Entrada: DATA PROBLEM
2 para  $K \in \mathcal{T}_H$  faça em paralelo
3    $\{\eta^K, u_f^K, AK\} = \text{SOLVER\_LOCAL}(K);$ 
4    $\{A^K, b_f^K\} = \text{SALTOS\_LOCAL}(\eta^K, u_f^K);$ 
5 fim
6 MONTAGEM:  $A \leftarrow A^K; b \leftarrow b^K;$ 
7 % Loop temporal
8 para  $n = 1 : N$  faça
9   para  $K \in \mathcal{T}_H$  faça
10    para  $K_h \in \mathcal{T}_h$  faça
11      para  $i = 1 : N_{K_h}$  faça
12         $Bu_h(i) = (u_H^{n-1}, \phi_i)_{K_h}$ 
13      fim
14    fim
15    MONTAGEM:  $Bu \leftarrow Bu_h;$ 
16    RESOLVE:  $AKu_{u_H}^K = Bu;$ 
17     $b_{n-1}^K = \text{SALTOS\_LOCAL\_0}(u_{u_H}^K);$ 
18  fim
19  MONTAGEM:  $b_{n-1} \leftarrow b_{n-1}^K;$ 
20  RESOLVE:  $A\lambda_H = b + b_{n-1};$ 
21  para  $K \in \mathcal{T}_H$  faça
22     $u_K^{\lambda_H} = \sum_{F \subset \partial K} \langle \lambda_H^F, \eta_F^K \rangle$ 
23  fim
24   $u_H^n = u^{\lambda_H} + u_{u_H} + u_f;$ 
25 fim
26 Saída:  $u_H^N;$ 
```

B.4 Desempenho

Um ponto fundamental a ser estudado do método MHM é o desempenho computacional. O método MHM foi desenvolvido pensando na sua implementação

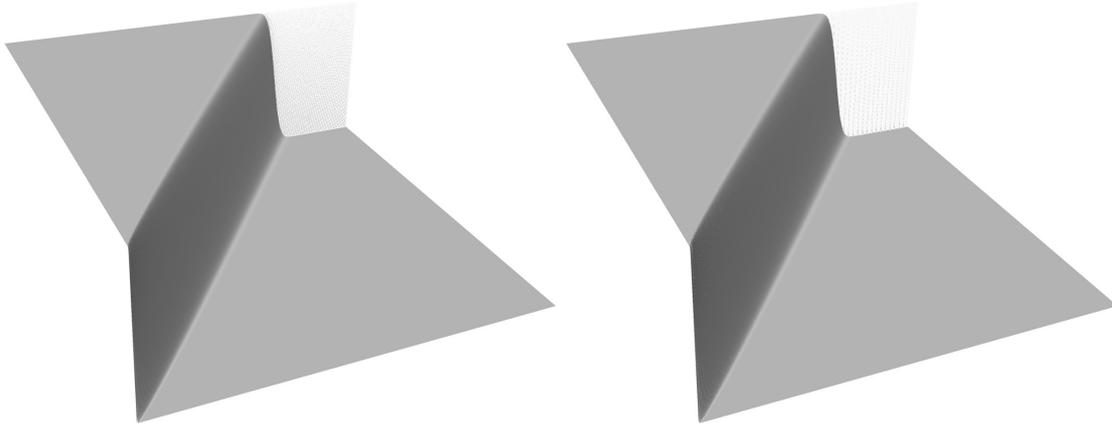


Figura B.1: Elevação da solução obtida com o método de Galerkin (esquerda) e com o método MHM (direta).

em máquinas massivamente paralelas (ver algoritmo 4), onde se espera que se obtenha o desempenho teórico ideal (*speed-up* igual ao número de elementos na malha \mathcal{T}_H). Nesta tese nos limitamos ao estudo do custo computacional devido à implementação sequencial do método MHM. Neste caso, o método MHM apresenta vantagens relativas ao tamanho da matriz global a ser resolvida, e logo a um gerenciamento de memória mais eficiente.

Na tabela B.1 comparamos os tempos de execução do método de Galerkin usado em uma malha de aproximadamente 1 milhão de elementos \mathbb{P}^3 com os tempos de execução do método MHM usado em uma malha de aproximadamente 16 mil elementos. No segundo nível usamos 64 elementos \mathbb{P}^3 e o multiplicador de Lagrange foi interpolado por quatro funções polinomiais de ordem 2 em cada aresta. Os graus de liberdade usados no primeiro nível são representados por N_1 e os empregados no segundo nível por N_2 (vale apenas para o método MHM). Este experimento numérico foi implementado usando o ambiente de programação interpretada MATLAB e rodado em uma máquina com processador Core 2 duo de 3,06 GHz e com 8GB de memória RAM. Todos os processos foram executados sequencialmente. O excessivo requerimento de memória do método de Galerkin fez com que a memória disponível fosse insuficiente para resolver o sistema linear resultante, isto foi traduzido em um longo tempo de resolução do sistema linear. Por outro lado, o

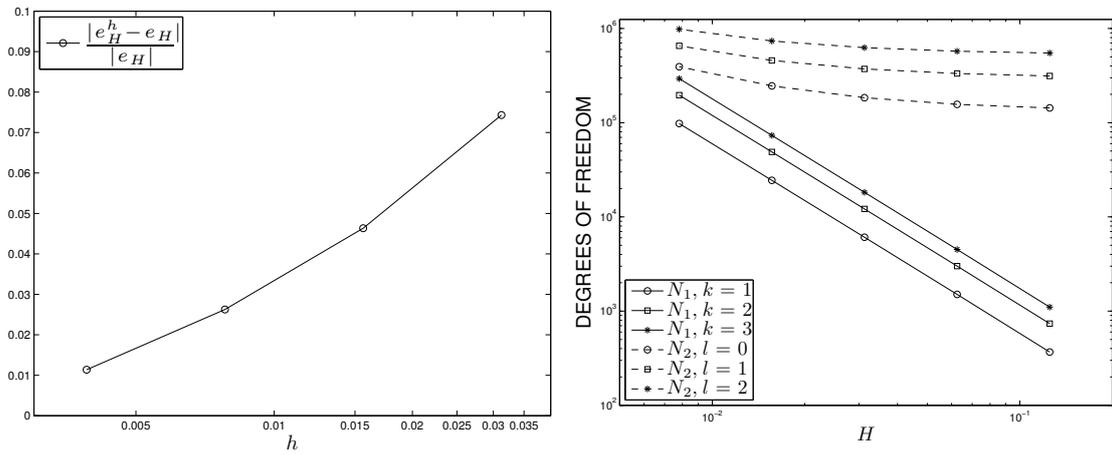


Figura B.2: Influência de h no erro do método (esquerda) e relação de graus de liberdade para h fixo.

método MHM usando um número similar de graus de liberdade mostrou um uso de memória muito mais eficiente e um tempo de execução significativamente menor. Os resultados numéricos obtidos pelas duas estratégias não apresentam diferenças significativas (ver Figura B.1). Observe que a maior parte do tempo gasto pelo método MHM está na montagem da matriz (resolução de problemas) locais. Logo uma paralelização massiva deste procedimento poderia reduzir este tempo a uma fração de segundo, faltando considerar “apenas” o tempo de comunicação de dados (por exemplo entre um dispositivo GPU e a memória do hospedeiro, ver [44]). Comparações do erro de aproximação e tempo de execução, entre o método MHM e métodos clássicos, assim como curvas de *speed-up* para implementações paralelas do método MHM serão apresentadas em trabalhos futuros.

Em seguida comentamos considerações importantes com respeito da influência do tamanho da discretização do segundo nível h .

O método MHM apresenta convergência ótima desde que as funções de base multi-escalas sejam bem aproximadas pelo método de segundo nível. Logo, a escolha de h tem influência tanto na qualidade da solução quanto no custo computacional do método MHM. Na Figura B.2 (esquerda) mostramos a influência do h no erro da solução calculada com o método MHM. Assumimos que o erro

Tabela B.1: Custo computacional para o método MHM e para o método de Galerkin.

método	N_1	N_2	Δt montagem	Δt solver	Δt total
GALERKIN	4.721×10^6	0	24.349%	75.650%	4.690×10^3 s
MHM	2.933×10^5	5.324×10^6	97.973%	2.047%	3.751×10^3 s

$e_H = \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - u_H\|_{1,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ corresponde ao erro calculado usando um segundo nível “exato” (o qual foi obtido usando um h extremamente pequeno) e e_H^h é o erro da solução calculada com o método MHM usando um segundo nível de tamanho h . Como esperado, observamos que a influência de h decresce rapidamente com valores de h suficientemente pequenos.

Uma vez fixado um valor de h suficientemente pequeno tal que o erro associado a aproximação das funções de base seja pequeno, podemos estabelecer uma relação entre H e o número de elementos em \mathcal{T}_h . Desta forma podemos variar H mantendo constante o valor de h e assim ter controle sobre o custo computacional total do método. Na Figura B.2 (direita) N_1 e N_2 representam o número de graus de liberdade de primeiro e segundo nível, respectivamente. Neste exemplo (Figura B.2), variamos o número de elementos do segundo nível junto com H e notamos que o custo computacional do segundo nível aumenta muito mais lentamente do que o custo computacional do primeiro nível. Concluimos que essa prática fornece uma estratégia recomendável quando se faz necessário usar algum refinamento na malha grossa.

Como mencionado anteriormente o método MHM foi desenvolvido para se adaptar naturalmente a uma implementação em máquinas massivamente paralelas. Atualmente o método MHM está sendo implementado no portal SPiNMe (ver [38]) onde existem diferentes opções de paralelização, e será disponibilizado publicamente através da interface web do portal.