MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO NÃO USUAL APLICADO À MODELOS DO TIPO $k - \varepsilon$

Frédéric Valentin

LNCC - CMA

PLANO

1. Motivação
2. Modelagem e problemas numéricos
3. Método estabilizado não usual
4. Conclusões/Perspectivas

1 – MOTIVAÇÃO

- Objetivo: Simulação de escoamentos incompressíveis turbulentos $\Rightarrow$ Domínios arbitrários $\Rightarrow$ Método de elementos finitos

- Interesse: Interfaces rugosas $\Rightarrow$ Validações de leis de parede

- Aerodinâmica: Rugosidades em asas, bola de golf, ...

- Meteorologia/Oceanografia: Fundo Marinho heterogêneo ou ondas na superfície do mar $\Rightarrow$ Devem ser consideradas nas simulações

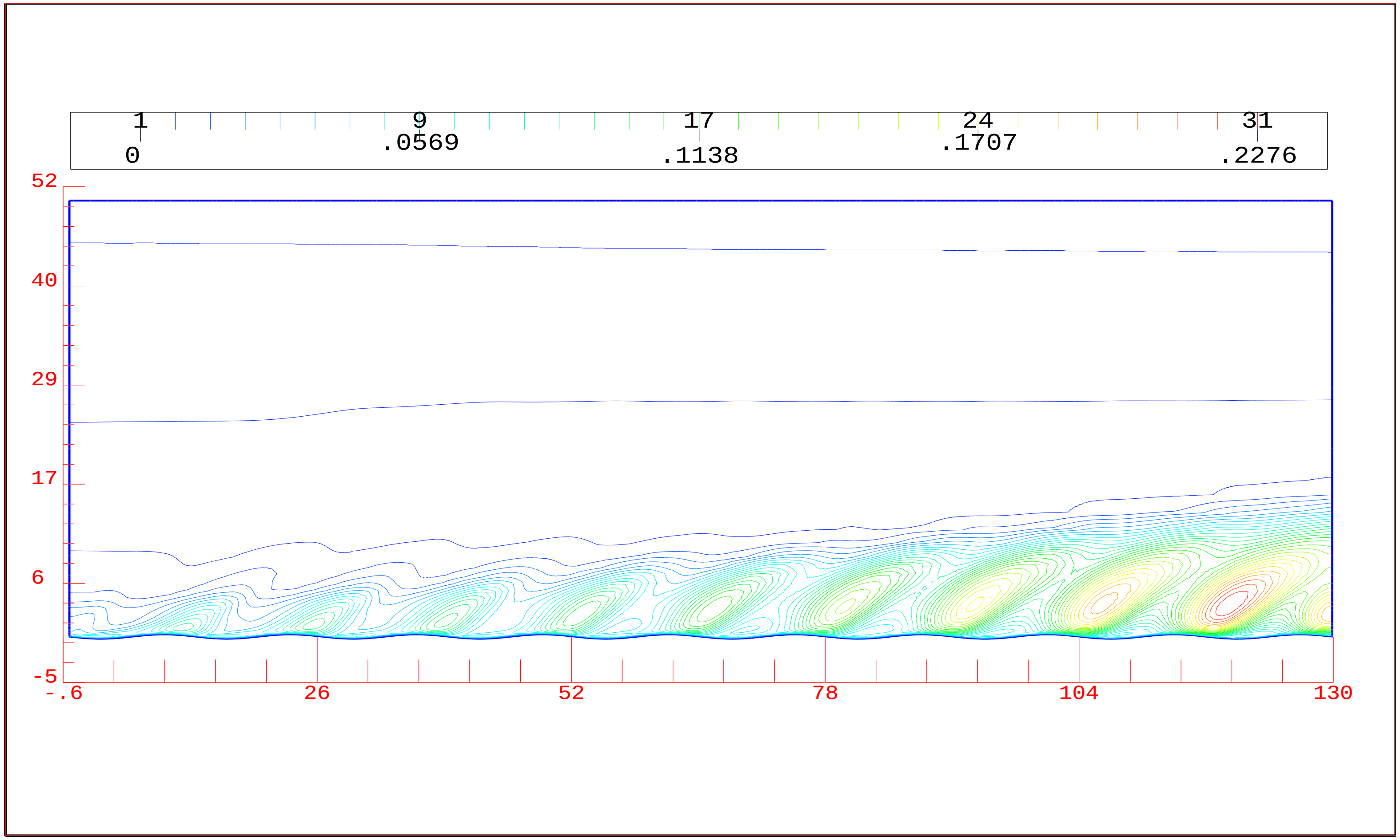


Figure 1: Turbulento compressível 2 camadas: Iso $\sqrt{k}$

2 – MODELOS

- Equações de Reynolds:

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\,\mathbf{u} - 2\nabla.\left(\mu \mathcal{E}\left(\mathbf{u}\right)\right) + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla.\mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\mu = \nu + \nu_t \qquad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- Equações $k - \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \sigma_k\, k + \mathbf{u}.\nabla k - \nabla.\left(\mu \nabla k\right) &= 0 \\ \sigma_\varepsilon\, \varepsilon + \mathbf{u}.\nabla \varepsilon - \nabla.\left(\mu_\varepsilon \nabla \varepsilon\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= \left(\frac{\varepsilon}{k} - 2C_\mu \left|\mathcal{D}\left(\mathbf{u}\right)\right|^2 \frac{k}{\varepsilon}\right) \\
\sigma_\varepsilon &= \left(C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{k} - 2C_{\varepsilon 1}C_\mu \left|\mathcal{D}\left(\mathbf{u}\right)\right|^2 \frac{k}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\mu_\varepsilon = (\nu + \frac{\nu_t}{C_{\varepsilon 3}})
$$

$$
C_{\varepsilon 1} = 1.44,\ C_{\varepsilon 2} = 1.92,\ C_{\varepsilon 3} = 1.3,\ C_\mu = 0.09
$$

- Lei de parede:

$$
\begin{aligned}
2\mu\left(\mathcal{E}\left(\mathbf{u}\right).\mathbf{n}\right).\mathbf{s} &= \frac{g\left(\mathbf{u}.\mathbf{s}\right)}{\left|\mathbf{u}.\mathbf{s}\right|}\mathbf{u}.\mathbf{s} \\
\mathbf{u}.\mathbf{n} &= 0
\end{aligned}
$$

- $g\left(\mathbf{u}\right)$ função dada $\Rightarrow$ Lei logarítimica, Reichardt, condição de contorno equivalente

- Influência das rugosidades $\Rightarrow$ Constantes $\Rightarrow$ Estratégia de homogenização

- Condições de Dirichlet $\Rightarrow$ k e ε

3 – LIMITAÇÕES NUMÉRICAS

- Problema linearizado:
  - Linearização por método de Newton $\Rightarrow$ Cada passo resolvemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\mathbf{u}, p) &= \mathbf{f} \\ \mathcal{L}_k(k) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(\mathbf{u}, p) &= \sigma\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\,\mathbf{a} - 2\nabla.\left(\mu\mathcal{E}(\mathbf{u})\right) + \nabla p \\ \mathcal{L}_u^*(\mathbf{u}, p) &= \sigma\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})\,\mathbf{a} - 2\nabla.\left(\mu\mathcal{E}(\mathbf{u})\right) - \nabla p \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_k(k) = \sigma_k k + \mathbf{a}.\nabla k - \nabla.(\mu \nabla k)$$

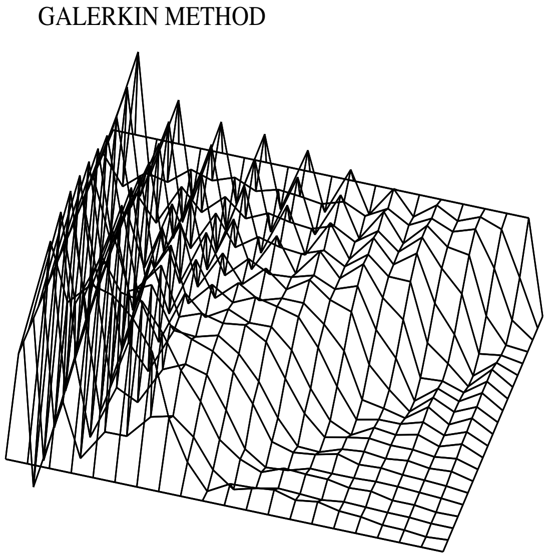
$$\mathcal{L}_k^*(k) = \sigma_k k - \mathbf{a}.\nabla k - \nabla.(\mu \nabla k)$$

– Condição de contorno: Lei de parede

$$2\mu(\mathcal{E}(\mathbf{u})\,\mathbf{n}).\mathbf{s} = \frac{g(\mathbf{a}.\mathbf{s})}{|\mathbf{a}.\mathbf{s}|}\mathbf{u}.\mathbf{s} := \alpha(\mathbf{a}.\mathbf{s})\,\mathbf{u}.\mathbf{s}$$

- Limitações:
  1. Incompatibilidade de elementos $\Rightarrow$ Condição Inf-Sup $\Rightarrow$ Oscilações espúrias
  2. Dominância da advecção ($|\mathbf{a}|$ grande)$\Rightarrow$ Falta de coercividade $\Rightarrow$ Oscilações
  3. Dominância da reação (σ ou σ_k grande)$\Rightarrow$ Coercividade na norma 'errada' $\Rightarrow$ Oscilações
  4. Utilização de leis de parede $\Rightarrow$ Falta de coercividade no contorno $\Rightarrow$ Oscilações no contorno

$$\sigma\, k + \mathbf{a}.\nabla k - \nabla.\left(\nu \nabla k\right) = 0$$



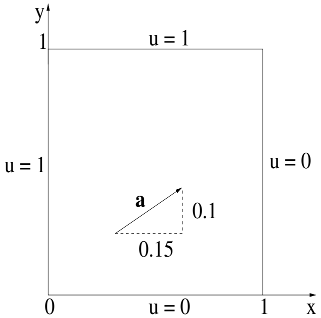
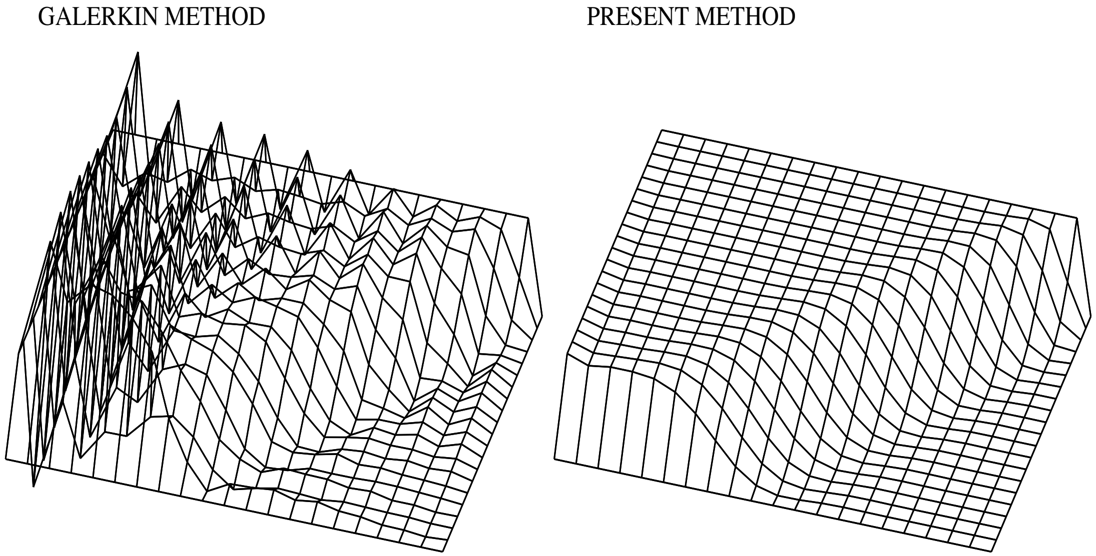


Figure 2: Método de Galerkin: $\sigma = 10^{-2}$, $\nu = 10^{-4}$

$$\sigma\, k + \mathbf{a}.\nabla k - \nabla.\left(\nu \nabla k\right) = 0$$



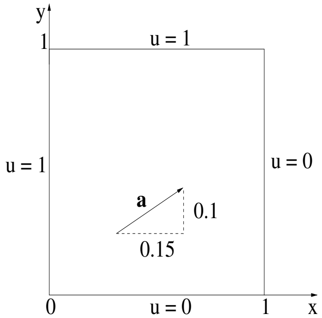
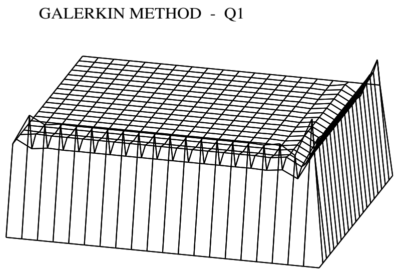
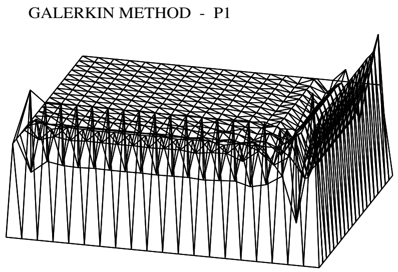


Figure 3: Comparação Galerkin e não usual: $\sigma = 10^{-2}, \nu = 10^{-4}$

$\sigma\, k - \nabla.\,(\nu \nabla k) = 1$





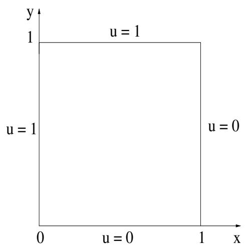


Figure 4: Método de Galerkin: $\sigma = 1$, $\nu = 10^{-6}$

$\sigma\, k - \nabla .\, (\nu \nabla k) = 1$

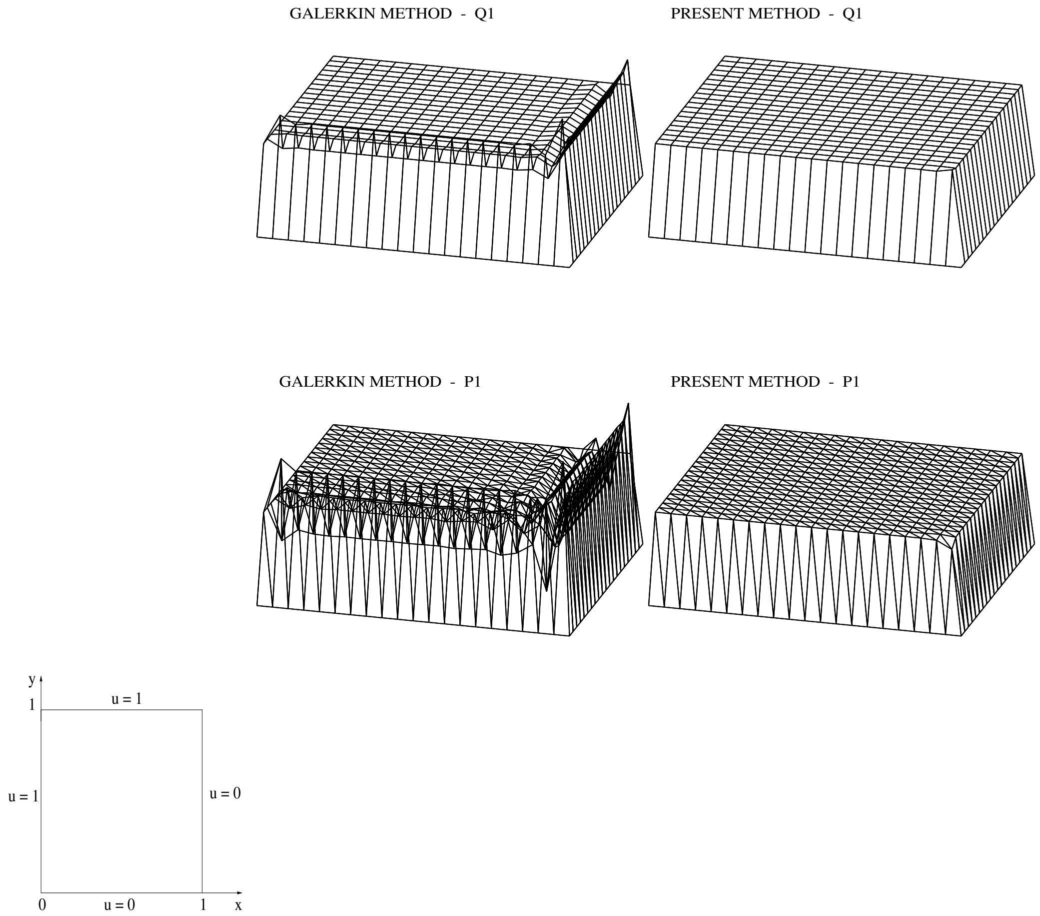


Figure 5: Comparação Galerkin e não usual: $\sigma = 1$, $\nu = 10^{-6}$

$$\sigma \mathbf{u} - 2\nabla.\left(\nu \mathcal{E}\left(\mathbf{u}\right)\right) + \nabla p = 0$$

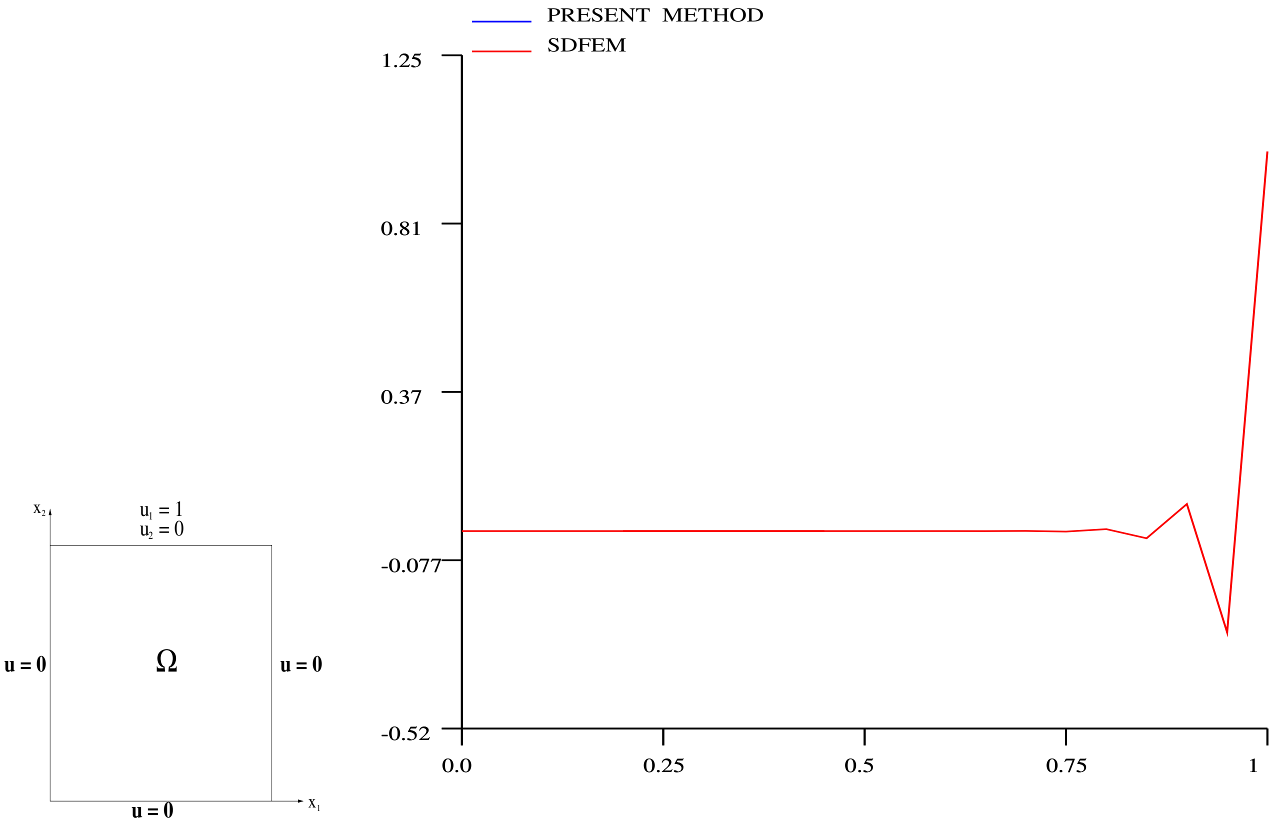


Figure 6: Método SUPG: $\sigma = 10^4$, $\nu = 10^{-4}$

$$\sigma \mathbf{u} - 2\nabla . \left(\nu \mathcal{E}\left(\mathbf{u}\right)\right) + \nabla p = 0$$

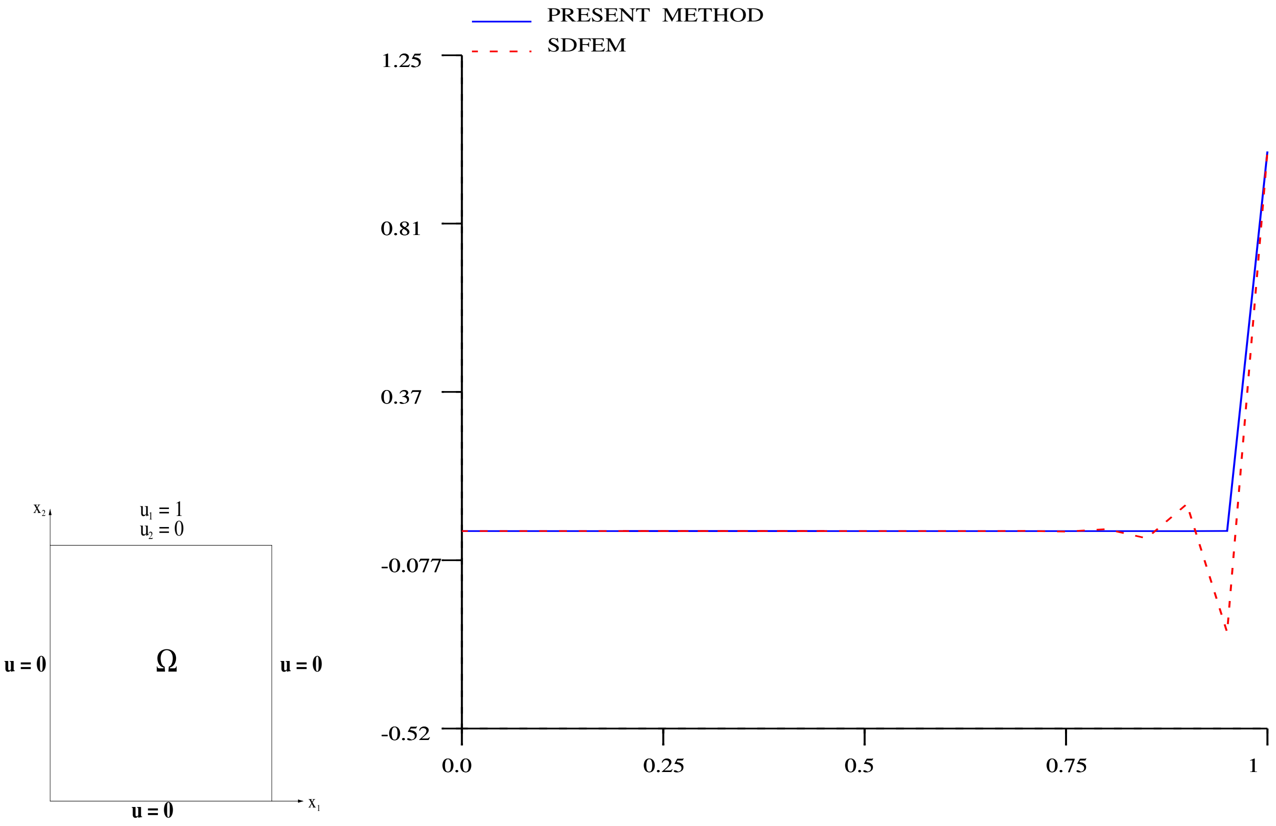
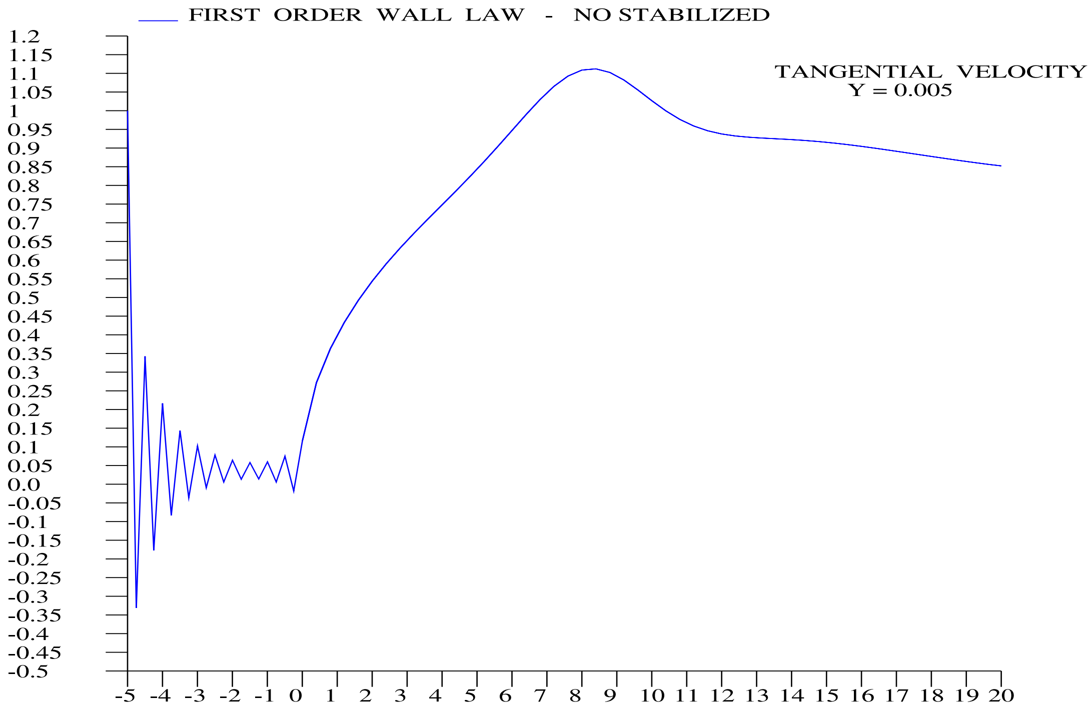


Figure 7: Comparação SUPG e não usual: $\sigma = 10^4$, $\nu = 10^{-4}$

$(\nabla \mathbf{u})\,\mathbf{u} - 2\nabla.\,(\nu \mathcal{E}\,(\mathbf{u})) + \nabla p = 0$ + Lei de Parede



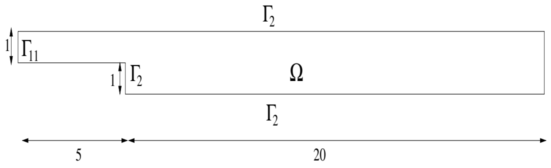
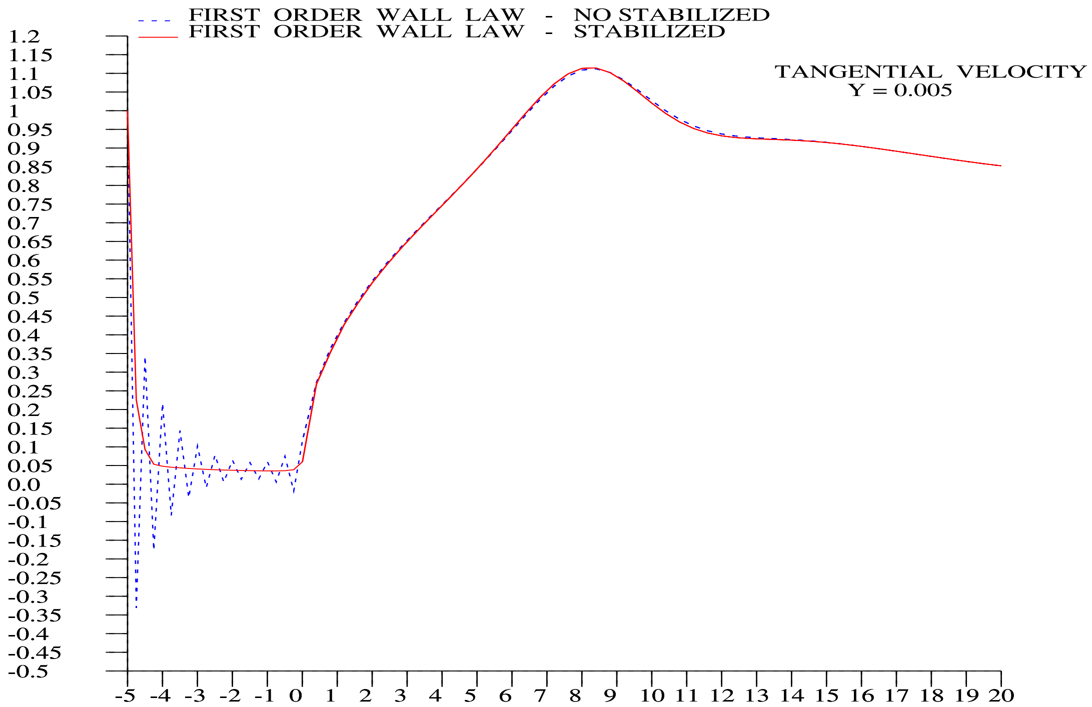


Figure 8: Sem estabilização no contorno: $\nu = 4 \times 10^{-3}$

$(\nabla \mathbf{u})\,\mathbf{u} - 2\nabla.\,(\nu\mathcal{E}\,(\mathbf{u})) + \nabla p = 0$ + Lei de Parede



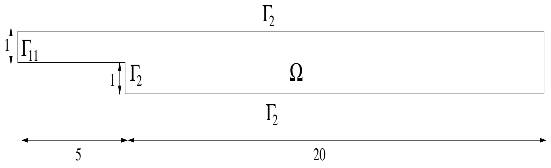


Figure 9: Com estabilização no contorno: $\nu = 4 \times 10^{-3}$

4 – MÉTODO ESTABILIZADO NÃO USUAL

- Equações de Reynolds

$$\mathcal{B}^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = \mathcal{F}^u(\mathbf{v}, q), \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}_h \times Q_h$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}^u(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = (\sigma\mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\nabla\mathbf{u})\,\mathbf{a}, \mathbf{v}) \\
&+ (\mathbf{2}\mu\mathcal{E}(\mathbf{u}), \mathcal{E}(\mathbf{v})) + (\alpha\,\mathbf{u}.\mathbf{s}, \mathbf{v}.\mathbf{s})_\Gamma - (p, \nabla.\mathbf{v}) \\
&+ (\nabla.\mathbf{u}, q) - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\mathcal{L}_u(\mathbf{u}, p), \tau^u\,\mathcal{L}_u^*(\mathbf{v}, q))_T \\
&+ \sum_{E\in\aleph_h} (\partial_{\mathbf{s}}(\alpha\mathbf{u}.\mathbf{s}) - \partial_{\mathbf{s}}(2\mu\mathcal{E}(\mathbf{u})\,\mathbf{n}).\mathbf{s}, \tau_e^u(\partial_{\mathbf{s}}(\alpha\mathbf{v}.\mathbf{s}) \\
&-\partial_{\mathbf{s}}(2\mu\mathcal{E}(\mathbf{v})\,\mathbf{n}).\mathbf{s}))_E
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^u(\mathbf{v}, q) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\mathbf{f}, \tau^u \, \mathcal{L}_u^* (\mathbf{v}, q)\right)_T \\
\tau^u &= \frac{h^2}{\sigma h^2 \xi\left(Pe_1^u\right) + \frac{2\mu}{m_k} \xi\left(Pe_2^u\right)} \\
\tau_e^u &= \frac{h_E}{8\alpha} \xi\left(Pe_E^u\right) \\
\xi(x) &= \max\{1, x\}
\end{aligned}
$$

$$Pe_1^u = \frac{2\mu}{m_k \sigma h^2}, \qquad Pe_2^u = \frac{m_k \left|\mathbf{a}\right| h}{\mu}$$

$$Pe_E^u = \frac{m_e \alpha h_E}{2\mu}$$

- Equação k

$$\mathcal{B}^k\left(k,\omega\right) = 0, \quad \forall\omega \in \mathcal{K}_h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^k\left(k,\omega\right) &= \left(\sigma_k\, k,\omega\right) + \left(\mathbf{a}.\nabla k,\omega\right) + \left(\mu\nabla k,\nabla\omega\right) \\ &\quad - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \Big(\mathcal{L}_k\left(k\right), \tau^k\, \mathcal{L}_k^*\left(\omega\right)\Big)_T \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tau^k &= \frac{h^2}{h^2 \left|\sigma_k\right| \xi\left(Pe_1^k\right) + \frac{2\mu}{m_k} \xi\left(Pe_2^k\right)} \\
Pe_1^k &= \frac{2\mu}{m_k \left|\sigma_k\right| h^2} \\
Pe_2^k &= \frac{m_k \left|\mathbf{a}\right| h}{\mu}
\end{aligned}
$$

- Enriquecimento com funções bolhas $\Rightarrow$ Método Estabilizado
- Análise de erro $\Rightarrow$ Convergência ótima $\Rightarrow$ Equações linearizadas

5 – CONCLUSÃO / PERSPECTIVAS

- Conclusão
  - Método não usual $\Rightarrow$ Elimina oscilações numéricas
  - Bons resultados $\Rightarrow$ Navier-Stokes incompressível e equação reação-advecção-difusão $\Rightarrow$ Adequado à resolução de modelos de turbulência do tipo $k - \varepsilon$
- Atual estágio/Pespectivas
  - Como linearizar modelo $k - \varepsilon$ $\Rightarrow$ Aplicar método não usual $\Rightarrow$ melhor convergência
  - Validações de novas leis de parede $\Rightarrow$ Domínios rugosos