Introdução à Análise Real

Pós-graduação do LNCC[1]

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica—LNCC, Brasil
URL: `http://www.lncc.br/~alm`
URL: `http://www.lncc.br/~alm/cursos/analise06LNCC.html`

[1] 20 de março de 2006

PREFÁCIO. Estas notas de aula são relativas ao curso de Análise da pós-graduação do Laboratório Nacional de Computação científica, LNCC. Estas notas devem servir de apoio, e certamente não eliminam a necessidade de se usar os já clássicos, aprimorados e vários livros didáticos. Mencionamos alguns deles na biliografia.

Neste curso apresento alguns tópicos de análise que, espero, sejam úteis. Na verdade, o que eu espero mesmo é apresentar o rigor matemático aos alunos, e mostrar como este deve ser utilizado em conjunto com a intuição matemática. Minha experiência diz que os alunos do LNCC têm a intuição mais desenvolvida que o rigor.

Planejo discutir os seguintes tópicos:

- Os números reais e topologia em R^n
  Funções; Conjuntos finitos, infinitos, contáveis; Propriedades dos reais;
  Espaços Vetoriais; Conjuntos abertos e fechados; Vizinhanças; Teorema de Bolzano-Weierstrass;
  Conjuntos Compactos; Teorema de Heine–Borel;
- Sequências e Convergência;
  Sequências, Subsequências; Sequências monótonas (em R); limsup;
  Caracterização de conjuntos fechados; Sequências de Cauchy
- Funções Contínuas
  Propriedades Locais e Globais
  Preservação de Compacidade e Continuidade Uniforme
- Diferenciabilidade
  Funções de uma variável; Derivadas parciais; Diferenciabilidade
  Regra da cadeia; Teorema de Taylor;
  Teorema da função implícita e da função inversa;
  Aplicações
- Sequência de funções
  Convergência pontual e uniforme; Trocas de limites
  Equicontinuidade

A referência básica é o livro *The elements of Real Analysis*, de Robert Bartle [**1**]. Outra referência importante é o já clássico livro de análise do Elon Lima [**5**], bem como [**8**]. Para tópicos específicos em uma dimensão, pode-se ler [**2, 4**]. Finalmente, idéias mais abstratas são apresentadas em [**6**].

Conteúdo

CAPÍTULO 1

Pré-requisitos

[1] Neste capítulo, recordaremos definições e notações básicas sobre conjuntos e funções. Assumiremos aqui que as propriedades básicas de conjuntos são conhecidas. Em particular, são de grande importância os conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \text{(números naturais)},$$
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \quad \text{(números inteiros)},$$
$$\mathbb{Q} = \{m/n : \, m, n \in \mathbb{Z}, \, n \neq 0\} \quad \text{(números racionais)}.$$

1.1. Funções

Considere A e B dois conjuntos. Uma função é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$, um elemento $f(x) \in B$. Chamamos o conjunto A de *domínio* da função f e o denotamos por $D(f)$. Chamamos o conjunto B de *contradomínio* da função f. Escrevemos $f : A \to B$, ou ainda

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Se $E \subset A$, chamamos de *imagem de E* o conjunto

$$f(E) = \{f(x) : \, x \in E\}.$$

Similarmente, se $H \subset B$, chamamos de *imagem inversa de H* o conjunto

$$f^{-1}(H) = \{x : \, f(x) \in H\}.$$

Se $f(A) = B$ dizemos que f é *sobrejetiva* (ou simplesmente *sobre*). Dizemos que f é *injetiva* (ou *biunívoca* ou *um a um* ou 1-1) quando, dados a, $a' \in D(f)$, se $f(a) = f(a')$ então $a = a'$. Numa forma mais compacta, escrevemos que para todo a, $a' \in D(f)$ temos

$$f(a) = f(a') \implies a = a',$$

onde " $\implies$ " significa *implica que*. Se f é injetiva e sobre, a chamamos de *bijetiva* ou de uma *bijeção*.

Dizemos que $g : B \to A$ é *função inversa* de f se

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A, \qquad f(g(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B.$$

Quando existir, denotamos a inversa de f por f^{-1}.

Observação. Note que a definição de *imagem inversa* independe de existir ou não a função inversa. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não tem inversa. Entretanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

[1] Última Atualização: 15/02/2006

1.2. Conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis

Um conjunto B é *finito* se é vazio ou se existe uma bijeção entre B e $\{1, 2, \cdots, N\}$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Caso B não seja finito, o dizemos *infinito*. Se B é finito ou se existe uma bijeção entre B e $\mathbb{N}$, dizemos que B é *enumerável*.

Observação. Existe aqui uma diferença entre os termos usados em inglês no Bartel [**1**], e suas traduções diretas em português. Seguindo Elon [**4**], usamos o termo *enumerável* para equivaler ao inglês *countable*. Já as expressões *enumerable* ou *denumerable* são usadas quando existe bijeção com $\mathbb{N}$, i.e., exclui os conjuntos finitos. Por sua vez, Rudin [**8**] define os termos de uma terceira forma.

Exemplo 1.1. $\{2, 3, 4, 5\}$ é finito, e portanto enumerável.

Exemplo 1.2. $P = \{2, 4, 6, \cdots\}$ é enumerável pois $\phi : \mathbb{N} \to P$ definida por $\phi(n) = 2n$ é uma bijeção entre P e $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.3. O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável pois

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\},$$

e $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $\phi(i) = (-1)^i[i/2]$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A função $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é tal que $[x]$ é a parte inteira de x, i.e., o maior inteiro menor ou igual a x.

Exemplo 1.4. $\mathbb{Q}$ é enumerável pela "contagem diagonal":

$$\begin{array}{lllllll}
0 \\
1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \cdots \\
\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & -\frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{2}, & \cdots \\
\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & -\frac{3}{3}, & \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

e podemos contar pois

$$\mathbb{Q} = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{3}, \cdots\right\}.$$

Exemplo 1.5. O conjunto de números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. Para mostrar isto, usaremos uma demonstração por contradição. Mostraremos na verdade que $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ não é enumerável. Usando a base decimal, todo elemento $x \in I$ pode ser representado por $x = 0, a_1a_2a_3\cdots$, onde $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$. Assuma que I é enumerável. Então existe uma enumeração $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dos elementos de I tal que

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots, \\
&x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots, \\
&x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots, \\
&\ldots,
\end{aligned}$$

onde $a_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$. Seja agora $y = 0, b_1b_2b_3\cdots$ onde

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ii} \in \{1, \ldots, 9\} \\ 1 & \text{se } a_{ii} = 0. \end{cases}$$

Logo $y \in I$ mas $y \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto contradidiz a afirmação que $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma enumeração dos elementos de I. Portanto, I não é enumerável.

1.3. Exercícios

Exercício 1.1. Mostre que uma função tem inversa se e somente se ela é uma bijeção.

Exercício 1.2. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Mostre que o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável. Conclua assim que $\mathbb{Z}$ enumerável implica em $\mathbb{Q}$ enumerável.

Exercício 1.3. Mostre por indução que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.4. Mostre por indução que se $x > -1$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta é a desigualdade de Bernoulli.

CAPÍTULO 2

Os números reais e o $\mathbb{R}^n$

[1] Neste capítulo, falaremos sobre números reais. Assumiremos aqui que os números reais são bem definidos e "existem", sem entrar em detalhes sobre a construção deste corpo. A idéia é apenas apresentar propriedades que os reais satisfazem. A seguir, falaremos sobre abertos e fechados nos reais.

2.1. Os números Reais

2.1.1. Propriedades dos Reais. Para discutir uma importante propriedade dos números reais, introduziremos o conceito de cotas.

DEFINIÇÃO 2.1.1. *Considere um conjunto $S \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $u \in \mathbb{R}$ é* cota superior *de S se $s \leq u$ para todo $s \in S$. Analogamente, dizemos que $v \in \mathbb{R}$ é* cota inferior *de S se $v \leq s$ para todo $s \in S$. Se um conjunto tem cota superior dizemos que ele é* limitado por cima ou superiormente*. Se um conjunto tem cota inferior dizemos que ele é* limitado por baixo ou inferiormente*. Se um conjunto tem cota superior e inferior, dizemos que ele é limitado.*

Note que nem todos os conjuntos possuem cotas superiores e/ou inferiores. Por exemplo $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ não possui cota superior, apesar de possuir cota inferior. Segue-se da definição que se um conjunto possui cota superior, então ele possui infinitas cotas superiores:

$$s \text{ cota superior de } A \implies s+1 \text{ cota superior de } A.$$

Observação análoga vale para as cotas inferiores.

EXEMPLO 2.1. O conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ é limitado superiormente mas não inferiormente. De fato qualquer número não negativo é cota superior de $\mathbb{R}^-$, pois se $b \geq 0$, então $x \in \mathbb{R}^-$ implica que $x < 0 \leq b$. Por outro lado, nenhum número $a \in \mathbb{R}$ pode ser cota inferior pois sempre existe $y \in \mathbb{R}^-$ tal que $y < a$. Concluímos portanto que $\mathbb{R}^-$ não é limitado.

EXEMPLO 2.2. Usando argumentos como acima, vemos que $\mathbb{R}$ não é limitado nem superiormente nem inferiormente.

EXEMPLO 2.3. Seja $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Então qualquer número $b \geq 1$ é cota superior de I, e todo número $a \leq 0$ é cota inferior de I. De fato, nestes casos teríamos $a \leq x \leq b$ para todo $x \in I$. Logo, por definição, I é limitado.

EXEMPLO 2.4. Note que qualquer número é cota inferior e superior do conjunto vazio.

[1] Última Atualização: 15/02/2006

DEFINIÇÃO 2.1.2. *Se um conjunto S é limitado por cima, chamamos de* supremo de S *ou simplesmente* sup S *a menor de suas cotas superiores. Analogamente, se um conjunto S é limitado por baixo, chamamos de* ínfimo de S *ou simplesmente* inf S *a maior de suas cotas inferiores.*

Logo, se $u = \sup S$, então

(1) $s \leq u$ para todo $s \in S$.
(2) Se existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq v$ para todo $s \in S$, então $u \leq v$.

OBSERVAÇÃO. Segue-se da definição a unicidade do supremo e do ínfimo, se estes existirem.

LEMA 2.1.3. Seja $S \neq \emptyset$, e v cota superior de S. Então $v = \sup S$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existir $s_\epsilon \in S$ tal que $v - \epsilon < s_\epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Rightarrow$) Seja $v = \sup S$ e $\epsilon > 0$. Como $v - \epsilon < v$, então $v - \epsilon$ não é cota superior de S. Logo, existe um elemento $s_\epsilon \in S$ tal que $s_\epsilon > v - \epsilon$.

($\Leftarrow$) Seja v cota superior de S. Assuma que para todo ϵ existe $s_\epsilon \in S$ tal que $v - \epsilon < s_\epsilon$. Vamos então mostrar que $v = \sup S$.

Seja $\hat{v}$ cota superior de S com $\hat{v} \neq v$. Se $\hat{v} < v$, definimos $\epsilon = v - \hat{v}$ e então $\epsilon > 0$ e existe $s_\epsilon \in S$ tal que $s_\epsilon > v - \epsilon = \hat{v}$. Isto é uma contradição com o fato de $\hat{v}$ ser cota superior. Logo temos obrigatoriamente $\hat{v} > v$, e v é a menor das cotas superiores, i.e., $v = \sup S$. $\square$

EXEMPLO 2.5. $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ tem $1 = \sup I$ e $0 = \inf I$. Note que $\sup I \in I$ e $\inf I \in I$.

EXEMPLO 2.6. $U = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ tem $1 = \sup U$ e $0 = \inf U$. Note que neste caso $\sup I \notin U$ e $\inf I \notin U$.

Propriedade do supremo de $\mathbb{R}$: Todo conjunto não vazio em $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem um supremo em $\mathbb{R}$.

Da propriedade acima, abtemos o seguinte resultado.

LEMA 2.1.4 (Propriedade Arquimediana). Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

DEMONSTRAÇÃO. Por contradição. Assuma que não existe tal número n. Portanto, x é cota superior de $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Pela Propriedade do supremo de $\mathbb{R}$, então $\mathbb{N}$ tem um supremo s. Logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < m$. Mas então, $s < m + 1$, uma contradição, pois $m + 1 \in \mathbb{N}$ e s deveria ser cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

OBSERVAÇÃO. Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$: Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Da mesma forma, existe $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

2.1.2. Valor absoluto e Intervalos. Para um número real a, o valor absoluto (ou módulo) de a é dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

EXEMPLO 2.7. Por definição $|5| = 5$, e $|-5| = -(-5) = 5$.

LEMA 2.1.5. Algumas propriedades dos números reais:

(1) $|-a| = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(2) $|ab| = |a||b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
(3) Dados $a, k \in \mathbb{R}$ temos que $|a| \leq k$ se e somente se $-k \leq a \leq k$.
(4) $-|a| \leq a \leq |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (1) Se $a = 0$, então $|0| = 0 = |-0|$. Se $a > 0$, então $-a < 0$ e logo $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|-a| = -a = |a|$.
(2) Exercício.
(3) Exercício.
(4) Tome $k = |a|$ no ítem (3) do lema. Então $|a| \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|$.

$\square$

Lema 2.1.6 (Desigualdade Triangular). Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ temos

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Demonstração. Sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$. Logo, $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$. Pelo ítem (3) do Lema 2.1.5 temos que $|a+b| \leq |a| + |b|$, como queríamos demonstrar. $\square$

Dentre os mais importantes conjuntos reais estão os intervalos. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Chamaremos de intervalo quaisquer conjuntos dos seguintes tipos:

(1) Intervalo aberto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
(2) Intervalo fechado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
(3) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
(4) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
(5) $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
(6) $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
(7) $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
(8) $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
(9) $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$
(10) $\emptyset$

A definição de alguns intervalos particulares é imediata usando-se o módulo:

$$(a-d, a+d) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < d\}, \qquad [a-d, a+d] = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq d\},$$

Definição 2.1.7. *Dizemos que uma sequência de intervalos I_n é encaixante se*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

Exemplo 2.8. Se $I_n = [0, 1/n]$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Exemplo 2.9. Se $I_n = (0, 1/n)$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Teorema 2.1.8 (Teorema dos intervalos encaixantes). *Para $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma sequência de intervalos fechados limitados e não vazios e encaixantes. Então existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Além disto, se $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, então ξ é o único elemento da interseção.*

Demonstração. Temos $b_1 \geq a_n$ para todo n pois $I_n \subset I_1$. Seja $\xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo $\xi \geq a_n$ para todo n. Queremos mostrar agora que $\xi \leq b_n$ para todo n. Suponha o contrário, i.e., que existe $b_k < \xi$ para algum k. Logo $b_k < a_m$ para algum m. Seja $p = \max\{k, m\}$. Então $a_p \geq a_m > b_k \geq b_p$ e temos $[a_p, b_p] = \emptyset$, uma contradição. Logo $a_n \leq \xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assumindo agora que $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, definimos $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então $\eta \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\eta \geq \xi$. Como $0 \leq \eta - \xi \leq b_n - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\eta = \xi$ pois $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. □

2.2. Espaços Vetoriais e o $\mathbb{R}^n$

O exemplo mais comum e intuitivo de espaço vetorial é o $\mathbb{R}^n$. Entretanto, uma definição mais geral é de grande utilidade. A menos que explicitamente mencionado, neste texto nos restringiremos a espaços vetoriais sobre o corpo dos reais.

Definição 2.2.1. *Um espaço vetorial V sobre os reais é um conjunto cujos elementos chamamos de vetores, com duas operações binárias, soma vetorial e multiplicação por escalar tais que*

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
(2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} + \mathbf{z})$, *para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
(3) *Existe um elemento* $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ *tal que* $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{x} \in V$
(4) *Para todo* $\mathbf{x} \in V$, *existe um elemento* $\mathbf{y} \in V$ *tal que* $\mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$
(5) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, *para todo* $\mathbf{x} \in V$
(6) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$, *para todo* $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x} \in V$
(7) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, *para todo* $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x} \in V$
(8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

Alguns resultados podem ser obtidos imediatamente:

Lema 2.2.2. Seja V um espaço vetorial sobre os reais. Então temos que

(1) O vetor zero é único
(2) Todo elemento de $\mathbf{x} \in V$ tem um único negativo dado por $(-1)\mathbf{x}$
(3) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$
(4) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Demonstração. Demonstraremos apenas a primeira afirmativa. As demais ficam como exercícios. Para demonstrar (1), assuma que $\mathbf{0_1}$ e $\mathbf{0_2}$ sejam dois zeros de V. Logo

$$\mathbf{0_1} = \mathbf{0_2} + \mathbf{0_1} = \mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} = \mathbf{0_2},$$

onde usamos que a hipótese de que $\mathbf{0_1}$ é zero e a propriedade (3) da Definição 2.2.1, seguida da propriedade (1). Na última igualdade usamos a hipótese de que $\mathbf{0_1}$ é zero e novamente a propriedade (3) da Definição de 2.2.1. □

Exemplo 2.10. Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-úplas ordenadas de números reais, i.e,

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, \dots, n\}.$$

Definimos então as operações produto por escalar e soma da seguinte forma:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ estão em $\mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Pode-se checar que $\mathbb{R}^n$ é espaço vetorial com as operações acima descritas. Em particular, $\mathbb{R}^2$ é espaço vetorial.

Exemplo 2.11. O espaço F das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com as operações

$$(u+v)(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) + v(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e todas } u, v \in F$$

$$(\alpha u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha u(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ toda } u \in F \text{ e todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Duas importantes *ferramentas* matemáticas quando se trabalha em espaços vetoriais são produtos internos e normas.

Definição 2.2.3. *Seja V espaço vetorial sobre os reais. Um produto interno é uma função de $V \times V \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ e tal que*

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$ *com* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$
(3) $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$
(4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$

note que da definição acima concluímos imediatamente que para todo $\mathbf{x} \in V$,

$$\underline{0} \cdot \mathbf{x} = (0\underline{0}) \cdot \mathbf{x} = 0(\underline{0} \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

Exemplo 2.12. Em $\mathbb{R}^2$, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, o produto interno canônico é dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Em $\mathbb{R}^n$, para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, definimos

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemplo 2.13. Em $\mathbb{R}^2$, a operação

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$$

define um produto interno. De fato, a primeira propriedade (positividade) é verdadeira pois

$$(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 2[(x_1 - x_2/2)^2 + 7x_2^2/4] > 0,$$

se $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. As outras propriedades do produto interno são mais fáceis de serem checadas.

Exemplo 2.14. Considere o espaço vetorial das funções contínuas em $[0, 1]$, com as operacoes de multiplicação por escalar e soma como no Exemplo 2.11. Então a operaçãodada pela integral de Riemann

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

define um produto interno deste espaço.

Introduzimos agora a noção de *norma*. Num espaço vetorial, uma boa forma de se medir distâncias entre vetores é através de normas. Em particular, o conceito normas ajuda na definição canônica de conjuntos abertos e fechados, como veremos a seguir.

DEFINIÇÃO 2.2.4. *Dado um espaço vetorial V, uma* norma *é uma função de V em $\mathbb{R}$, denotada por $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, e tal que*

(1) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *para todo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in V$ *(desigualdade triangular)*
(2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$*, e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$
(3) $\|\mathbf{x}\| > 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$ *tal que* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Quando um espaço vetorial V tem uma norma associada, dizemos que é um *espaço normado.*

EXEMPLO 2.15. Em $\mathbb{R}^2$,

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

define uma norma. No caso mais geral, em $\mathbb{R}^n$,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

também define uma norma.

EXEMPLO 2.16. Outra norma em $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|.$$

O resultado abaixo é importante pois mostra que *todo* produto interno induz uma norma.

TEOREMA 2.2.5. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

define uma norma em V. Além disto, vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \qquad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \tag{2.2.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Como o produto interno garante que sempre teremos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \ge 0$, então a operação acima está bem definida. Mostraremos primeiro (2.2.1). Seja $\mathbf{z} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$. Então

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 0,$$

e

$$0 \le \|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Logo

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \le \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2,$$

e (2.2.1) vale.

Para mostrar a propriedade (1) da definição de norma, note que

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

e assim temos (1). As propriedade (2) e (3) seguem-se imediatamente da definição e das propriedades do produto interno. $\square$

OBSERVAÇÃO. Note pela demonstração que a igualdade $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ vale se e somente se $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.3. Conjuntos abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$

Para definirmos o que é um conjunto aberto necessitamos dos chamadas bolas em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a *bola aberta de raio r e centro* $\mathbf{x}$ é dada por

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}.$$

De forma similar, chamamos de *bola fechada de raio r e centro* $\mathbf{x}$, e de *esfera de raio r e centro* $\mathbf{x}$ os conjuntos

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le r\}, \qquad \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = r\}.$$

Podemos agora definir conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.1. *Um conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ é* aberto em $\mathbb{R}^n$ *se para todo $\mathbf{x} \in G$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset G$.*

Exemplo 2.17. $\emptyset$ é aberto por "vacuidade".

Exemplo 2.18. $\mathbb{R}$ é aberto nos reais pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $B_1(x) = (x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$. Note que tomamos $\epsilon = 1$. Da mesma forma, $\mathbb{R}^n$ também é aberto pois para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, tem-se $B_1(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.19. O conjunto $(0, 1)$ é aberto em $\mathbb{R}$. De fato para qualquer $x \in (0, 1)$, seja $\epsilon = \min\{x/2, (1-x)/2\}$. Então $B_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (0, 1)$. De forma análoga, $B_1(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.20. O conjunto $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ não é aberto. De fato $0 \in I$, e para todo $\epsilon > 0$, a bola $B_\epsilon(0) = (-\epsilon, \epsilon) \not\subset I$, pois, por exemplo, $-\epsilon/2 \in B_\epsilon(0)$ mas $-\epsilon/2 \notin I$.

Exemplo 2.21. O conjunto $A = (0, 1) \times \{0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$. De fato, seja $x \in (0, 1)$ e $\mathbf{x} = (x, 0) \in A$. Para todo $\epsilon > 0$ temos que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \not\subset A$, pois, por exemplo, $(x, -\epsilon/2) \in B_\epsilon(\mathbf{x})$ mas $(x, -\epsilon/2) \notin A$. Compare com o exemplo 2.19.

Lema 2.3.2. Duas propriedades fundamentais de conjuntos abertos são

(1) A união arbitrária de abertos é aberta.
(2) A interseção finita de abertos é aberta.

Demonstração. Para mostrar (1), seja $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família arbitrária de abertos, e seja $G = \cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ e $\mathbf{x} \in G$. Então $\mathbf{x} \in G_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Como G_{λ_0} é aberto, então existe ϵ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset G_{\lambda_0}$. Logo $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = G$ e então G é aberto.

Para mostrar (2), sejam G_1, G_2 abertos e $G = G_1 \cap G_2$. Seja $\mathbf{x} \in G$. Logo $\mathbf{x} \in G_1$ e $\mathbf{x} \in G_2$. Como G_1 é aberto, seja ϵ_1 tal que $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}) \subset G_1$. Da mesma forma, sendo G_2 aberto, seja ϵ_2 tal que $B_{\epsilon_2}(\mathbf{x}) \subset G_2$. Definindo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, temos $\epsilon > 0$ e $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset G_1 \cap G_2 = G$. Logo G é aberto. O caso geral, para um número finito de conjuntos segue por indução. $\square$

Exemplo 2.22. Em uma dimensão, $I_n = (0, 1 - 1/n)$ é aberto e $\cup_{n=1}^\infty I_n = (0, 1)$ também é aberto.

Exemplo 2.23. Interseção infinita de avertos pode não ser aberta. Por exemplo, $G_n = (0, 1 + 1/n)$ é aberto em $\mathbb{R}$, ao contrário de $\cap_{n=1}^\infty G_n = (0, 1]$. Da mesma forma, $B_{1/n}(\mathbf{0})$ é aberto, mas $\cap_{n=1}^\infty B_{1/n}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ não é aberto.

Um outro importante conceito é o de conjuntos fechados, e temos a seguinte definição.

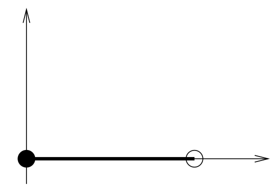

Fig. 1. Conjunto S.

Definição 2.3.3. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado em $\mathbb{R}^n$ se seu complemento $\mathcal{C}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \backslash F \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin F\}$ é aberto.*

Para mostrar que um conjunto G é aberto em $\mathbb{R}^n$, basta mostrar que para todo $\mathbf{x} \in G$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset G$. Para mostrar que F é fechado, basta mostrar que para todo $\mathbf{x} \notin F$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap F = \emptyset$.

Exemplo 2.24. $[0,1]$ é fechado em $\mathbb{R}$ pois $\mathcal{C}([0,1]) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.25. $(0,1]$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.26. Em $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1)\},$$

representado na figura 1, não é nem aberto nem fechado.

Para mostrar que S não é fechado, considere a sequência em S dada por $x_n = (1 - 1/n, 0)$. Como $x_n \to (1,0) \notin S$, então S não contém um de seus pontos de acumulação, logo S não é fechado.

Para mostrar que S não é aberto, note que *toda* bola de raio ϵ e centro em $(0,0)$ contém pontos em S e no complementar de S.

Exemplo 2.27. Os conjuntos $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são fechados em $\mathbb{R}^n$, pois seus complementares $\mathcal{C}(\emptyset) = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ são abertos em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.28. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, as esferas e as bolas fechadas de centro $\mathbf{x}$ e raio r são conjuntos fechados em $\mathbb{R}^n$.

Corolário 2.3.4. Como consequência do Lema 2.3.2 temos:

(1) A interseção arbitrária de fechados é fechada.
(2) A união finita de fechados é fechada.

Demonstração. (1) Seja $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de fechados em $\mathbb{R}^n$, e seja $F = \cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. Então $\mathcal{C}(F) = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(F_\lambda)$ é uma união de abertos. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto e, por definição, F é fechado.

(2) Se $F_1, \ldots, F_n$ são fechados em $\mathbb{R}^n$ e $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, então $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_1) \cap \cdots \cap \mathcal{C}(F_n)$. Como a interseção finita de abertos é aberta, e $\mathcal{C}(F_i)$ são abertos, então $\mathcal{C}(F)$ é aberto. Logo F é fechado.

□

Exemplo 2.29. $F_n = (1/n, 1)$ é fechado em $\mathbb{R}$, mas $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1]$ não é.

2.3.1. Outras caracterizações de conjuntos abertos e fechados. Outras noções que podem ser úteis quando precisamos caracterizar conjuntos abertos ou fechados vêm a seguir.

Definição 2.3.5. *Sejam $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos então que*

(1) *uma* vizinhança *de $\mathbf{x}$ é um conjunto que contenha um aberto que contenha $\mathbf{x}$.*
(2) *$\mathbf{x}$ é* ponto interior de *A se existe uma vizinhança de $\mathbf{x}$ contida em A.*
(3) *$\mathbf{x}$ é* ponto de fronteira de *A se toda vizinhança de $\mathbf{x}$ contém ponto de A e do complementar $\mathcal{C}(A)$.*
(4) *$\mathbf{x}$ é* ponto exterior de *A se existe uma vizinhança de $\mathbf{x}$ contida em $\mathcal{C}(A)$.*

Observe que das definições acima, dados um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{x}$ é ponto interior, exterior, ou de fronteira de A, sendo as opções mutualmente exclusivas. Note ainda que pela definição acima, uma vizinhança não precisa ser necessariamente um conjunto aberto.

Exemplo 2.30. Seja $U = (0, 1)$. Se $a \in U$, e $\epsilon < \min\{a, 1 - a\}$, então $B_\epsilon(a) \subset U$. Logo U é vizinhança de a.

Exemplo 2.31. Seja $I = [0, 1]$. Então I *não* é vizinhança de 0 pois para todo $\epsilon > 0$ temos $B_\epsilon(a) \not\subset I$. Entretanto, I é vizinhança de 0.5 por exemplo.

As seguintes propriedades podem ser usadas para se definir se um conjunto é ou não aberto.

Lema 2.3.6. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$. As afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) B é aberto.
(2) Todo ponto de B é ponto interior.
(3) B é uma vizinhança de seus pontos.

Demonstração. Vamos mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Assumindo (1), Seja $\mathbf{x} \in B$. Como por hipótese, B é aberto, temos que B é vizinhança de $\mathbf{x}$. Logo $\mathbf{x}$ é ponto interior de B. Como $\mathbf{x}$ é arbitrário, obtemos (2).

Seja agora (2) verdadeiro. Se $\mathbf{x} \in B$, então por hipótese, $\mathbf{x}$ é ponto interior de B, i.e., existe um aberto em B contendo $\mathbf{x}$. Logo, por definição, B é uma vizinhança de $\mathbf{x}$ e (3) vale.

Finalmente, assumindo (3), tome para cada $\mathbf{x} \in B$ um aberto $G_\mathbf{x} \subset B$ tal que $\mathbf{x} \in G_\mathbf{x}$. Então $B = \cup_{\mathbf{x}\in B} G_\mathbf{x}$ é aberto pois é união de abertos. □

Uma outra caracterização para conjuntos abertos envolve o uso de ponto de fronteira. Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.7. *Seja $G \subset \mathbb{R}^n$. Então G é aberto se e somente se G não contém nenhum de seus pontos de fronteira.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Assuma G aberto e $\mathbf{x} \in G$. Então existe aberto $U \subset G$ tal que $\mathbf{x} \in U$. Então $\mathbf{x}$ não é ponto de fronteira.

($\Leftarrow$) Assuma que G não contém nenhum de seus pontos de fronteira. Se G é vazio, então é aberto. Assuma então que G é não vazio. Seja $\mathbf{x} \in G$. Como G não contém pontos de fronteira, existe vizinhança U de $\mathbf{x}$ em G tal que $U \subset G$. Logo G é aberto. □

Corolário 2.3.8. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Então F é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de fronteira.

Finalmente fechamos esta seção com o conceito de ponto de acumulação.

Definição 2.3.9. *Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de* acumulação *de $S \subset \mathbb{R}^n$ se toda vizinhança $B_\epsilon(\mathbf{x})$ contém pelo menos um ponto de S diferente de $\mathbf{x}$.*

Note que um ponto pode ser de acumulação de um certo conjunto mesmo sem pertencer a este conjunto. De fato veremos vários exemplos abaixo em que tal situação ocorre.

Exemplo 2.32. Se $S = (0,1)$, então todo ponto em $[0,1]$ é ponto de acumulação de S.

Exemplo 2.33. O conjunto $\mathbb{N}$ não tem ponto de acumulação.

Exemplo 2.34. O único ponto de acumulação de $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots\}$ é o 0.

Exemplo 2.35. $S = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ tem como pontos de acumulação o conjunto $S = [0,1]$.

Exemplo 2.36. Seja $S \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e $u = \sup S$. Se $u \notin S$, então u é ponto de acumulação de S, pois para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $x \in (u - \epsilon, u + \epsilon)$.

Uma caracterização útil de fechados utiliza o conceito de pontos de acumulação, como o resultado a seguir indica.

Teorema 2.3.10. *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja F um fechado em $\mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x}$ ponto de acumulação de F. Temos que mostrar que $\mathbf{x} \in F$. De fato, se $\mathbf{x} \notin F$, então $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$. Mas como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset \mathcal{C}(F)$. Logo $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap F = \emptyset$ e $\mathbf{x}$ não é ponto de acumulaçãode F, uma contradição. Portanto $\mathbf{x} \in F$.

($\Leftarrow$) Assumimos agora que F contém todos os seus pontos de acumulação. Considere então um ponto $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(F)$. Então $\mathbf{y}$ não é ponto de acumulação de F, e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\mathbf{y}) \subset \mathcal{C}(F)$. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e concluímos que F é fechado. □

2.4. Celas encaixantes em $\mathbb{R}^n$ e o teorema de Bolzano–Weiertrass

Teorema 2.4.1 (Bolzano–Weiertrass em uma dimensão). *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito e limitado tem pelo menos um ponto de acumulação.*

A seguir damos uma idéia da demonstração, antes de proceder formalmente. Os passos são os seguintes:

(1) $S \subset I_1 := [a,b]$ para algum a, $b \in \mathbb{R}$, pois S é limitado.
(2) Seja I_2 um dos conjuntos $[a, (a+b)/2]$ ou $[(a+b)/2, b]$, tal que I_2 contenha infinitos pontos de S. Note que $I_2 \subset I_1$.
(3) Divida I_2 em duas partes e defina I_3 como sendo uma das partes tal que que contenha infinitos pontos de S. Por definição, $I_3 \subset I_2$.
(4) Prossiga assim definindo I_4, …, I_n tais que $I_n \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$, e que I_n contenha infinitos pontos de S.
(5) Usando Teorema dos intervalos encaixantes, seja $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.
(6) Mostre que x é ponto de acumulação.

Demonstração. (do Teorema 2.4.2). Como S é limitado, existe $I_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $S \subset I_1$. Note que $[a, (a+b)/2]/2$ ou $[(a+b)/2, b]$ ou contém infinitos pontos de S, e chame de I_2 tal intervalo. Da mesma forma, decomponha I_2 em dois subintervalos, e denomine por I_3 um dos subintervalos tal que $I_3 \cap S$ contenha infinitos pontos. Assim procedendo, obtemos uma sequência encaixante $I_n \subset \cdots \subset I_2 \subset I_1$. Pelo Teorema dos intervalos encaixantes, existe $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Temos agora que mostrar que x é ponto de acumulação. Note que o comprimento de $I_n = (b-a)/2^{n-1}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $V = (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Seja n tal que $(b-a)/2^{n-1} < \epsilon/2$. Então $I_n \subset V$. Logo V contém infinitos pontos de S, e x é ponto de acumulação. □

Um resultado semelhante vale no $\mathbb{R}^n$, e a demonstração é análoga. Uma outra maneira de se mostrar este resultado é baseada na noção de compacidade que discutiremos a seguir.

Teorema 2.4.2 (Bolzano–Weiertrass no $\mathbb{R}^n$). *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ infinito e limitado tem pelo menos um ponto de acumulação.*

2.5. Conjuntos Compactos

Um importante conceito em análise é o de *conjuntos compactos.* Em espaços de dimensão finita, estes conjuntos são na verdade conjuntos fechados limitados, e a noção de compacidade ajuda apenas nas demonstrações, tornando-as mais diretas. Entretanto, em dimensão infinita, nem todo fechado limitado é compacto, e algumas propriedades que continuam valendo para compactos, deixam de valer para fechados limitados.

Antes de definirmos compactos, precisamos introduzir a noção de cobertura aberta.

Definição 2.5.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Chamamos $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de* cobertura aberta *de A se para todo α temos G_α conjunto aberto, e $A \subset \cup_\alpha G_\alpha$.*

Exemplo 2.37. Como $(0, 1) \subset \cup_{i=1}^{\infty}(1/i, 1)$, então $\mathcal{G} = \{(1/i, 1)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$.

Exemplo 2.38. Se para $x \in \mathbb{R}$, temos $G_x = (x-1, x+1)$, então $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5.2. *Dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se para toda cobertura aberta de K existir uma subcobertura finita de K em $\mathcal{G}$. Em outras palavras, se existe cobertura aberta $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de K tal que $K \subset \cup_\alpha G_\alpha$, então existem α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.*

Note que para mostrar que um determinado conjunto é compacto precisamos provas que para *toda* cobertura aberta existe subcobertura finita. Para mostar que não é compacto basta achar uma cobertura que não possui subcobertura finita.

Exemplo 2.39. Seja $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ conjunto finito em $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{G}\{G_\alpha\}$ coleção de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ tais que $K \subset \cup_\alpha G_\alpha$, i.e., $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de K. Para $i = 1, \dots, n$, seja $G_i \in \mathcal{G}$ tal que $x_i \in G_i$ (tal conjunto sempre existe pois $\mathcal{G}$ é cobertura de K). Então $G_1, \dots, G_n$ geram uma subcobertura finita de K. Logo K é compacto, e concluímos que todo conjunto finito é compacto.

Exemplo 2.40. O conjunto $(0,1)$ não é compacto. De fato $(0,1) \subset \cup_{i=1}^{\infty}(1/i,1)$, mas se existisse $\{G_{n_1},\dots,G_{n_p}\}$ tal que $(0,1) \subset \cup_{i=1}^{p}(1/n_i,1)$, então $(0,1) \subset (1/N^*,1)$, onde $N^* = \max\{n_1,\dots,n_p\} > 0$, um absurdo.

Teorema 2.5.3 (Heine–Borel). *Um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é compacto se e somente se é fechado e limitado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Assuma $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto. Então $K \subset \cup_{m=1}^{\infty} B_m(\mathbf{0})$. Como K é compacto, a cobertura acima possui subcobertura finita e portanto existe M tal que $K \subset B_M(\mathbf{0})$. Logo K é limitado.

Para mostrar que é também fechado, seja $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(K)$ e $G_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| > 1/n\}$. Logo G_n é aberto e $\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{x}\} = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Mas como $\mathbf{x} \notin K$, então $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Usando agora que K é compacto, extraimos uma subcobertura finita e temos $K \subset \cup_{n=1}^{N^*} G_n = G_{N^*}$. Portanto $K \cap B_{1/N^*}(\mathbf{x}) = \emptyset$ e concluímos que $B_{1/N^*}(\mathbf{x}) \subset \mathcal{C}(K)$. Logo $\mathcal{C}(K)$ é aberto e K é fechado.

($\Leftarrow$) Suponha K fechado e limitado. Então existe uma cela

$$K \subset I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \, a_i \le x_i \le b_i, \text{ para } i = 1,\dots n\}$$

tal que $K \subset I$. Seja $d = [\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2]^{1/2}$. A fim de obter uma contradição, suponha que exista um recobrimento aberto $\{G_\alpha\}$ de K que não contenha nenhuma subcobertura finita de K. Seja $c_i = (a_i + b_i)/2$. Então $[a_i, c_i]$ e $[c_i, b_i]$ determinam 2^n celas cuja união é I. Pelo menos uma destas celas contém pontos da parte de K que não pode tem subcobertura finita. Chame de I_1 esta cela. Subdividindo I_1 desta mesma forma, obtemos uma sequência de celas fechadas $\{I_n\}$ tal que

(1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$,
(2) I_n contém parte de K que não tem subcobertura finita,
(3) se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in I_n$, então $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le 2^{-n}d$.

Pelo Teorema das celas encaixantes, existe $\boldsymbol{\xi} \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $I_n \cap K \ne \emptyset$, então $\boldsymbol{\xi}$ é ponto de acumulação de K. mas K fechado implica que $\boldsymbol{\xi} \in K$. Portanto $\boldsymbol{\xi} \in G_\alpha$, para algum α. Como G_α é aberto, então existe r tal que

$$\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}\| \le r \implies \mathbf{y} \in G_\alpha. \tag{2.5.1}$$

Seja n tal que $2^{-n}d < r$, e $\mathbf{y}$ um ponto arbitrário de I_n. Por (3) acima,

$$\|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}\| \le 2^{-n}d < r.$$

Por (2.5.1), concluímos que $\mathbf{y} \in G_\alpha$, e portanto, todo ponto de I_n pertence a G_α. Logo, $I_n \subset G_\alpha$, e G_α é uma cobertura de I_n, uma contradição com (2). □

Uma outra demonstração que apresentamos abaixo vale no caso unidimensional pode ser usada para mostrar que um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}$ é compacto.

Teorema 2.5.4. *Um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}$ é compacto.*

Demonstração. **Parte (i)** Primeiro assumimos $K = [-l,l]$, e $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ cobertura aberta de K. Seja

$$S = \{c \in [-l,l] : \, [-l,c] \text{ pode ser coberto por finitos abertos de } \mathcal{G}\}.$$

Então S é não vazio, pois $l \in S$, e é limitado. Seja $s = \sup S$. Então $s \in [-l,l]$, pois se $s > l$ teríamos l como cota superior de S menor que o supremo, um absurdo.

Seja então $G_{\bar{\alpha}}$ elemento de $\mathcal{G}$ tal que $s \in G_{\bar{\alpha}}$. Sabemos que tal $G_{\bar{\alpha}}$ existe pois $\mathcal{G}$ é cobertura de $[-l, l]$ e $s \in [-l, l]$.

Primeiro afirmamos que $s \in S$, pois caso contrário suponha $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ subcobertura finita de S. Então teríamos $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}, G_{\bar{\alpha}}\}$ subcobertura finita de $[-l, s]$.

Queremos mostrar agora que $s = l$. Assumindo $s < l$, e como $G_{\bar{\alpha}}$ é aberto então existe ϵ tal que $s + \epsilon \in G_{\bar{\alpha}}$, e $s + \epsilon < l$, logo $s + \epsilon \in S$, uma contradição com a definição de supremo.

Parte (ii) Consideramos agora o caso geral, onde K é fechado e limitado, e $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ é cobertura aberta de K. Como K é fechado, então $\mathcal{C}(K)$é aberto, e como K é limitada, então existe $l \in \mathbb{R}^n$ tal que $K \subset [-l, l]$. Logo $\{G_\alpha, \mathcal{C}(K)\}$ geram uma cobertura aberta de $[-l, l]$. Pela **Parte (i)**, existe uma subcobertura $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}, \mathcal{C}(K)\}$ de $[-l, l]$, e portanto também de K pois $K \subset [-l, l]$. Como $K \cap \mathcal{C}(K) = \emptyset$, então $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ é uma cobertura finita de K. $\square$

2.6. Exercícios

Exercício 2.1. Se $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e e I_s é dado por $I_s := [\inf S, \sup S]$, mostre que $S \subset I_s$.

Exercício 2.2. Demonstre os ítens (2) e (3) no Lema 2.1.5.

Exercício 2.3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e as funções $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(X)$ e $g(X)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : X \to \mathbb{R}$ por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Mostre que $\sup(f+g)(X) \le \sup f(X)+\sup g(X)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Exercício 2.4. Seja $S \subset \mathbb{R}$ conjunto limitado. Mostre que $\inf S$ e $\sup S$ são únicos.

Exercício 2.5. Aponte na demonstração do Teorema 2.1.8 quais o(s) argumento(s) que não é (são) válido(s) se considerarmos uma sequência encaixante de intervalos abertos.

Exercício 2.6. Demonstar os ítens (2), (3) e (4) do Lema 2.2.2.

Exercício 2.7. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, e denote por interior de A o conjunto A° de pontos interiores de A. Mostre que

(1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
(2) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(3) Se $B \subset A$ e B é aberto, então $B \subset A^\circ$ (i.e. A° é o "maior" aberto contido em A)

Exercício 2.8. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Chamamos de *fecho de* A, e denotamos por $\bar{A}$, a interseção de todos os fechados que contenham A. Mostre que $\mathbf{x} \in \bar{A}$ se e somente se $\mathbf{x}$ é ponto de interior ou de fronteira da A.

Exercício 2.9. Demonstre o Corolário 2.3.8.

Exercício 2.10. Mostre que um ponto $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação se e somente se toda vizinhança de $\mathbf{x}$ contém infinitos pontos de A.

Exercício 2.11. Mostre que todo ponto de

$$\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

é ponto de fronteira, mas somente 0 é ponto de acumulação.

Exercício 2.12. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{x}$ ponto de acumulação de $A \cap B$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de A e de B.

Exercício 2.13. Mostre que $F \neq \emptyset$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, e $\inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in F\} = 0$, então $\mathbf{x} \in F$.

Exercício 2.14. Mostre que se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ são pontos em $\mathbb{R}^n$, então existem vizinhanças U de $\mathbf{x}$ e V de $\mathbf{y}$ tais que $U \cap V = \emptyset$.

Exercício 2.15. Mostre que se U e V são vizinhanças de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então $U \cap V$ é vizinhança de $\mathbf{x}$.

Exercício 2.16. Para cada um dos conjuntos abaixo, ache, se for possível, uma cobertura de abertos que não contenha subcobertura finita.

(1) $\mathbb{R}$
(2) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$
(3) $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$

Exercício 2.17. Mostre sem usar o Teorema de Heine–Borel que a bola aberta $B_1(\mathbf{0})$ não é compacta.

Exercício 2.18. Mostre sem usar o Teorema de Heine–Borel que K é compacto e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.

Exercício 2.19. Mostre que se K é compacto e $S \subset K$ é infinito, então S contém pelo menos um ponto de acumulação.

Exercício 2.20. Mostre o resultado do exercício 2.19 sem usar o Teorema de Heine–Borel.

Exercício 2.21 (Teorema da interseção de Cantor). Assuma que $\{K_j\}$ seja uma coleção de conjuntos compactos, com $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$. Mostre que $\cap_{j=1}^{\infty} K_j$ é não vazio.

CAPÍTULO 3

Sequências

[1]

3.1. Definição e resultados preliminares

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^n$. Portanto $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ indica uma sequência de números reais, que escrevemos também como $(\mathbf{x}_k)$, ou ainda $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots)$. Para indicar o k-ésimo valor da sequência escrevemos simplesmente $\mathbf{x}_k$.

Exemplo 3.1. $x_k = (-1)^k$ define a sequência $(-1, 1-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.2. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, e $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$ para $k \geq 2$. Portanto temos $(x_k) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

Podemos realizar com sequências várias das operações que realizamos com números reais, como por exemplo somar, subtrair, etc. Sejam por exemplo $(\mathbf{x}_k)$ e $(\mathbf{y}_k)$ duas sequências em $\mathbb{R}^n$, e $c \in \mathbb{R}$. Então definimos

$$(\mathbf{x}_k) + (\mathbf{y}_k) = (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k), \qquad (\mathbf{x}_k) - (\mathbf{y}_k) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k), \qquad c(\mathbf{x}_k) = (c\mathbf{x}_k).$$

Podemos da mesma forma definir produtos de sequências em $\mathbb{R}$ por $(x_k) \cdot (y_k) = (x_k y_k)$.

Exemplo 3.3. Se $x_k = (2, 4, 6, 8, \dots)$ e $(y_k) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, então $(x_k) \cdot (y_k) = (2, 2, 2, \cdots)$.

A primeira pergunta que surge quando tratamos de sequências é quanto à convergência destas, isto é, se quando k aumenta, os termos x_k se aproximam de algum valor real. Note que para isto, não importa o que acontece com finitos termos da sequência, mas sim seu comportamento assintótico com respeito a k. Em outras palavras queremos determinar o comportamento das sequências no "limite".

Definição 3.1.1. *Dizemos que* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *é* limite de uma sequência $(\mathbf{x}_k)$, *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $K^* \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon$ *para todo* $k > K^*$. *Escrevemos neste caso que* $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$, *ou que* $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_k$, *ou ainda*

$$\mathbf{x} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{x}_k.$$

De forma resumida, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ *se para todo* ϵ *existir* $K^* \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$k \geq K^* \implies \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon.$$

Se uma sequência não tem limite, dizemos que ela diverge ou é divergente.

O lema abaixo é consequência da definição de convergência, e portanto na maioria dos exemplos a seguir nos restringimos ao caso unidimensional.

[1]Última Atualização: 15/02/2006

LEMA 3.1.2. Toda sequência $(\mathbf{x}_k)$ em $\mathbb{R}^n$ converge se e somente se a sequência das i-ésimas coordenadas $\big((x_i)_k\big)$ converge em $\mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. $\square$

EXEMPLO 3.4. Se $x_k = 1$, entao $\lim x_k = 1$. De fato, dado $\epsilon > 0$, para todo $k \geq 1$ temos $|x_k - 1| = 0 < \epsilon$.

EXEMPLO 3.5. $\lim(1/k) = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que $1/K^* < \epsilon$. Logo, para todo $n > K^*$ temos $|1/k - 0| = 1/k < 1/K^* < \epsilon$.

EXEMPLO 3.6. $(0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ não converge para 0. De fato, tome $\epsilon = 1$. Então para todo $K^* \in \mathbb{N}$ temos $2K^* > K^*$ e $x_{2K^*} = 2$. Portanto $|x_{2K^*} - 0| = 2 > \epsilon$.

Observe que diferentes situações ocorrem nos exemplos acima. Em 3.4 a sequência é constante, e a escolha de K^* independe de ϵ. Já no exemplo 3.5, temos que K^* claramente depende de ϵ.

A seguir, no exemplo 3.6 o objetivo é mostar que um certo valor x *não* é o limite da sequência (x_k). Mostramos então que existe pelo menos um certo $\epsilon > 0$ tal que para todo K^*, conseguimos achar $n > K^*$ tal que $|x_k - x| > \epsilon$. Note que o que fizemos foi *negar* a convergência.

EXEMPLO 3.7. Sejam $(\mathbf{x}_n)$ e $(\mathbf{y}_n)$ sequências em $\mathbb{R}^n$ e seja $(\mathbf{z}_i)$ a sequência formada por $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{z}_4 = \mathbf{y}_2$,$\dots$, $\mathbf{z}_{2i-1} = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{z}_{2i} = \mathbf{y}_i$, $\dots$. Então, se $\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_i = \boldsymbol{\xi}$ e $\lim_{i\to\infty} \mathbf{y}_i = \boldsymbol{\xi}$, temos que $\lim_{i\to\infty} \mathbf{z}_i = \boldsymbol{\xi}$.

De fato, Suponha que $(\mathbf{z}_n)$ não convirja para $\boldsymbol{\xi}$. Então existe um ϵ, uma subsequência $(\mathbf{z}_{n_k})$, e um inteiro N_0 tal que

$$\|\mathbf{z}_{n_k} - \boldsymbol{\xi}\| > \epsilon.$$

para todo $n_k > N_0$. Isto implica que existem infinitos elementos de $(\mathbf{z}_n)$ distando mais que ϵ de $\boldsymbol{\xi}$. Logo existem infinitos elementos de $(\mathbf{x}_n)$ ou de $(\mathbf{y}_n)$ distando mais que ϵ de $\boldsymbol{\xi}$. mas isto contradiz o fato de que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \boldsymbol{\xi}$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \boldsymbol{\xi}$.

Talvez a segunda pergunta mais natural em relação aos limites de sequências é quanto a unicidade destes, quando existirem. A respota é afirmativa, como mostra o resultado abaixo.

TEOREMA 3.1.3 (Unicidade de limite). *Uma sequência pode ter no máximo um limite.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere que $(\mathbf{x}_k)$ é uma sequência tal que $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}'$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Sejam $\epsilon = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|/2 > 0$, e sejam K^* e $K' \in \mathbb{N}$ tais que $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \epsilon$ para todo $k > K^*$ e $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'\| < \epsilon$ para todo $k > K'$. Logo, se $k > \max\{K^*, K'\}$, então

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'\| < 2\epsilon = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|.$$

Como um número não pode ser estritamente menor que ele mesmo, temos uma contradição. Portanto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e o limite é único. $\square$

Para mostrar convergência, podemos usar o resultado seguinte.

TEOREMA 3.1.4. *Seja $(\mathbf{x}_k)$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$. Então as afirmativas são equivalentes.*

(1) $(\mathbf{x}_k)$ *converge para* $\mathbf{x}$.
(2) *Para toda vizinhança V de $\mathbf{x}$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que*

$$k \geq K^* \implies \mathbf{x}_k \in V.$$

Demonstração. Fica como exercício. □

As vezes, uma sequência se aproxima de algum valor em $\mathbb{R}^n$ de forma mais lenta que alguma outra sequência de reais que converge para 0. É possível assim garantir convergência, como o resultado a seguir nos mostra.

Lema 3.1.5. Seja (a_k) sequência em $\mathbb{R}$ convergente para 0. Se para $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ existir $c > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq c|a_k| \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

então $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$.

Demonstração. Como (a_k) converge, dado $\epsilon > 0$, seja $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k| < \epsilon/c$ para todo $k > K^*$. Logo

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq c|a_k| < \epsilon \quad \text{para todo } k > K^*,$$

e $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. □

Corolário 3.1.6. Seja (a_k) sequência em $\mathbb{R}$ convergente para 0. Se para $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ existir $c > 0$ e $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq c|a_k| \quad \text{para todo } k \geq K^*,$$

então $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$.

Exemplo 3.8. Seja $x_k = (2/k)\sin(1/k)$. Enão

$$|x_k - 0| \leq \frac{2}{k}.$$

Como $1/k \to 0$, podemos usar o lema acima para garantir que $\lim[(2/k)\sin(1/k)] = 0$.

Uma outra noção importante é o de limitação de uma sequência. Neste caso, mesmo quando a sequência não converge, podemos conseguir alguns resultados parciais, como veremos mais a seguir.

Definição 3.1.7. *Dizemos que uma sequência* $(\mathbf{x}_k)$ *é limitada quando existe um número real* C *tal que* $\|\mathbf{x}_k\| \leq C$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Um primeiro resultado intuitivo é que toda sequência convergente é limitada. De fato, é razoável pensar que se a sequência converge, ela não pode ter elementos arbitrariamente grandes em norma.

Teorema 3.1.8. *Toda sequência convergente é limitada*

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência convergente e seja $\mathbf{x}$ seu limite. Seja $\epsilon = 1$. Como $(\mathbf{x}_k)$ converge, existe K^* tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| < 1$ para todo $k > K^*$. Logo, usando a desigualdade triangular temos

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| < 1 + \|\mathbf{x}\| \quad \text{para todo } k > K^*.$$

Falta agora limitar os K^* primeiros termos da sequência. Seja então

$$C = \max\{\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\|, \|\mathbf{x}_3\|, \dots, \|\mathbf{x}_{K^*}\|, 1 + \|\mathbf{x}\|\}.$$

Portanto $\|\mathbf{x}_k\| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Outro resultado importante trata de limites de sequências que são resultados de operações entre sequências. Por exemplo, dadas duas sequências convergente, o limite da soma das sequências é a soma dos limites. E assim por diante.

LEMA 3.1.9. Seja $(\mathbf{x}_k)$ e $(\mathbf{y}_k)$ tais que $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ e $\lim \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$. Então
(1) $\lim(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.
(2) $\lim(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.
(3) $\lim(c\mathbf{x}_k) = c\mathbf{x}$, para $c \in \mathbb{R}$.
(4) Em $\mathbb{R}$, temos que $\lim(x_k y_k) = xy$.
(5) Em $\mathbb{R}$, temos que se $y_k \neq 0$ para todo k e $y \neq 0$, então $\lim(x_k/y_k) = x/y$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Dado $\epsilon > 0$, seja $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \epsilon/2$ e $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}\| < \epsilon/2$ para todo $k \geq K^*$. Logo

$$\|\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}\| < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq K^*.$$

(2) A demonstração é basicamente a mesma de (1), tomando-se o devido cuidado com os sinais.

(4) Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$|x_k y_k - xy| \leq |x_k y_k - x_k y| + |x_k y - xy| = |x_k||y_k - y| + |y||x_k - x|.$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k| < M$ e $|y| < M$. Tal constante M existe pois como (x_k) converge, ela é limitada. Agora, dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que $|y_k - y| < \epsilon/(2M)$ e $|x_k - x| < \epsilon/(2M)$ para todo $k \geq K^*$. Logo,

$$|x_k y_k - xy| \leq M[|y_k - y| + |x_k - x|] < \epsilon,$$

para todo $k \geq K^*$.

Deixamos (3) e (5) como exercícios para o leitor. □

OBSERVAÇÃO. Os resultados do lema acima continuam válidos para um número finito de somas, produtos, etc.

EXEMPLO 3.9. (n) diverge pois não é limitada.

EXEMPLO 3.10. Seja $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$. Mostraremos que (S_n) não é limitada, e portanto divergente. Note que

$$\begin{aligned} x_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{n} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{n} + \cdots + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{4} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{8} + \cdots + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Logo (S_n) não é limitada, e portanto diverge.

Outra forma de ver que a sequência acima diverge é por indução. Quero mostrar que $S_{2^n} \geq 1 + n/2$. Note que $S_2 = 1 + 1/2$. Assumindo que $S_{2^{n-1}} \geq 1 + (n-1)/2$ temos

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{(n-1)}{2} + \frac{1}{2} > 1 + \frac{n}{2},$$

como queríamos demonstrar. Mais uma vez a conclusão é que (S_n) não é limitada, logo diverge.

Exemplo 3.11. $\lim_{n\to\infty}\big((2n+1)/n\big) = 2$. De fato,

$$\frac{2n+1}{n} = (2) + \left(\frac{1}{n}\right).$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2) = 2$ e $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, nós obtemos o resultado.

Exemplo 3.12. $\lim_{n\to\infty}\big(2n/(n^2+1)\big) = 0$, pois

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2/n}{1+1/n^2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(2/n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2) = 1 \neq 0$, podemos aplicar o resultado sobre quociente de sequências.

Exemplo 3.13. A sequência

$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

converge. Primeiro note que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}. \tag{3.1.1}$$

Para $n = 1$ o resultado (3.1.1) é trivial. Assuma (3.1.1) vedadeiro para $n = k$. Temos então que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k^2+k}{2} + k + 1 = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2},$$

e portanto fórmula (3.1.1) é verdadeira. Temos então que

$$x_n = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2n}\right).$$

Logo (x_n) é soma de duas sequências convergentes, $(1/2)$ e $(1/2)(1/n)$ e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.14. Seja (x_n) sequência convergente em $\mathbb{R}$,e seja $x \in \mathbb{R}$ seu limite. Então a sequência definida por

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

converge e tem x como seu limite.

Sem perda de generalidade, supomos que (x_n) converge para zero. Para o caso geral quando (x_n) converge para x basta tratar a sequência $(x_n - x)$.

Seja $S_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$. Como (x_n) converge, então é limitada. Seja M tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que $M/K^* < \epsilon$ e $\sup\{|x_n| : n \geq K^*\} < \epsilon$. Então, temos $S_n = \check{S}_n + \hat{S}_n$, onde

$$\check{S}_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{K^*}), \qquad \hat{S}_n = \frac{1}{n}(x_{K^*} + x_{K^*+1} + \cdots + x_n).$$

Então (S_n) é a soma de duas sequências convergentes. De fato para $n > (K^*)^2$, temos $|\check{S}_n| \leq K^* M/n \leq M/K^* < \epsilon$. Além disso, $|\hat{S}_n| < \epsilon(n - K^*)/n < \epsilon$. Portanto (S_n) converge.

Outro resultado importante refere-se à convergencia das normas de sequências: se uma sequência converge, entao a sequência de normas também converge. A reciproca *não* é verdadeira. Basta considerar como contra-exemplo a sequência $\big((-1)^n\big)$. Neste caso a sequência diverge mas a sequência de seus valores absolutos converge.

LEMA 3.1.10. Seja $(\mathbf{x}_n)$ convergente. Então $(\|\mathbf{x}_n\|)$ também o é.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.2. Subsequências e Teorema de Bolzano–Weierstrass

Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ e $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_j < \ldots$ sequência de números naturais. Então dizemos que (x_{k_j}) é uma *subsequência* de $(\mathbf{x}_k)$.

EXEMPLO 3.15. Se $(\mathbf{x}_k) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$, então $(1, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \ldots)$ e (x_{2^k}) são subsequências de $(\mathbf{x}_k)$.

Um primeiro resultado relacionado com subsequências nos diz que se uma sequência converge para um determinado limite, entao todas as subsequências convergem e têm o mesmo limite.

LEMA 3.2.1. Se uma sequência $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$, então todas as subsequências de $(\mathbf{x}_k)$ são convergentes e têm o mesmo limite $\mathbf{x}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\mathbf{x}_k)$ subsequência convergente, e seja $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{x}_k)$. Dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq K^*. \tag{3.2.1}$$

Seja $(\mathbf{x}_{k_j})$ subsequência de $(\mathbf{x}_k)$. Como $k_j \geq j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $j \geq K^*$ implica em $k_j \geq K^*$ e portanto

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k_j}\| < \epsilon,$$

por (3.2.1). Logo $(\mathbf{x}_{k_j})$ converge para $\mathbf{x}$. □

EXEMPLO 3.16. $\big((-1)^n\big)$ diverge pois se convergisse para algum $x \in \mathbb{R}$, suas subsequências convirgiriam este mesmo valor. Mas

$$\lim_{n\to\infty}\big((-1)^{2n}\big) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\big((-1)^{2n+1}\big) = -1.$$

Exemplo 3.17. (a^n) é não crescente e limitada para $0 < a < 1$. Logo é convergente. Seja $l = \lim_{n\to\infty}(a^n)$. Então

$$l = \lim_{n\to\infty}(a^{2n}) = \lim_{n\to\infty}(a^n) \lim_{n\to\infty}(a^n) = l^2.$$

Logo $l = 0$ ou $l = 1$. Como a sequência é não crescente e limitada superiormente por $a < 1$, então $l = 1$ não pode ser limite. Logo $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$.

Lema 3.2.2 (Critérios de divergência). Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$. As afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) $(\mathbf{x}_k)$ não converge para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(2) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $K^* \in \mathbb{N}$, existe $k_j \in \mathbb{N}$, com $k_j > K^*$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{k_j}\| \geq \epsilon$.
(3) Existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência $(\mathbf{x}_{k_j})$ de $(\mathbf{x}_k)$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k_j}\| > \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Se $(\mathbf{x}_k)$ não converge para $\mathbf{x}$ então existe $\epsilon > 0$ tal que é impossível achar $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\| < \epsilon$ para todo $k > K^*$. Logo, para todo K^*, existe $k_j > K^*$ tal que $\|x - x_{k_j}\| > \epsilon$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Seja ϵ como em (2). Para todo $j \in \mathbb{N}$, seja $k_j > j$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k_j}\| \geq \epsilon$. Portanto s subsequência $(\mathbf{x}_{k_j})$ satisfaz a propiedade em (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1): Se $(\mathbf{x}_k)$ convergisse para $\mathbf{x}$ teríamos $(\mathbf{x}_{k_j})$ convergindo para $\mathbf{x}$, o que contraria a hipótese inicial. Logo $(\mathbf{x}_k)$ não converge para $\mathbf{x}$. □

No exemplo abaixo temos uma aplicação imediata do Lema 3.2.2.

Exemplo 3.18. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ tal que toda subsequência de $(\mathbf{x}_k)$ contém uma subsequência convergente para $\mathbf{x}$. Então $(\mathbf{x}_k)$ converge para $\mathbf{x}$.

Por contradição suponha que $(\mathbf{x}_k)$ não convirja para $\mathbf{x}$. Portanto existe uma subsequência $(\mathbf{x}_{k_j})$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k_j}\| > \epsilon \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{3.2.2}$$

Mas então, por hipótese, $(\mathbf{x}_{k_j})$ tem uma subsequência convergindo para $\mathbf{x}$, uma contradição com (3.2.2).

Finalmente mostramos um importante resultado que nos garante convergencia de alguma subsequência mesmo quando a sequência original não converge. É o análogo para sequências do Teorema de Bolzano–Weierstrass 2.4.2.

Teorema 3.2.3 (Bolzano–Weierstrass para sequências). *Toda sequência limitada de numeros reais tem pelo menos uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ e $s = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Então S é finito ou não. Se S for finito, então existe pelo menos um elemento $s \in S$ tal que $s = \mathbf{x}_{k_1} = \mathbf{x}_{k_2} = \mathbf{x}_{k_3} = \dots$ para algum k_1, k_2, k_3, ... em $\mathbb{N}$. Neste caso, a subsequência constante $(\mathbf{x}_{k_j})$ é convergente.

Se S for infinito, e como este conjunto é limitado por hipótese, então o teorema de Bolzano–Weierstrass 2.4.2 garante a existência de pelo menos um ponto $\mathbf{x}$ de acumulação de S. Como $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação, então para todo $j \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um ponto em

$S \cap B_{1/j}(\mathbf{x})$, i.e., existe $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_{k_j} \in S \cap B_{1/j}(\mathbf{x})$. Então, dado $\epsilon > 0$, para $1/J < \epsilon$ temos

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k_j}\| < \frac{1}{j} < \frac{1}{J} < \epsilon \quad \text{para todo } j \geq J.$$

Logo, a subsequência $(\mathbf{x}_{k_j})$ é convergente. □

Exemplo 3.19. Suponha que $(\mathbf{x}_k)$ é uma sequência limitada de elementos *distintos*, e que o conjunto $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem exatamente um ponto de acumulação. Então $(\mathbf{x}_k)$ é convergente. De fato, seja $\mathbf{x}$ o ponto de acumulação da sequência. Por absurdo, assuma que $(\mathbf{x}_k)$ não converge para $\mathbf{x}$. Então existe $\epsilon > 0$ e uma subsequencia $(\mathbf{x}_{k_j})$ tal que

$$\|\mathbf{x}_{k_j} - \mathbf{x}\| > \epsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Mas então o conjunto $\{\mathbf{x}_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$ é infinito pois os $\mathbf{x}_{k_j}$ são distintos e portanto pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass ele tem pelo menos um ponto de acumulação, que é diferente de $\mathbf{x}$, uma contradição com $\mathbf{x}$ ser o único ponto de acumulação de $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$.

3.3. Sequências de Cauchy

Um conceito importante tratando-se de sequências é o de sequências de Cauchy. Formalmente, dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_k)$ é *de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| < \epsilon \quad \text{para todo } k, m \geq K^*.$$

Usando os lemas a seguir, mostraremos que uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.

Lema 3.3.1. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência convergente, e $\mathbf{x}$ o seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|x - \mathbf{x}_k| < \epsilon/2$ para todo $k \geq K^*$. Portanto,

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_m| < \epsilon \quad \text{se } k, m \geq K^*.$$

Logo $(\mathbf{x}_k)$ é de Cauchy. □

Lema 3.3.2. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência de Cauchy. Então, considerando $\epsilon = 1$, temos que existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbf{x}_{K^*} - \mathbf{x}_k| < 1$ para todo $k > K^*$. Logo, para $k > K^*$ temos

$$|\mathbf{x}_k| \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_K^*| + |\mathbf{x}_K^*| < 1 + |\mathbf{x}_K^*|.$$

Definindo $C = \max\{|\mathbf{x}_1|, \dots, |\mathbf{x}_{K^*-1}|, 1 + |\mathbf{x}_K^*|\}$, temos imediatamente que $|\mathbf{x}_k| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto a sequência é limitada. □

Finalmente podemos enunciar a equivalencia entre convergência e o critério de Cauchy.

Teorema 3.3.3 (Critério de convergência de Cauchy). *Uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.*

DEMONSTRAÇÃO. Já vimos no Lema 3.3.1 que se uma sequência é convergente, ela é de Cauchy.

Assuma agora que $(\mathbf{x}_k)$ é sequência de Cauchy. Pelo Lema 3.3.2, a sequência é limitada, e pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass 3.2.3, existe uma subsequência $(\mathbf{x}_{k_j})$ convergente. Seja $\mathbf{x} = \lim_{k_j\to\infty}(\mathbf{x}_{k_j})$. Quero mostrar que $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{x}_k)$. Seja $\epsilon > 0$. Como $(\mathbf{x}_k)$ é de Cauchy, temos que existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } k, m \geq K^*. \tag{3.3.1}$$

Como $(\mathbf{x}_{k_j})$ é convergente, então existe $m \in \{k_1, k_2, \dots\}$ tal que $m > K^*$, e

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $m > K^*$ temos também de 3.3.1 que $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| \leq \epsilon/2$ para todo $k \geq K^*$. Finalmente, para todo $k \geq K^*$ temos

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k| < \epsilon.$$

Concluímos que $(\mathbf{x}_k)$ converge. □

EXEMPLO 3.20. Considere $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$ para $n \geq 3$. Então mostraremos que (x_n) converge pois é de Cauchy. Mostramos primeiro que

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \tag{3.3.2}$$

Note que (3.3.2) é válido para $n = 1$. Supondo também válida para $n = k$, i.e., que

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{3.3.3}$$

temos

$$|x_{k+1} - x_{k+2}| = |x_{k+1} - \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k)| = |\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)| = \frac{1}{2^k},$$

onde usamos (3.3.3) na última igualdade. Concluímos por indução que (3.3.2) é válida.

Tendo (3.3.2) demonstrado, basta agora, dado ϵ, tomar K^* tal que $2^{K^*-2}\epsilon > 1$. Neste caso, se $n \geq m \geq K^*$, tem-se

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + |x_{n-2} - x_{n-3}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-4}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{1}{2^{n-m-1}} + \frac{1}{2^{n-m-2}} + \frac{1}{2^{n-m-3}} + \cdots + 1\right) \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1 - 1/2^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{m-2}} < \epsilon,\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

EXEMPLO 3.21. Em geral, se (x_n) é tal que $|x_{n+1} - x_n| < c_n$, onde $S_n = \sum_{i=1}^n c_k$ é convergente, então (x_n) é convergente. De fato, mostramos abaixo que a sequência é de Cauchy, e portanto converge. Note que para $n > m$, temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \leq c_{n-1} + c_{n-2} + \cdots + c_m = S_{n-1} - S_{m-1}. \tag{3.3.5}$$

Como S_n converge, então é de Cauchy. Logo dado $\epsilon > 0$, existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $n > m > K^*$ implica que $|S_{n-1} - S_{m-1}| < \epsilon$. Logo, por (3.3.5) temos que $n > m > K^*$ implica que $|x_n - x_m| < \epsilon$ e (x_n) é de Cauchy.

3.4. Sequências Contráteis

Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_k)$ é *contrátil* se existem número real $\lambda < 1$ e um natural K^* tais que

$$|\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}| \leq \lambda |\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k|$$

para todo $k > K^*$.

TEOREMA 3.4.1. *Toda sequência contrátil é convergente*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\mathbf{x}_n)$ sequência contrátil com constante $\lambda < 1$. Sem perda de generalidade, assumimos nesta demonstração que $K^* = 0$, isto é

$$|\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}| \leq \lambda |\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$|\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}| \leq \lambda |\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k| \leq \lambda^2 |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}| \leq \cdots \leq \lambda^k |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|.$$

Logo, para $m \in \mathbb{N}$ e $k \geq m$ temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| &\leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}| + |\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-2}| + \cdots + |\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{x}_m| \\ &\leq \big(\lambda^{k-2} + \lambda^{k-3} + \cdots + \lambda^{m-1}\big)|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = \lambda^{m-1}\big(\lambda^{k-m-1} + \lambda^{k-m-2} + \cdots + 1\big)|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \\ &= \lambda^{m-1}\frac{\lambda^{k-m} - 1}{\lambda - 1}|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \leq \frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda}|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|. \end{aligned}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ se $K^* \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\frac{\lambda^{K^*-1}}{1-\lambda}|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| < \epsilon,$$

então $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m| < \epsilon$ para todo $m \geq K^*$, $k \geq K^*$. Portanto a sequência é de Cauchy e é convergente □

EXEMPLO 3.22. Seja a sequência definida por

$$x_0 = a > 0, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Queremos mostrar que (x_n) é contrátil, e portanto convergente.

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 1/x$. Então a sequência é definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, e temos portanto que $x^* = (1 + \sqrt{5})/2$ é a única solução em $\mathbb{R}^+$ para a equação $x = f(x)$. Usaremos mais tarde o fato de que $x > x^*$ implica em $x^2 > x + 1$. Note ainda que f é tal que

$$x > y \implies f(x) < f(y), \tag{3.4.1}$$

e que se x, $y \in \mathbb{R}^+$ e $c < \min\{x, y\}$, então

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{|y - x|}{c^2}. \tag{3.4.2}$$

A fim de utilizar (3.4.2), mostraremos que (x_n) é limitada inferiormente por algum número maior que um.

Temos então três possibilidades: $a = x^*$, $a > x^*$ ou $a < x^*$. Quando $a = x^*$, a série é trivialmente convergente pois temos $x_1 = x_2 = \cdots = x^*$. Assuma então que $x_0 = a > x^*$. A análise para $a < x^*$ é similar.

Então $x_1 = f(x_0) < f(x^*) = x^*$. Por indução temos que $x_{2n-2} > x^*$ e $x_{2n-1} < x^*$. De fato, como estas desigualdades são verdadeiras para $n = 1$ e assumindo também corretas para $n = k$ temos $x_{2k} = f(x_{2k-1}) > f(x^*) = x^*$ e $x_{2k+1} = f(x_{2k}) < f(x^*) = x^*$, como queríamos demonstrar.

Temos então $x_0 = a$, $x_1 = (a+1)/a$, e

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = \frac{2a+1}{a+1} < \frac{a+a^2}{a+1} = a = x_0,$$

onde usamos que $a + 1 < a^2$. Da mesma forma, $x_3 = 1 + 1/x_2 > 1 + 1/x_0 = x_1$. Portanto temos que para $n = 1$ vale $x_{2n} < x_{2n-2}$ e $x_{2n+1} > x_{2n-1}$. Assumindo estas duas desigualdades para $n = k$ temos

$$x_{2k+2} = 1 + 1/x_{2k+1} < 1 + 1/x_{2k-1} = x_{2k}, \qquad x_{2k+3} = 1 + 1/x_{2k+2} > 1 + 1/x_{2k} = x_{2k+1},$$

como queríamos demonstrar.

Concluímos que (x_{2n-1}) é sequência não decrescente, e que $|x_{2n}| > x^* > x_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (x_n) é limitada inferiormente por x_1.

Aplicando agora (3.4.2), temos

$$|x_{k+1} - x_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \frac{1}{x_1^2}|x_k - x_{k-1}|.$$

Como $x_1 = 1 + 1/a > 1$, então (x_n) é contrátil e portanto converge.

Para achar o valor limite, basta resolver $x = f(x)$, e temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

3.5. Caracterização de conjuntos fechados

Podemos usar sequências para caracterizar conjuntos fechados, como o resultado abaixo mostra.

Teorema 3.5.1. *Seja $F \subset \mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes.*

1. *F é fechado em $\mathbb{R}^n$.*
2. *Se $(\mathbf{x}_k)$ é sequência convergente, com $\mathbf{x}_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \in F$.*

Demonstração. (1)⇒(2) (*Por contradição*) Assuma F fechado em $\mathbb{R}^n$, e seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em F com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Suponha $\mathbf{x} \notin F$. Como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, existe vizinhança V de $\mathbf{x}$ tal que $V \cap F = \emptyset$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $\mathbf{x}_k \notin V$, uma contradição com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Portanto $\mathbf{x} \in F$.

(2)⇐(1) (*Por contradição*) Suponha que $\mathcal{C}(F)$ não seja aberto. Então existe $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um ponto em $\mathbf{x}_k \in B_{1/k}(\mathbf{x}) \cap F$. Logo $(\mathbf{x}_k)$ é uma sequência em F que converge para $\mathbf{x}$. Por hipótese, temos que $\mathbf{x} \in F$, uma contradição com $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(F)$. Portanto $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e F é fechado. □

3.6. Sequências em $\mathbb{R}$

Outros resultados importantes para tentar achar um "candidato" limite vêm a seguir. O primeiro nos diz que se temos uma sequência de números positivos, então o limite, se existir, tem que ser não negativo, podendo ser zero. A seguir, aprendemos que se temos uma sequência "sanduichadas" entre outras duas sequências convergentes que tem o mesmo limite, então a sequência do meio converge e tem também o mesmo limite.

Lema 3.6.1. Seja (x_n) convergente com $\lim x_n = x$. Se existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0$ para todo $n > K^*$, então $x \geq 0$.

Demonstração. (por contradição) Assuma que $x < 0$. Seja então $\epsilon = -x/2 > 0$. Como (x_n) converge para x, seja $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n > K^*$. Logo, $x_{K^*+1} \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, isto é, $x_{K^*+1} < x + \epsilon = x/2 < 0$. Obtivemos então uma contradição pois x_{K^*+1} não é negativo. □

Corolário 3.6.2. Se (x_n) e (x_n) são convergentes com $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, e se existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq y_n$ para todo $n > K^*$, então $x \geq y$.

Demonstração. Se $z_n = x_n - y_n$, então $\lim z_n = \lim x_n - \lim y_n = x - y$. O presente resultado segue então do Lema 3.6.1. □

Lema 3.6.3 (sanduíche de sequências). Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n > K^*$, para algum $K^* \in \mathbb{N}$. Assuma ainda que (x_n) e (z_n) convergem com $\lim x_n = \lim z_n$. Então (y_n) converge e $\lim y_n = \lim x_n = \lim z_n$.

Demonstração. Seja $a = \lim x_n = \lim z_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe K^* tal que $|x_n - a| < \epsilon$ e $|z_n - a| < \epsilon$ para todo $n > K^*$. Logo

$$-\epsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \epsilon \implies |y_n - a| < \epsilon$$

para todo $n > K^*$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.23. $\lim_{n\to\infty}\big((\sin n)/n\big) = 0$ pois como $-1 \leq \sin n \leq 1$, então

$$-1/n \leq (\sin n)/n \leq 1/n,$$

e o resultado segue do lema 3.6.3.

Lema 3.6.4 (teste da razão). Seja (x_n) sequência de números positivos tal que (x_{n+1}/x_n) converge e $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) < 1$. Então (x_n) converge e $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

Demonstração. Seja $L = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n)$. Então, por hipótese, $L < 1$. Seja r tal que $L < r < 1$. Portanto dado $\epsilon = r - L > 0$, existe K^* tal que $x_{n+1}/x_n < L + \epsilon = r$ para todo $n \geq K^*$. Logo,

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < x_{n-2} r^3 < \cdots < x_{K^*} r^{n-K^*+1} \quad \text{para todo } n \geq K^*.$$

Se $c = x_{K^*} r^{-K^*}$. , então $0 < x_{n+1} < c r^{n+1}$. O resultado segue do Corolário 3.1.6, pois como $r < 1$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. □

Corolário 3.6.5. Seja (x_n) tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

existe e $L > 1$. Então para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N^* \implies |x_n| > C.$$

DEMONSTRAÇÃO. basta considerar o teste da razão para $y_n = 1/x_n$. Neste caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}} = \frac{1}{L} < 1.$$

Logo (y_n) converge para zero, e para todo $C \in \mathbb{R}^+$ existe K^* tal que

$$n \geq K^* \implies |y_n| < \frac{1}{C}.$$

Portanto para $n \geq K^*$ temos $|x_n| > C$ e (x_n) não é limitada e não converge.

□

EXEMPLO 3.24. Seja $(x_n) = n/2^n$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \big(\frac{x_{n+1}}{x_n}\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n}\big) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \big(\frac{n+1}{n}\big) = \frac{1}{2}.$$

Pelo teste da razão temos $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$

EXEMPLO 3.25. Note que para $x_n = 1/n$, temos $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$ e (x_n) converge. Entretanto, para $y_n = n$, temos $\lim_{n\to\infty} y_{n+1}/y_n = 1$ mas (y_n) *não convergente*. Portanto o teste não é conclusivo quando o limite da razão entre os termos é um.

3.7. Limite superior e inferior

Uma noção importante tratando-se de sequências é a de limites superiores ($\limsup$) e inferiores ($\liminf$), que nos dá informações sobre sequências limitadas mesmo quando estas não são convergentes.

Seja (x_n) sequência limitada de reais, e defina

$$V = \{v \in \mathbb{R} : \text{ existem finitos } n \in \mathbb{N} \text{ tais que } x_n > v\}.$$

Definimos então

$$\limsup x_n = \inf V.$$

De forma análoga, se

$$W = \{v \in \mathbb{R} : \text{ existem finitos } n \in \mathbb{N} \text{ tais que } x_n < v\},$$

definimos

$$\liminf x_n = \sup W.$$

LEMA 3.7.1. Seja (x_n) sequência de reais limitada. Então (x_n) converge para x se e somente se $\limsup x_n = \liminf x_n = x$.

EXEMPLO 3.26. Seja $(x_n) = (-1)^n$. Então $\liminf x_n = -1$ e $\limsup x_n = 1$.

EXEMPLO 3.27. Seja

$$(z_n) = \left((-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Então $\liminf z_n = -1$ e $\limsup z_n = 1$.

3.8. Sequências Monótonas

Um classe muito especial de seqiencias é a de sequências monótonas. Uma sequência monótona é tal que seus valores não "oscilam", i.e., eles ou nunca diminuem ou nunca aumentam. Pode-se ver que a definição de sequência monótona é restrita a uma dimensão.

Definição 3.8.1. *Dizemos que uma sequência* (x_n) *é* monótona crescente*, ou simplesmente* crescente *se* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \dots$. *Da mesma forma uma sequência* (x_n) *é* monótona decrescente*, ou simplesmente* decrescente *se* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \dots$. *Finalmente, uma sequência é* monótona *se for crescente ou decrescente.*

Exemplo 3.28. $(1, 2, 3, 4, \dots)$ e $(1, 2, 3, 3, 3, 3, \dots)$ são crescentes.

Exemplo 3.29. $(1/n)$ é decrescente.

Exemplo 3.30. $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ não é monótona.

Teorema 3.8.2. *Uma sequência monótona é convergente se e somente se é limitada.*

Além disso, se (x_n) *é crescente, então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Da mesma forma, se* (x_n) *é decrescente, então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Já vimos que toda sequência convergente é limitada.

($\Longleftarrow$) Assuma (x_n) crescente e limitada. Seja $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então dado $\epsilon > 0$, existe N tal que $x - \epsilon < x_N \leq x < x + \epsilon$, pois x é o supremo. Logo, para todo $n > N$ temos $x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x < x + \epsilon$, portanto x_n converge para x. Se a sequência for não-crescente, a demonstração é análoga. □

Exemplo 3.31. (a^n) diverge se $a > 1$ pois é ilimitada.

Exemplo 3.32. (a^n) converge se $0 < a \leq 1$ pois é monótona decrescente e limitada. Além disso, $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$, pois $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Exemplo 3.33. Seja $y_1 = 1$ e $y_{n+1} = (1 + y_n)/3$. Mostraremos que (y_n) é convergente e achamos seu limite. Note que $y_2 = 2/3 < 1 = y_1$. Vamos mostrar por indução que $0 < y_{n+1} < y_n$. Esta afirmativa vale para $n = 1$. Assuma verdadeira para $n = k - 1$, isto é $0 < y_k < y_{k-1}$. Então para $n = k$ temos

$$y_{k+1} = (1 + y_k)/3 < (1 + y_{k-1})/3 = y_k,$$

e como $y_k > 0$, então $y_{k+1} > 0$, como queríamos. Portanto a sequência é monótona não crescente e limitada inferiormente por zero. Portanto converge. Seja y seu limite. Então

$$y = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (1 + y_n)/3 = (1 + y)/3.$$

Logo $y = 1/2$.

Exemplo 3.34. Seja $y_1 = 1$, e $y_{n+1} = (2y_n + 3)/4$. Note que $y_2 = 5/4 > y_1$. Para mostrar que $y_{n+1} > y_n$ em geral, usamos indução. Note que para $n = 1$ o resultado vale. Assuma agora que valha também para $n = k$ para algum k, i.e., $y_{k+1} > y_k$. Então

$$y_{k+2} = \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) > \frac{1}{4}(2y_k + 3) = y_{k+1}.$$

Logo, por indução, $y_{n+1} > y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e (y_n) é não decrescente. Para mostrar que é limitada, note que $|y_1| < 2$. Mais uma vez usamos indução a fim de provar que em geral $|y_n| < 2$. Assuma que $|y_k| < 2$. Logo,

$$|y_{k+1}| = |\frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3)| < \frac{1}{4}(2|y_{k+1}| + 3) < \frac{7}{4} < 2.$$

Por indução, segue-se que $|y_n| < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (y_n) é monótona e limitada, então é convergente. Seja $y = \lim_{n\to\infty}(y_n)$. Então

$$y = \lim_{n\to\infty}(y_n) = \lim_{n\to\infty}((2y_n + 3)/4) = ((2y + 3)/4).$$

resolvendo a equação algébrica acima, temos $y = 3/2$.

Exemplo 3.35. Assuma $0 < a < b$, e defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Seja

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$

para $n \in \mathbb{N}$. Então (a_n) e (b_n) convergem para o mesmo limite.

Vamos mostrar por indução que

$$a_{i+1} > a_k, \quad a_k < b_k, \quad b_{i+1} < b_k \qquad \text{para } i = 0, 1, \dots. \tag{3.8.1}$$

Para $i = 0$ temos $a_0 = a < b = b_0$. Logo, usando que $y > x$ implica em $\sqrt{y} > \sqrt{x}$, e que a_0 e b_0 são positivos, temos $a_1 = \sqrt{a_0 b_0} > a_0$. Além disso, $b_1 = (a_0 + b_0)/2 < b_0$ pois $a_0 < b_0$. Portanto (3.8.1) vale para $i = 0$. Assuma que valha também para $i = n$. Então $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > a_n$. Além disso, $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 < b_n$ e $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 > a_n$ pois $a_n < b_n$ por hipótese. Então $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} < \sqrt{b_{n+1} b_n} < b_{n+1}$. Logo (3.8.1) vale também para $i = n + 1$. Portanto temos que (a_n) é monótona não decrescente e limitada superiormente, enquanto (b_n) é monótona não crescente e limitada superiormente. Ambas então convergem e sejam A e B seus limites. Neste caso teremos

$$A = \sqrt{AB}, \quad B = \frac{1}{2}(A + B).$$

e portanto $A = B$.

3.9. Exercícios

Exercício 3.1. Demontre o Lema 3.1.2.

Exercício 3.2. Demonstrar o Teorema 3.1.4.

Exercício 3.3. Demonstrar o Lema 3.1.10.

Exercício 3.4. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ é compacto.

Exercício 3.5. Dê um exemplo de uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ tal que toda subsequência convergente de (x_n) convirja para x, mas que (x_n) não seja convergente.

Exercício 3.6. Seja $(\mathbf{x}_n)$ sequência de Cauchy contendo uma subsequência convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $(\mathbf{x}_n)$ converge para $\mathbf{x}$.

Exercício 3.7. Sejam $(\mathbf{x}_k)$ e $(\mathbf{y}_k)$ duas sequências de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|$ converge.

EXERCÍCIO 3.8. Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = (2 + x_n)^{1/2}$. Mostre que x_n é monótona e limitada, e portanto converge. Ache seu limite.

EXERCÍCIO 3.9. Seja $a > 0$ e $x_1 > 0$. Mostre que a sequência dada por $x_{n+1} = (a + x_n)^{1/2}$ converge.

EXERCÍCIO 3.10. Dadas duas sequências limitadas (x_k) e (y_k), mostre que

$$\limsup(x_k + y_k) \leq \limsup(x_k) + \limsup(y_k).$$

CAPÍTULO 4

Continuidade e Funções Contínuas

[1] Um dos mais importantes tópicos de análise é o estudo de funções e suas propriedades, em particular a *continuidade*. Sejam os conjuntos $D \subset \mathbb{R}^m$ e $R \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $f : D \to R$ é contínua em $\mathbf{x} \in D$, se para toda vizinhança V de $f(\mathbf{x})$ existir vizinhança U de $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x} \in U \cap D \implies f(\mathbf{x}) \in V.$$

Finalmente, dizemos que f é contínua em $D' \subset D$ se f for contínua em todos os pontos de D'.

Dividimos o estudo de funções contínuas analisando primeiro propriedades locais, seguido das propriedades globais. A menos que seja explicitamente indicado, neste capítulo utilizaremos a notação acima.

4.1. Propriedades locais

Começamos observando que a *função f é contínua em todo ponto $\mathbf{x} \in D$ que não seja ponto de acumulação de D.* De fato, neste caso, existe vizinhança U de $\mathbf{x}$ tal que $D \cap U = \{\mathbf{x}\}$. Logo para todo vizinhança V de $f(\mathbf{x})$, temos que

$$\mathbf{y} \in D \cap U \implies \mathbf{y} = \mathbf{x} \implies f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \in V$$

Logo f é necessariamente contínua em $\mathbf{x}$.

Lema 4.1.1. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) f é contínua em $\mathbf{x}$.
(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$\mathbf{y} \in D, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon.$$
(3) Se $(\mathbf{x}_n)$ é tal que $\mathbf{x}_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, então $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$.

Outro resultado importante é o seguinte *critério de descontinuidade:* f não é contínua em $\mathbf{x}$ se e somente se existe sequência $(\mathbf{x}_n)$ em D convergindo para $\mathbf{x}$ mas $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$ não convergindo para $f(\mathbf{x})$.

Uma noção que pode ser útil em algumas ocasiões é a de *limites de funções.* Se $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de D, dizemos que $\mathbf{p}$ é o limite de f em $\mathbf{x}$ se para toda vizinhança V de $\mathbf{p}$ existir vizinhança U de $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{y} \in U \cap D, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \implies f(\mathbf{y}) \in V.$$

Neste caso, escrevemos $\mathbf{p} = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{y})$, e dizemos que f converge para $\mathbf{p}$ no ponto $\mathbf{x}$. Uma observação a respeito da definição acima é que só a utilizamos para pontos de acumulação

[1] Última Atualização: 15/02/2006

do domínio. Note também que a noção de limite em $\mathbf{x}$ independe do valor que f assume em $\mathbf{x}$. Na verdade, f não precisa nem estar definida neste ponto.

Observação. Note algumas diferenças na definição de limite de função e continuidade num ponto $\mathbf{x}$. Para definir limite, a função não precisava nem estar definida em $\mathbf{x}$, e se estivesse, o valor assumido não tinha importância. Mas fazia parte da definição que $\mathbf{x}$ fosse ponto de acumulação do domínio da função. Na definição de limite, a função tem que estar definida em $\mathbf{x}$, mas este ponto não necessariamente é de acumulação.

Se $\mathbf{x}$ for ponto de acumulação de D, então

$$f \text{ é contínua em } \mathbf{x} \iff f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{y}).$$

Exemplo 4.1. $g(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$. De fato, para todo $c \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x\to c} g(x) = c = g(c)$.

Exemplo 4.2. Seja

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Tomando-se as sequências $(-1/n)$ e $(1/n)$, ambas convergindo para $c = 0$ mas nunca atingindo este valor, tem-se $\big(f(-1/n)\big) = -1$ e $\big(f(1/n)\big) = 1$. Então esta função não tem limite em $c = 0$, pois se o limite existe, este tem que ser único. Portanto, a função $\operatorname{sgn}(\mathrm{x})$ não é contínua no zero, já que não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(\mathrm{x})$.

Exemplo 4.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

é descontínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Para mostrar isto, assuma $x \in \mathbb{Q}$, e uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ convergindo para x. Neste caso, $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 0 \neq 1 = f(x)$. Da mesma forma, se $x \notin \mathbb{Q}$, tomamos uma sequência (x_n) em $\mathbb{Q}$ convergindo para x, e temos $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 1 \neq 0 = f(x)$.

As vezes, é possível estender uma função de forma contínua. Seja $\mathbf{x} \notin D$ ponto de acumulação de D. Se existir $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{y})$, então definimos $f(\mathbf{x})$ como sendo este limite, e f será contínua em $\mathbf{x}$.

Exemplo 4.4. Considere a função

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e podemos estender f continuamente no zero definindo

$$g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então temos g contínua no zero (e somente no zero).

Exemplo 4.5. É claro que nem sempre tal extensão contínua é possível. Por exemplo no caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, não se pode definir $f(0)$ tal que $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ seja contínua.

4.1.1. Composição de funções. Em geral, se f e g são contínuas, então $f+g$, $f-g$, fg também o são. Da mesma forma, se $h : D \to \mathbb{R}$ é tal que $h(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x}$ do domínio, então f/h é contínua. O próximo resultado garante que a *composição* de funções contínuas também é contínua.

Teorema 4.1.2. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^m$, $R \subset \mathbb{R}^n$, e $f : D \to R$ e $g : R \to \mathbb{R}^l$. Assuma f contínua em $\mathbf{x} \in D$ e g contínua em $f(\mathbf{x}) \in R$. Enão a composição $g \circ f : D \to \mathbb{R}^l$ é contínua em $\mathbf{x}$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ e W vizinhança de $g(\mathbf{y})$. Como g é contínua em $\mathbf{y}$, então existe vizinhança V de $\mathbf{y}$ tal que

$$\mathbf{y}' \in V \cap R \implies g(\mathbf{y}') \in W.$$

Como f é contínua em $\mathbf{x}$, então existe vizinhança U de $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x}' \in U \cap D \implies f(\mathbf{x}') \in V.$$

Logo

$$\mathbf{x}' \in U \cap D \implies f(\mathbf{x}') \in V \implies g(f(\mathbf{x}')) \in W.$$

Portanto $g \circ f$ é contínua em $\mathbf{x}$. □

Exemplo 4.6. A função $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ é contínua em $\mathbb{R}^m$. Realmente, como

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| = |\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

se $(\mathbf{x}_n)$ converge para $\mathbf{x}$ então

$$|g(\mathbf{x}_n) - g(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \implies \lim_{n\to\infty} \big(g(\mathbf{x}_n)\big) = g(\mathbf{x}).$$

Portanto, se f é contínua em $\mathbf{x}$, entao $h(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x})\|$ também o é, pois $h = g \circ f$ é composição de funções contínuas.

4.2. Propriedades globais

Algumas propriedades de funções contínuas não estão restritas a apenas um ponto, mas sim a todo o domínio. Como exemplos citamos preservação de compacidade, e a continuidade uniforme.

Antes de prosseguirmos com as propriedades e suas aplicações, temos o seguinte resultado que caracteriza funções contínuas em todo domínio.

Teorema 4.2.1 (Continuidade Global). *As afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) *f é contínua em D*
(2) *Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então existe aberto $U \subset D$ tal que $U \cap D = f^{-1}(V)$*
(3) *Se $H \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então existe fechado $F \subset D$ tal que $F \cap D = f^{-1}(H)$*

Demonstração. (1) ⇒ (2): Seja f contínua em D e $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $\mathbf{x} \in f^{-1}(V)$. Como é f contínua, existe aberto $U_{\mathbf{x}}$ contendo $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{y} \in U_{\mathbf{x}} \cap D \implies f(\mathbf{y}) \in V.$$

Logo $U_{\mathbf{x}} \cap D \subset f^{-1}(V)$. Seja $U = \cup_{\mathbf{x} \in f^{-1}(V)} U_{\mathbf{x}}$. Então U é aberto pois é união de abertos, e $U \cap D = f^{-1}(V)$.

(2) ⇒ (1): Seja $\mathbf{x} \in D$ e V vizinhança aberta de $f(\mathbf{x})$. Por hipótese existe um aberto U tal que $U \cap D = f^{-1}(V)$. Mas como $f(\mathbf{x}) \in V$, então $\mathbf{x} \in U$ e portanto U é vizinhança de $\mathbf{x}$. Além disto, para todo $\mathbf{y} \in U \cap D$ tem-se $f(\mathbf{y}) \in V$.

(2) ⇒ (3): Seja $H \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Então como $\mathcal{C}(H)$ é aberto, temos por hipótese que existe aberto U tal que $U \cap D = f^{-1}(\mathcal{C}(H))$. Seja $F = \mathcal{C}(U)$. Então

$$\mathbf{x} \in F \cap D \implies f(\mathbf{x}) \notin \mathcal{C}(H) \implies f(\mathbf{x}) \in H \implies F \cap D \subset f^{-1}(H).$$

Por outro lado,

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(H) \implies \mathbf{x} \notin U \cap D \text{ e } \mathbf{x} \in D \implies \mathbf{x} \in F \cap D \implies f^{-1}(H) \subset F \cap D.$$

Logo $f^{-1}(H) = F \cap D$.

(3) ⇒ (2): semelhante ao caso anterior. □

Observação. Note que U aberto e f contínua *não* implica em $f(U)$ aberto. Da mesma forma, F fechado *não* implica em $f(F)$ fechado. Como exemplo tome $f(x) = x^2$ e $U = (-1, 1)$ implica em $f(U) = [0, 1)$.

E se $F = [1, +\infty)$ com $g(x) = 1/x$, então $g(F) = (0, 1]$.

4.2.1. Funções Contínuas em Conjuntos Compactos. Um resultado com várias aplicações vem a seguir e garante que a compacidade é uma propriedade preservada por funções contínuas.

Teorema 4.2.2 (Preservação de compacidade). *Se k é compacto, e $f : K \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ cobertura aberta para $f(K)$, i.e., $f(K) \subset \cup_\alpha G_\alpha$. Logo $K \subset \cup_\alpha f^{-1}(G_\alpha)$. Por f ser contínua, pelo Teorema 4.2.1, para todo α existe H_α aberto tal que $f^{-1}(G_\alpha) = H_\alpha \cap K$. Portanto $\{H_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, então existe $\{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}\}$ subcobertura finita. Logo,

$$K \subset \cup_{i=1}^n H_{\alpha_i} \cap K = \cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}),$$

e então $f(K) \subset \cup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$. Portanto, achamos uma subcobertura aberta finita para $f(K)$, e concluímos que $f(K)$ é compacto. □

Uma aplicação imediata do resultado acima é a existência de máximos e mínimos de funções contínuas definidas em compactos. Em particular, estas funções são limitadas.

Definição 4.2.3. *Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}^n$ é limitada em D se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(\mathbf{x})\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in D$.*

Exemplo 4.7. $\sin x$ é limitada em $\mathbb{R}$ pois $|\sin x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.8. $1/x$ não é limitada em $\mathbb{R}^+$. Entretanto $1/x$ é limitada em $(1/2, +\infty)$ pois $|1/x| \leq 2$ para todo x neste intervalo.

O Teorema 4.2.2 garante que imagens de compactos são conjuntos compactos, portanto pelo Teorema de Heine–Borel (Teorema 2.5.3) fechados e limitados. O resultado abaixo é consequência imediata deste fato.

TEOREMA 4.2.4. *Seja K compacto, e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua em K. Então f é limitada em K.*

Uma demonstração alternativa do Teorema 4.2.4 que dispensa o uso de noções de compacidade vem a seguir.

DEMONSTRAÇÃO. (alternativa do Teorema 4.2.4; *por contradição*) Assuma K fechado e limitado e f não limitada. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathbf{x}_n \in D$ tal que $f(\mathbf{x}_n) > n$. Como D é fechado e limitado, então, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, $(\mathbf{x}_n)$ possui subsequência $(\mathbf{x}_{n_k})$ convergente. Seja $\mathbf{x} = \lim_{n_k \to \infty} \mathbf{x}_{n_k}$. Como D é fechado, então $\mathbf{x} \in D$. Mas como f é contínua, então f tem limite em $\mathbf{x}$, e portanto é localmente limitada, uma contradição com a construção de $(\mathbf{x}_n)$. □

Outra noção importante é o de máximos e mínimos. Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ tem valor máximo em D se existe $x^* \in D$ tal que $f(x^*)$ é cota superior de $f(D)$. De forma análoga dizemos que f tem valor mínimo em D se existe $x_* \in D$ tal que $f(x_*)$ é cota inferior de $f(D)$. Chamamos x^* de ponto de valor máximo e x_* de ponto de valor mínimo.

OBSERVAÇÃO. Se uma função f como acima definida assume seus valores máximo e mínimo em D, então f é limitada em D.

EXEMPLO 4.9. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(1 - x^2)$ não é limitada em $(-1, 1)$, mas é limitada em $[-1/2, 1/2]$ por exemplo.

EXEMPLO 4.10. $f(x) = x$ é contínua e limitada em $(-1, 1)$, mas não assume valor máximo nem mínimo em $(-1, 1)$. Entretanto f assume seus valores máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

EXEMPLO 4.11. $h(x) = 1/(1+x^2)$ é limitada em $\mathbb{R}$, assume seu valor máximo em $x^* = 0$, mas não assume seu valor mínimo. Isto porque $\inf h(\mathbb{R}) = 0 \neq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO. Note que pontos de máximo e mínimo não são únicos em geral. Por exemplo, $f(x) = x^2$ tem -1 e 1 como seus dois pontos de máximo em $[-1, 1]$.

O resultado a seguir mais uma vez é consequência do Teorema 4.2.2.

TEOREMA 4.2.5 (Pontos Extremos). *Seja K compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua em K. Então f tem pelo menos um ponto de máximo e um de mínimo em K.*

DEMONSTRAÇÃO. Como K é compacto, então o Teorema 4.2.2 garante que $f(K)$ também é compacto. Logo $f(K)$ é limitado e portanto tem supremo, e $f(K)$ é fechado, e portanto o supremo pertence a $f(K)$. Logo existe $x^* \in K$ tal que $f(x^*) = \sup f(K)$.

Mesmo tipo de argumento assegura que existe ponto de mínimo em K. □

A seguinte demonstração dispense o uso direto de compacidade.

DEMONSTRAÇÃO. (alternativa do Teorema 4.2.5) Demonstraremos somente que f assume um valor máximo. O caso de valor mínimo é análogo. Como D é fechado limitado, então $f(D)$ é limitado. Seja $s^* = \sup f(D)$. Seja $\mathbf{x}_n$ tal que $f(\mathbf{x}_n) > s^* - 1/n$. Mas pelo

Teorema de Bolzano–Weierstrass, D limitado implica em existência de uma subsequência $(\mathbf{x}_{n_k})$ convergente. Seja $\mathbf{x}^*$ o limite de tal subsequência. Como D é fechado, então $\mathbf{x}^* \in D$. Como f é contínua, então $f(\mathbf{x}^*) = \lim_{n_k\to\infty} f(\mathbf{x}_{n_k})$. Finalmente, usamos que

$$s^* - \frac{1}{n_k} \leq f(\mathbf{x}_{n_k}) \leq s^*,$$

e pelo Lema do sanduíche de sequências 3.6.3, temos que $f(\mathbf{x}^*) = \lim_{n_k\to\infty} f(\mathbf{x}_{n_k}) = s^*$. □

Outro resultado de grande importância é o Teorema do Valor Intermediário que garante a preservação de intervalos por funções contínua.

Teorema 4.2.6 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Seja $A = \{x \in [a,b] : f(x) < d\}$. Logo A é não vazio pois $a \in A$. Definindo $c = \sup A$, seja $x_n \in A$ tal que $c - 1/n < x_n < c$. Então (x_n) converge para c e por continuidade de f, temos $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Como $f(x_n) < d$, então $f(c) \leq d$.

Assuma por um instante que $f(c) < d$. Mas f é contínua, e então para $\epsilon = d - f(c)$ existe $\delta > 0$ tal que $c + \delta < b$ e

$$x \in (c, c+\delta) \implies f(x) < f(c) + \epsilon = d.$$

Logo $c + \delta/2 > c$ e $c + \delta/2 \in A$, uma contradição pois $c = \sup A$. Portanto $f(c) = d$. □

Corolário 4.2.7 (Teorema do ponto fixo em uma dimensão). Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ contínua. Então f tem um ponto fixo, i.e., existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. seja $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $d(x) = f(x) - x$. Portanto d é contínua. Nosso objetivo é achar raiz para d em $[0,1]$. Se $d(0) = 0$ ou $d(1) = 0$, então nada mais há a fazer. Suponha que nem 0 nem 1 sejam raízes de d. Logo $d(0) = f(0) > 0$ e $d(1) = f(1) - 1 < 0$ pois $f(x) \in [0,1]$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 4.2.6), temos que existe $x \in (0,1)$ tal que $d(x) = 0$, como queríamos demonstrar. □

Concluímos esta parte com uma importante consequência dos resultados anteriores.

Teorema 4.2.8. *Seja I intervalo fechado limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ função contínua. Então $f(I)$ é intervalo fechado limitado.*

4.3. Funções Uniformemente Contínuas

Considere $g(x) = 1/x$, para $x \in (0,1)$. Seja $c \in (0,1)$. Então

$$g(c) - g(x) = \frac{1}{c} - \frac{1}{x} = \frac{x-c}{cx}.$$

Para mostrarmos que g é contínua em c. seja $\epsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\epsilon < 1$, e portanto $\epsilon c < 1$. Seja $\delta = c^2\epsilon/2$. Então

$$|x - c| < \delta \implies c < x + \delta = x + \frac{c^2\epsilon}{2} < x + \frac{c}{2} \implies \frac{c}{2} < x.$$

Logo

$$|x - c| < \delta \implies |g(c) - g(x)| = \frac{|x-c|}{cx} < \frac{\delta}{cx} = \frac{c^2\epsilon}{2cx} = \frac{c\epsilon}{2x} < \epsilon$$

onde usamos que $c/2 < x$ na última desigualdade. Mostramos então, usando ϵs e δs que $1/x$ é contínua em todo ponto diferente de zero. O objetivo principal do cálculo acima é ressaltar que a escolha de δ não é uniforme em relação ao ponto c, i.e., δ depende de c.

Em outros casos, a escolha de δ independe do ponto em questão. Por exemplo, para $f(x) = x$, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Dizemos que esta função é uniformemente contínua.

DEFINIÇÃO 4.3.1. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^m$ *e* $f : A \to \mathbb{R}^n$*. Dizemos que* f *é* uniformemente contínua em A *se para todo* $\epsilon > 0$*, existir* δ *tal que*

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset A, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon.$$

Note que a definição de continuidade uniforme só faz sentido no domínio ou subdomínio da função, e não pontualmente como na definição de continuidade. Uma forma equivalente de se definir uma função uniformemente contínua, é exigir que dado $\epsilon > 0$ exista δ tal que para todo $\mathbf{x} \in A$ tem-se

$$\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap A \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon.$$

Além disto, pode-se usar o seguinte resultado abaixo para se mostar que uma função *não* é uniformemente contínua.

LEMA 4.3.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) f não é uniformemente contínua em A.
(2) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existem pontos $x \in A$ e $c \in A$ tais que $|x - c| < \delta$ mas $|f(x) - f(c)| > \epsilon$.
(3) Existe $\epsilon > 0$ e duas sequencias (x_n) e (y_n) em A tais que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO 4.12. O resultado acima pode ser usado por exemplo para mostrar que $f(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^+$. Considere as sequencias $(1/n)$ e $\big(1/(n+1)\big)$. Então $\lim_{n\to\infty}\big(1/n - 1/(n+1)\big) = 0$ mas $f(1/n) - f\big(1/(n+1)\big) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma interessante propriedade da continuidade uniforme é dada abaixo, e tem aplicação na extensão de funções, ver exercício 4.8. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e assuma que $f : A \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua. Então $(\mathbf{x}_n)$ ser sequência de Cauchy implica que $\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$ também é sequência de Cauchy.

De fato, seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, então existe δ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon, \tag{4.3.1}$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$. Como $(\mathbf{x}_n)$ é sequência de Cauchy, então existe N_0 tal que se

$$m, n > N_0 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \delta. \tag{4.3.2}$$

Combinando (4.3.1) e (4.3.2), temos então que

$$m, n > N_0 \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_n)\| < \epsilon.$$

Apesar de parecer difícil conferir se uma dada função é ou não uniformemente contínua, o (supreendente?) resultado abaixo garante que *todas* as funções contínuas em conjuntos compactos são uniformemente contínuas.

TEOREMA 4.3.3 (Continuidade Uniforme em compactos). *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ conjunto compacto, e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua em K. Então f é uniformemente contínua em K.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\epsilon > 0$. Entao, para todo $\mathbf{x} \in K$, existe $\delta(\mathbf{x}) > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in B_{\delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \cap K \implies \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon/2. \tag{4.3.3}$$

Seja a cobertura aberta de K gerada por $\{B_{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x})\}_{x \in K}$. Como K é compacto, então existe $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ tal que $\{B_{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}_i)}(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura de K. Seja

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta(\mathbf{x}_1), \dots, \delta(\mathbf{x}_n)\}.$$

Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in K$ tais que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Então existe índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{x} \in B_{\frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}_j)}(\mathbf{x}_j)$, i.e., $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| < \delta(\mathbf{x}_j)/2$. Portanto, usando (4.3.3) temos que $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_j)\| < \epsilon/2$. Da mesma forma,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\| \le \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| < \delta + \frac{1}{2}\delta(\mathbf{x}_j) \le \delta(\mathbf{x}_j),$$

e então $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_j)\| < \epsilon/2$. Concluímos que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \le \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_j)\| + \|f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon,$$

e portanto f é uniformemente contínua. □

Abaixo apresentamos uma demonstração alternativa do Teorema 4.3.3, que não usa argumentos de compacidade.

DEMONSTRAÇÃO. (alternativa do Teorema 4.3.3; *por contradição*) Suponha que f não seja uniformemente contínua. Como K é compacto, então é fechado e limitado. Então, pelo Lema 4.3.2, existe $\epsilon > 0$ e existem sequências $(\mathbf{x}_n)$ e $(\mathbf{y}_n)$ em K tais que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < 1/n$ e $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| > \epsilon$. Como K é fechado, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, existe subsequência $(\mathbf{x}_{n_k})$ convergente. Seja $\mathbf{z} = \lim_{n_k \to \infty}(\mathbf{x}_{n_k})$. Como K é fechado, então $\mathbf{z} \in K$. Note que $(\mathbf{y}_{n_k})$ também converge para $\mathbf{z}$ pois

$$(\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{z}) = (\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}_{n_k}) + (\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{z}).$$

Como f é contínua em $\mathbf{z}$, então $f(\mathbf{z}) = \lim_{n_k \to \infty} f(\mathbf{x}_{n_k})$, e $f(\mathbf{z}) = \lim_{n_k \to \infty} f(\mathbf{y}_{n_k})$, uma contradição com $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| > \epsilon$. Logo f é uniformemente contínua. □

Outra importante situação em que temos continuidade uniforme, mesmo com domínios não compactos, é quando a função é de Lipschitz. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é de Lipschitz se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \le k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$.

TEOREMA 4.3.4. *Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$, e f é de Lipschitz, então f é uniformemente contínua em A.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/k$. Então se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, temos que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq k\delta = \epsilon.$$

o que mostra que f é uniformemente contínua em A. □

Nem toda função uniformemente contínua é de Lipschitz, como o exemplo abaixo mostra.

EXEMPLO 4.13. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$. Como $[0,1]$ é compacto, e g é contínua, então g é uniformemente contínua em $[0,1]$. Entretanto note que se g fosse de Lipschitz, nós teríamos a existência de $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{x} = |g(x) - g(0)| \leq k|x - 0| = kx \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k \quad \text{para todo } x > 0,$$

um absurdo. Logo g não é de Lipschitz apesar de ser uniformemente contínua em seu domínio.

4.4. Exercícios

EXERCÍCIO 4.1. Determine os pontos de continuidade da função $[x]$, que retorna para cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $[2] = 2$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$.

EXERCÍCIO 4.2. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e $f(\mathbf{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança de $\mathbf{x}$ tal que f seja estritamente positiva.

EXERCÍCIO 4.3. Sejam f, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ é aberto em $\mathbb{R}^m$.

EXERCÍCIO 4.4. Dê exemplos de

(1) Um conjunto F fechado em $\mathbb{R}$ e uma função $f : F \to \mathbb{R}$ contínua tais que $f(F)$ não seja compacto.
(2) Um conjunto A aberto em $\mathbb{R}$ e uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(A)$ não seja aberto em $\mathbb{R}$.
(3) Um conjunto $D \subset \mathbb{R}$, um conjunto A aberto em $\mathbb{R}$ e uma função contínua $f : D \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(A)$ não seja aberto em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 4.5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

EXERCÍCIO 4.6. Seja $D \subset \mathbb{R}^m$ conjunto limitado. Dê exemplo de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ contínua e limitada que não atinja seu máximo.

EXERCÍCIO 4.7. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é uniformemente contínua. Dê um exemplo de duas funções uniformemente contínuas tal que o produto não seja uniformemente contínuo. Prove que a função de seu exemplo não é uniformemente contínua.

EXERCÍCIO 4.8. suponha $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0,1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que f seja uniformemente contínua em $[0,1]$.

CAPÍTULO 5

Diferenciação

[1] Neste capítulo vemos a noção de diferenciabilidade e suas aplicações. Começaremos com o caso unidimensional, onde veremos algumas propriedades e aplicações particulares.

5.1. Derivada em uma dimensão

Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é diferenciável em $c \in I$ se existe um número real L onde dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon.$$

Chamamos L de derivada de f em c, e escrevemos $L = f'(c)$.

Note que se f é diferenciável em c, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Se f é diferenciável em todo ponto de I dizemos que f é diferenciável em I. Neste caso note que a derivada f' é uma função de I em $\mathbb{R}$.

Observe que $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in I$ com $f'(c) = L$ se e somente se existir uma função r tal que

$$f(x) = f(c) + L(x - c) + r(x - c), \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

De forma equivalente escrevemos $h = x - c$ e

$$f(c + h) = f(c) + Lh + r(h) \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{5.1.1}$$

Podemos também entender L como a aplicação linear (neste caso dada por um número) que torna (5.1.1) possível. Esta interpretação induz de forma natural a generalização da noção de derivada para o caso multidimensional.

A seguir temos dois exemplos de funções diferenciáveis.

Exemplo 5.1. Se $f(x) = x^2$, então para $c \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x + c)(x - c)}{x - c} = \lim_{x \to c}(x + c) = 2c.$$

[1] Última Atualização: 17/03/2006

Exemplo 5.2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Logo, para $x \neq 0$ temos $f'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x$. Em $x = 0$ usamos a definição:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas f' não é contínua no zero.

Diferenciabilidade implica em continuidade, como nos mostra o resultado a seguir.

Teorema 5.1.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in I$, então f é contínua em c.*

Demonstração. Seja $L = f'(c)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies L - \epsilon < \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| < L + \epsilon.$$

Seja $\bar{\delta} = \min\{\delta, \epsilon/(L + \epsilon)\}$. Então

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \bar{\delta} \implies |f(x) - f(c)| = \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| |x - c| \leq (L + \epsilon)\delta \leq \epsilon.$$

Logo f é contínua em c. □

Observação. Pelo teorema acima, diferenciabilidade implica em continuidade. O inverso entretanto não é verdade em geral. Seja por exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = |x|$. Então f é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é diferenciável em zero pois para $x \neq 0$ temos

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo o limite quando $x \to 0$ não existe.

Sejam f e g funções de $I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$, ambas diferenciáveis em $c \in I$. Então

(1) $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, se $x \neq c$, então

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(c)}{x - c} = \alpha \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

(2) $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

(3) Se $p = fg$, então se $x \neq c$,

$$\begin{aligned} \frac{p(x) - p(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Logo existe $\lim_{x\to c}(p(x)-p(c))/(x-c)$ e

$$p'(c) = \lim_{x\to c}\frac{p(x)-p(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x)\right] + \lim_{x\to c}\left[f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$$
$$= f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(4) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então seja $h(x) = f(x)/g(x)$. Logo se $x \neq c$,

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{x-c} = \frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{(x-c)g(x)g(c)}$$
$$= \frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)}{(x-c)g(x)g(c)} + \frac{f(c)g(c)-f(c)g(x)}{(x-c)g(x)g(c)} = \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)}\frac{1}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)g(c)}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

Logo existe $\lim_{x\to c}(h(x)-h(c))/(x-c)$ e

$$h'(c) = \lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = f'(c)\frac{1}{g'(c)} - \frac{f(c)}{g^2(x)}g'(c).$$

Exemplo 5.3. Pela regra acima temos que se $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então f é diferenciável e $f'(c) = nx^{n-1}$.

Uma primeira e importante aplicação de derivadas diz respeito a pontos extremos locais. Dizemos que uma função$f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tem um *máximo local* em $c \in I$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I \implies f(x) \leq f(c).$$

Definição análoga serve para mínimo local. Chamamos um ponto de máximo ou mínimo local de ponto extremo local.

O resultado a seguir descreve condição necessária para um ponto ser extremo local.

Teorema 5.1.2 (Ponto extremo interior). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, e $c \in I$ ponto extremo local. Se f é diferenciável em c, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assuma c ponto de máximo local. Então, se $f'(c) > 0$ temos

$$0 < f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \implies \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

numa vizinhança de c. Logo, para $x > c$ tem-se $f(x) > f(c)$, contradição pois c é ponto de máximo local. De forma semelhante não podemos ter $f'(c) < 0$. Logo $f'(c) = 0$. ☐

Note que se a derivada de uma função se anula num determinado ponto, não se pode concluir que este seja um ponto extremo. Como exemplo temos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, que tem derivada zero em $x = 0$ mas este não é ponto de máximo nem mínimo local.

A seguir apresentamos um resultado com importantes por si e por suas consequências. É o *Teorema do Valor Médio*, que vemos a seguir na sua versão mais simples, o *Teorema de Rolle*.

Teorema 5.1.3 (Teorema de Rolle). *Seja* $a < b \in \mathbb{R}$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e diferenciável em* $[a,b]$*. Assuma ainda que* $f(a) = f(b) = 0$*. Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Se f é identicamente nula em $[a,b]$, então o resultado é verdadeiro. Caso contrário, então f assume algum valor positivo ou negativo em (a,b). Sem perda de generalidade, suponha que f assuma algum valor positivo. Como $[a,b]$ é compacto, então f atinge seu máximo em algum $c \in (a,b)$. Mas pelo Teorema do Ponto extremo interior 5.1.2, $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar. □

Teorema 5.1.4 (Teorema do Valor Médio). *Seja* $a < b \in \mathbb{R}$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e diferenciável em* $[a,b]$*. Então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demonstração. Seja

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Então $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Como f é diferenciável em $[a,b]$, então ϕ também o é no mesmo intervalo. Logo, pelo Teorem de Rolle 5.1.3 existe $c \in (a,b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Portanto

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

□

Uma primeira aplicação do Teorema do Valor Médio garante que se uma função definida num intervalo tem derivada identicamente igual a zero, então a função é constante.

Lema 5.1.5. Assuma que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja contínua em $[a,b]$, onde $a < b$, e diferenciável em (a,b). Se $f'(x) = 0$ para todo x, então f é constante em $[a,b]$.

Demonstração. Seja $a < x < b$. Pelo Teorema do Valor Médio 5.1.4, existe $c \in (a,x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$. Como $f'(c) = 0$, temos $f(x) = f(a)$. Como x é arbitrário, temos f constante em (a,b). Mas continuidade temos f constante em $[a,b]$. □

Observe que pelo resultado acima, se f, g são funções diferenciáveis que tem a mesma derivada, então f e g diferem por uma constante.

A aplicação seguinte do Teorema do Valor Médio garante condições necessárias e suficientes para uma função ser crescente num intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *crescente* no intervalo I se para $x, y \in I$ com $y > x$ tem-se $f(y) \geq f(x)$. Dizemos ainda que $f : I \to \mathbb{R}$ é *estritamente crescente* em I se para $x, y \in I$ com $y > x$ tem-se $f(y) > f(x)$. Definições análogas valem para funções *decrescentes* e *estritamente decrescentes*.

Lema 5.1.6. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então

(1) f é crescente em I se e somente se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
(2) f é decrescente em I se e somente se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Assuma f crescente. Para $x,\, c \in I$,

$$x < c \text{ ou } x > c \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Portanto

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

($\Leftarrow$) Assuma $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Sejam $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2 \geq 0$. Usando o teorema do valor médio 5.1.4, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. $\square$

Observação. É possível modificar a demonstração acima e mostrar que $f'(x) > 0$ implica em f estritamente crescente. Entretanto, mesmo funções que tem derivada nula em alguns pontos podem ser estritamente crescentes, como por exemplo $f(x) = x^3$.

Observação. Não é verdade que se $f'(c) > 0$ para algum ponto c no domínio da f implique em f crescente numa vizinhança de c. Como exemplo considere

$$g(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é diferenciável em zero com $g'(0) = 1$, mas não é crescente em nenhuma vizinhança do zero.

Outra aplicações do Teorema do Valor Médio seguem nos exemplos abaixo.

Exemplo 5.4. Seja $f(x) = \exp(x)$. Então $f'(x) = \exp(x)$. Queremos mostrar que

$$\exp(x) > 1 + x \text{ para todo } x \neq 0. \tag{5.1.2}$$

Seja $x > 0$. Então aplicando o Teorema do Valor Médio em $[0, x]$ temos que existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\exp(x) - \exp(0) = \exp(c)(x - 0).$$

Como $c > 0$, então $\exp(c) > \exp(0) = 1$. Logo

$$\exp(x) > 1 + x.$$

Para $x < 0$, os argumentos são semelhantes e portanto a desigualdade (5.1.2) vale.

Exemplo 5.5 (Ponto Fixo). Seja I intervalo fechado e $f : I \to I$ diferenciável tal que $|f'(x)| < c$ para todo $x \in I$, onde $c < 1$. Então a sequência definida por x_0 e $x_i = f(x_{i-1})$ para $i \in \mathbb{N}$ converge, e $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ é ponto fixo, i.e, $f(x) = x$. Além disto, este ponto fixo é único.

De fato, note que para todo $i \in \mathbb{N}$ temos

$$|x_{i+1} - x_i| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq f'(\xi)|x_i - x_{i-1}| \leq c|x_i - x_{i-1}|,$$

onde ξ é um ponto entre x_{i-1} e x_i. Como I é intervalo, então $\xi \in I$. Portanto, a sequência (x_i) é contrátil, o que implica em convergência. Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como I é fechado, então $x \in I$. Como f é diferenciável, em I, então é contínua em I e portanto

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Logo x é ponto fixo de f.

Para mostrar unicidade, sejam $x \neq y$ pontos fixos de f. Então

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq c|x - y| < |x - y|,$$

um absurdo. Logo $x = y$.

5.2. Teorema de Taylor e Aplicações

Uma ferramenta poderosa em análise com várias consequências é o Teorema de Taylor, que é na verdade também uma aplicação do Teorema do Valor Médio.

A expansão de Taylor aproxima localmente por um polinômio uma função que pode ser complicada. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ onde $I \subset \mathbb{R}$ tenha $n \geq 0$ derivadas num ponto $x_0 \in I$. Defina

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

onde usamos a notaçãoque $g^{(k)}(c)$ indica a k-ésima deriva de g num ponto c.

Note que com a definição acima, temos $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, \dots, n$. Chamamos P_n de polinômio de Taylor de ordem n para f em x_0, e o resultado abaixo diz o quão boa é a aproximação de uma função por seu polinômio de Taylor.

Teorema 5.2.1 (Taylor). *Seja $n \geq 0$ e $I = [a, b]$, com $a < b$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função n vezes diferenciável em I com $f^{(n)}$ contínua em I e tal $f^{(n+1)}$ exista em (a, b). Se x_0, $x \in I$ então existe $\xi \in (x_0, x) \cup (x, x_0)$ tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Demonstração. Sejam x_0, $x \in I$. Sem perda de generalidade, assuma $x > x_0$. Defina $J = [x_0, x]$ e seja $F : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n)}(t).$$

Logo

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t).$$

Definindo $G : J \to \mathbb{R}$ por

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1} F(x_0),$$

temos $G(x_0) = G(x) = 0$. Pelo Teorema de Rolle (Teorema 5.1.3) existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que

$$0 = G'(\xi) = F'(\xi) + (n + 1)\frac{(x - \xi)^n}{(x - x_0)^{n+1}}F(x_0).$$

Portanto

$$F(x_0) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-\xi)^n}F'(\xi) = \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-\xi)^n}\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$
$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

□

Exemplo 5.6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, com $a < b$. Assuma que f e suas derivadas f', f'',..., $f^{(n+1)}$ existam e sejam contínuas em I. Se $f^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in I$ e $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in I$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in I$. De fato, pelo Teorema de Taylor 5.2.1, dado $x \in I$, existe ξ entre x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$
$$+ f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mas por hipótese, $f^{(i)}(x_0)$ para $i = 0,\dots,n$, e $f^{(n+1)} \equiv 0$ em I. Em particular, como $\xi \in I$, temos $f^{(n+1)}(\xi) = 0$. Portanto, $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Uma aplicação da série de Taylor refere-se à caracterização de extremos locais.

Teorema 5.2.2. *Seja $a < b \in \mathbb{R}$ e $I = [a,b]$. Sejam $x_0 \in (a,b)$ e $k \geq 2$ número inteiro. Supondo que f',...,$f^{(k)}$ existam, que sejam contínuas em I, e que $f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ mas $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, temos que*

1. *Se k é par e $f^{(k)}(x_0) > 0$, então f tem mínimo local em x_0.*
2. *Se k é par e $f^{(k)}(x_0) < 0$, então f tem máximo local em x_0.*
3. *Se k é ímpar, então x_0 não é máximo nem mínimo local.*

Demonstração. Pelo Teorema de Taylor, para $x \in I$ existe ξ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(k-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{(k-1)}}{(k-1)!}$$
$$+ f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$

Assumindo agora que $f^{(k)}(x_0) > 0$, como $f^{(k)}$ é contínua então existe $\delta > 0$ tal que $f^{(k)}(x) > 0$ para todo $x \in U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se $x \in U$, então $\xi \in U$ e então $f^{(\xi)}(x) > 0$. Se n é par, então para $x \neq x_0$ temos

$$f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!} > 0.$$

Logo

$$x \in U\backslash\{x_0\} \implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ é mínimo local},$$

e portanto (1) está demonstrado.

Para demonstrar (2) o argumento é semelhante.

Finalmente, se k é ímpar, então $(x-x_0)/k!$ é positivo para $x > x_0$ e negativo para $x < x_0$. Logo $f(x) > f(x_0)$ ou $f(x) < f(x_0)$ dependendo do sinal de $x - x_0$. Logo a proposição (3) é verdadeira. □

5.3. Definição e Propriedades de funções diferenciáveis

A noção de diferenciabilidade e de derivada em dimensões maiores simplesmente generaliza de forma natural a derivada unidimensional. Seja $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$, e $\mathbf{x}$ ponto interior de A. Dizemos que f é diferenciável em $\mathbf{x}$ se existe uma matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - L\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Chamamos L de derivada de f em $\mathbf{x}$, e que também denotamos por $Df(\mathbf{x})$ ou $f'(\mathbf{x})$. Note que $\mathbf{x}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, e que $f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$, $f(\mathbf{x})$, $f'(\mathbf{x})\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Logo $f'(\mathbf{x})$, que é matriz com m colunas e n linhas, define uma função linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Assumiremos neste texto a convenção que $\mathbf{h}$ é sempre suficientemente pequeno de tal forma que $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in A$.

Assim como em uma dimensão, f é diferenciável em $\mathbf{x}$ se e somente se existir uma função r tal que

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \quad \text{com } \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{5.3.1}$$

Note que pela identidade acima, temos imediatamente que diferenciabilidade implica em continuidade.

A derivada de uma função num determinado ponto, se existe, é única. De fato, se L_1 e L_2 são duas derivadas de f em $\mathbf{x}$, então substituindo $\mathbf{h} = t\boldsymbol{\xi}$, com $\|\boldsymbol{\xi}\| = 1$ em (5.3.1) concluímos que existem funções r_1 e r_2 tais que

$$f(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\xi}) = f(\mathbf{x}) + tL_1\boldsymbol{\xi} + r_1(t\boldsymbol{\xi}), \quad f(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\xi}) = f(\mathbf{x}) + tL_2\boldsymbol{\xi} + r_2(t\boldsymbol{\xi}),$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{\|r_1(t\boldsymbol{\xi})\|}{\|t\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|r_2(t\boldsymbol{\xi})\|}{\|t\|} = 0,$$

Logo concluímos que

$$\|(L_1 - L_2)\xi\| = \frac{\|r_2(t\boldsymbol{\xi}) - r_1(t\boldsymbol{\xi})\|}{t} \le \frac{\|r_2(t\boldsymbol{\xi})\|}{t} + \frac{\|r_1(t\boldsymbol{\xi})\|}{t}.$$

Tomando o limite quando $t \to 0$ em ambos os lados da equação concluímos que $(L_1 - L_2)\xi = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$. Mas isto só é possível se $L_1 = L_2$, como queríamos demonstrar.

Podemos usar o resultado de unicidade acima descrito para encontrar derivadas em casos simples. Como exemplo considere $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Então $f'(\mathbf{x}) = A$, e para mostrar tal fato vemos que

$$r(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = A(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - A\mathbf{x} - A\mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

Pela unicidade da derivada concluímos que $f'(\mathbf{x}) = A$.

Uma interessante forma de analisarmos uma função em várias variáveis é restringindo esta função numa direção e usando propriedades de funções de apenas uma variável. Para tanto, sejam $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\mathbf{u}\| = 1$, e $f : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Dado $\mathbf{x} \in A$, seja $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\boldsymbol{\phi}(t) = f(\mathbf{x}+t\mathbf{u})$. Então, definimos a *derivada direcional de f em $\mathbf{x}$*

na direção $\mathbf{u}$ como $\boldsymbol{\phi}'(0)$, quando esta existir. Note que neste caso, $\boldsymbol{\phi}'(0)$ é um vetor do $\mathbb{R}^n$ (na verdade uma matriz $n \times 1$, que identificamos como um vetor no $\mathbb{R}^n$).

Noutra forma de definir, a derivada direcional é dada pelo vetor $L_\mathbf{u}$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} - L_\mathbf{u} = 0.$$

Escrevemos neste caso $D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = L_\mathbf{u}$.

Para $i \in \{1, \dots, m\}$ seja $\mathbf{e}_i$ onde o vetor com a iésima coordenada valendo um e as demais coordenadas com valor zero, i.e.,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

No caso em que $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, então temos a derivada parcial em relação à iésima coordenada e escrevemos

$$D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

É importante ressaltar que a *existência de derivadas parciais em relação às coordenadas não implica na existência de derivadas direcionais em geral.* Considere o simples exemplo abaixo.

Exemplo 5.7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

mas a derivada direcional na direção(a, b) não existe se $ab \neq 0$, pois não existe o limite quando $t \to 0$ de

$$\frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{b}{a}.$$

A situação muda se assumirmos diferenciabilidade, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 5.3.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto e assuma $f : A \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $\mathbf{x} \in A$. Seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\mathbf{u}\| = 1$. Então existe a derivada direcional $D_\mathbf{u} f(\mathbf{x})$ e esta é dada por*

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{u}.$$

Demonstração. Como f é diferenciável em $\mathbf{x}$, então para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$\|\mathbf{h}\| < \delta \implies \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} < \epsilon$$

para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$. Tomando $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$ temos

$$|t| < \delta \implies \left\| \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} - Df(\mathbf{x})\mathbf{u} \right\| < \epsilon.$$

Portanto a derivada direcional existe e é dada por $Df(\mathbf{x})\mathbf{u}$. □

O teorema acima é importante porque podemos calcular $Df(\mathbf{x})$ tamoando-se derivadas nas direções das coordenadas. De fato, considerando-se $f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})\big)$, temos que

$$D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Usando agora que $Df(\mathbf{x})\mathbf{e}_i = D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x})$, e que $Df(\mathbf{x}) = \big(Df(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 \quad Df(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 \quad \dots \quad Df(\mathbf{x})\mathbf{e}_m\big)$, concluímos que

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

A matriz acima também é chamada de *matriz jacobiana* de f no ponto $\mathbf{x}$.

É importante ressaltar que a existência de derivadas direcionais *não* implica em diferenciabilidade. Para ilustrar tal fato, considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

mas dado o vetor $(a,b)^t \neq (0,0)^t$ com $\|(a,b)^t\|^2 = a^2 + b^2 = 1$, temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{ab^2}{a^2 + b^2} = ab^2,$$

e a derivada direcional é dada por

$$D_{(a,b)^t} f(0,0) = ab^2. \tag{5.3.2}$$

Entretanto, se f fosse diferenciável, teríamos

$$D_{(a,b)^t} f(0,0) = Df(0,0) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)b = 0,$$

uma contradição com (5.3.2). Logo f não é diferenciável em $(0,0)$ apesar de ter todas as derivadas direcionais neste ponto.

Apesar da existência de derivadas direcionais num determinado ponto não garantir a diferenciabilidade neste ponto, a existência e continuidade das derivadas parciais numa *vizinhança* dum ponto garante a diferenciabilidade, como podemos ver no resultado a seguir.

TEOREMA 5.3.2. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Se $\mathbf{x} \in A$ e $\partial f/\partial x_i$ existir e for contínua numa vizinhança de $\mathbf{x}$ para $i = 1, \dots, m$, então f é diferenciável em $\mathbf{x}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\epsilon > 0$, seja δ tal que

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}.$$

Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^t$, sejam

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{z}^{m-1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^m = \mathbf{x}.$$

Temos então que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ implica em $\|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}\| < \delta$, para todo i. Note que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}^0) - f(\mathbf{z}^1) + f(\mathbf{z}^1) - f(\mathbf{z}^2) + \dots + f(\mathbf{z}^{m-1}) - f(\mathbf{z}^m).$$

Pelo Teorema do valor médio (Teorema 5.1.4), existe $\hat{\mathbf{z}}^i$ no segmento determinado por $\mathbf{z}^{i-1}$ e $\mathbf{z}^i$ tal que

$$f(\mathbf{z}^i) - f(\mathbf{z}^{i-1}) = (y_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{z}}^i).$$

Logo,

(5.3.3)
$$\begin{aligned} \left| f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})(y_i - x_i) \right| \le \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{z}}^i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| |y_i - x_i| \le \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |y_i - x_i| \\ \le \epsilon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy–Schwartz para obter a última desigualdade. Portanto de (5.3.3) concluímos que f é diferenciável em $\mathbf{x}$. □

COROLÁRIO 5.3.3. Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Se $\mathbf{x} \in A$ e $\partial f/\partial x_i$ existir e for contínua numa vizinhança de $\mathbf{x}$ para $i = 1, \dots, m$, então f é diferenciável em $\mathbf{x}$.

Outro resultado de grande importância diz respeito à diferenciabilidade de composições de funções, garantindo que se duas funções são diferenciáveis, então a composição também o é.

TEOREMA 5.3.4 (Regra da Cadeia). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^l$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos. Sejam $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $g : B \to \mathbb{R}^n$, onde $f(A) \subset B$. Se f é diferenciável em $\mathbf{x} \in A$ e g é diferenciável em $f(\mathbf{x})$, então $g \circ f$ é diferenciável em $\mathbf{x}$ e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Demonstração. Seja $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Note que para $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in A$ e $\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{y}+\mathbf{k} \in B$, temos

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \quad \text{com } \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$
$$g(\mathbf{y}+\mathbf{k}) = g(\mathbf{y}) + g'(\mathbf{y})\mathbf{k} + p(\mathbf{k}) \quad \text{com } \lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} \frac{\|p(\mathbf{k})\|}{\|\mathbf{k}\|} = 0.$$

Definindo $\mathbf{k} = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$, temos

$$\begin{aligned} g\circ f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) &= g(f(\mathbf{x}+\mathbf{h})) = g(\mathbf{y}+\mathbf{k}) = g(\mathbf{y}) + g'(\mathbf{y})\mathbf{k} + p(\mathbf{k}) \\ &= g(\mathbf{y}) + g'(\mathbf{y})[f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})] + p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{y}) + g'(\mathbf{y})f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + q(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

onde $q(\mathbf{h}) = g'(\mathbf{y})r(\mathbf{h}) + p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))$. Finalmente,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{q(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = g'(\mathbf{y}) \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Se $f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x})$ numa vizinhança de $\mathbf{x}$, então $p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. Caso contrário,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))\|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))\|}{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})\|} \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

De qualquer forma concluímos que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{p(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|q(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

donde obtemos o resultado. □

Exemplo 5.8. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e seja a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inversa de f, isto é,

$$g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \qquad f(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y},$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e g é diferenciável em $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, então $Df(\mathbf{x})$ e $Dg(\mathbf{y})$ são inversas uma da outra, isto é,

$$Df(\mathbf{x})Dg(\mathbf{y}) = Dg(\mathbf{y})Df(\mathbf{x}) = I,$$

onde I é a matriz identidade.

De fato, seja $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Derivando $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, temos $Dh(\mathbf{x}) = I$. Usando a regra da cadeia para $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$, temos $Dh(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{y})Df(\mathbf{x})$. Logo, $Dg(\mathbf{y})Df(\mathbf{x}) = I$. De forma análoga segue-se que $Df(\mathbf{x})Dg(\mathbf{y}) = I$.

Uma aplicação imediata da regra da cadeia é dada no seguinte teorema do valor médio para funções de várias variáveis. Na verdade, esta é uma aplicação imediata do teorema do valor médio unidimensional (Teorema 5.1.4) quando restringimos uma função de várias variáveis num segmento de reta.

TEOREMA 5.3.5. *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$*, diferenciável em* A*, onde* $A \subset \mathbb{R}^m$ *é aberto. Sejam* $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y} \in A$ *e seja* S *o segmento de reta unindo estes pontos. Se* $S \subset A$*, então existe* $\boldsymbol{\xi} \in S$ *tal que*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = Df(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Este resultado segue-se de uma aplicação do teorema do valor médio unidimensional (Teorema 5.1.4) para a função $\phi : [0,1] \to A$ dada por $\phi(t) = f\big(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)$. Note ainda que pela regra da cadeia temos que

$$\phi'(t) = Df\big(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

□

É interessante notar que não vale uma "generalização trivial" para o teorema do valor médio quando a imagem de uma função está no $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$. Como exemplo, considere a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = (\sin t, \cos t)$. Tomando-se os pontos $t = 0$ e $t = 2\pi$, vemos que não existe $\xi \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\phi(0) - \phi(2\pi) = \phi'(\xi)(2\pi - 0) = 2\pi\phi'(\xi).$$

pois $\phi(0) - \phi(2\pi) = \mathbf{0}$ e $\phi'(\xi) \neq \mathbf{0}$ para todo ξ.

Encontramos na demonstração do resultado abaixo uma outra aplicação da regra da cadeia, desta vez para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

TEOREMA 5.3.6 (Derivada da Função Inversa). *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo,* $f : I \to \mathbb{R}$ *contínua e invertível com inversa* $g : J \to \mathbb{R}$ *contínua, e* $J = f(I)$*. Se* f *é diferenciável em* $c \in I$*, então* g *é diferenciável em* $d = f(c)$ *se e somente se* $f'(c) \neq 0$*. Neste caso,*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $y \in J \backslash \{d\}$, então $g(y) \neq c$. Logo, se $f'(c) \neq 0$,

$$\lim_{y \to d} \frac{g(y) - g(d)}{y - d} = \lim_{y \to d} \frac{g(y) - c}{f(g(y)) - f(c)} = \lim_{y \to d} \left(\frac{f(g(y)) - f(c)}{g(y) - c} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(c)},$$

onde usamos a continuidade de g no último passo. Concluímos que g é diferenciável em d e $g'(d) = 1/f'(c)$.

Analogamente, se g é diferenciável em d, então usando a regra da cadeia e que $g(f(x)) = x$, temos

$$g'(f(c))f'(c) = 1,$$

e então $f'(c) \neq 0$. □

EXEMPLO 5.9. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então f tem inversa $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, e $g(y) = \sqrt[n]{y}$. Para $y > 0$ temos então

$$g'(y) = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Note que g não é diferenciável no zero pois $f'(0) = 0$.

5.4. Matriz Hessiana, Fórmula de Taylor e pontos críticos

Note que a derivada de uma função de uma função de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ num determinado ponto $\mathbf{x}$ foi definida como uma aplicação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$ com certa capacidade de aproximar a função f no ponto $\mathbf{x}$. No caso, para $\mathbf{x}$ fixo, teríamos $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})y_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x})y_m,$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

De forma análoga, definimos a segunda derivada de f num ponto $\mathbf{x}$ fixado como sendo a função bilinear $D^2f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que

$$D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} y_i z_j, \qquad \text{onde } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

e $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$. Uma forma mais compacta de escrever a definição acima é usando-se a *matriz hessiana* H dada por $H_{ij}(\mathbf{x}) = \partial^2 f(\mathbf{x})/\partial x_i \partial x_j$. Logo

$$D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{y}^t H(\mathbf{x})\mathbf{z}.$$

Um interessante resultado garante que se f for suficientemente suave num determinado ponto $\mathbf{x}_0$ (é suficiente que a segunda derivada exista numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$ e seja contínua em $\mathbf{x}_0$) teremos que *não importa a ordem em que se toma as derivadas*, i.e., $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$, e portanto a matriz hessiana é simétrica.

Definições para derivadas de ordem mais alta seguem o mesmo formato, sendo estas *aplicações multilineares*. Entretanto para os nossos propósitos, a matriz hessiana basta.

Apresentamos no teorema a seguir a fórmula de taylor, e nos restringimos ao caso particular de polinômios quadráticos. Este teorema será de fundamental importância para caracterizarmos pontos extremos.

TEOREMA 5.4.1 (Taylor). *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, sendo A aberto, duas vezes diferenciável em A, com derivadas contínuas. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$ tais que o segmento S que une estes dois pontos esteja contido em A. Então existe $\boldsymbol{\xi} \in S$ tal que*

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^t H(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

onde $H(\mathbf{x})$ é a matriz hessiana de f.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = f\big(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)$. Aplicando o Teorema de taylor em uma dimensão (Teorema 5.2.1), obtemos que existe $\hat{t} \in (0,1)$ tal que

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\hat{t}).$$

Usando a definição de ϕ obtemos o resultado diretamente. $\square$

Assim como em uma dimensão, usaremos o Teorema de Taylor para estudarmos pontos extremos de uma função. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$, tem um *máximo local* em $\mathbf{x} \in A$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap A \implies f(\mathbf{y}) \le f(\mathbf{x}). \tag{5.4.1}$$

Dizemos que $\mathbf{x}$ é *máximo estrito local* se valer a desigualdade estrita em (5.4.1). Definição análoga serve para *mínimo local* e *mínimo estrito local*. Chamamos um ponto de máximo ou mínimo local de *ponto extremo local*, e um ponto de máximo ou mínimo estrito local de *ponto extremo estrito local*.

O teorema que obtemos a seguir, relativo a pontos extremos interiores, é análogo ao caso unidimensional, ver o Teorema 5.1.2, e diz primeiro que pontos extermos interiores são pontos críticos, i.e., pontos em que a derivada se anula. O resultado mostra também que se um ponto é de mínimo local, então a hessiana é *semi-definida positiva*, i.e, $\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h} \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$. De forma análoga se um ponto é de máximo local, então a hessiana é *semi-definida negativa*, i.e, $\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h} \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$.

TEOREMA 5.4.2 (Ponto extremo interior). *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, e $\mathbf{x} \in A$ ponto extremo local. Se f é diferenciável em $\mathbf{x}$, então $Df(\mathbf{x}) = 0$. Se além disto, f for duas vezes diferenciável, com derivadas segundas contínuas, então temos que*

(1) *se $\mathbf{x}$ for ponto de mínimo local, então $\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h} \geq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$,*
(2) *se $\mathbf{x}$ for ponto de máximo local, então $\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h} \leq 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$,*

onde $H(\mathbf{x})$ é a matriz hessiana no ponto $(\mathbf{x})$.

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar que $\mathbf{x}$ é ponto crítico, basta usar o Teorema 5.3.1 e mostrar que as derivadas parciais se anulam. Dada então o vetor $\mathbf{e}_i$ temos que a função $\phi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i)$ tem ponto extremo local em $t = 0$. Usando o Teorema 5.1.2 vemos que $\phi'(0) = 0$ e concluímos que $\mathbf{x}$ é ponto crítico.

Suponha agora que f seja duas vezes diferenciável com derivadas segundas contínuas, e que $\mathbf{x}$ seja ponto de mínimo local. Então $\mathbf{x}$ é ponto crítico, como acabamos de mostrar, e pelo Teorema de taylor em várias dimensões (Teorema 5.4.1), temos que

$$f(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = \frac{s^2}{2}\mathbf{u}^t H(\boldsymbol{\xi}_s)\mathbf{u},$$

para todo s suficientemente pequeno e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\mathbf{u}\| = 1$, e onde $\boldsymbol{\xi}_s$ é ponto do segmento unindo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + s\mathbf{u}$. Quando $s \to 0$, temos que $\boldsymbol{\xi}_s \to \mathbf{x}$, e usando a continuidade de H concluímos que $H(\boldsymbol{\xi}_s) \to H(\mathbf{x})$. Como $\mathbf{x}$ é mínimo local, então $f(\mathbf{x} + s\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo s suficientemente pequeno. Portanto $\mathbf{u}^t H(\boldsymbol{\xi}_s)\mathbf{u} \geq 0$, como queríamos demonstrar. □

Os resultados acima nos dão condições necessárias para um ponto interior ser extremo local, porém estas não são suficientes (vide exemplo $f(x) = x^3$). Dizemos que um ponto é *de sela* quando a derivada se anula mas este não é extremo local. Um caso interessante é quando a função é localmente crescente na direção de uma coordenada e decrescente na direção de outra. Por exemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$, ver Figura 1.

O resultado a seguir dá algumas condições suficientes um ponto ser de máximo, mínimo ou de sela. Mais precisamente, temos que se um ponto crítico $\mathbf{x}$ de uma função suave tem a hessiana $H(\mathbf{x})$ *positiva definida*, i.e, $\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h} > 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, então ele é mínimo estrito local. De forma análoga, se $H(\mathbf{x})$ é *negativa definida*, i.e, $\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h} < 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, então ele é mínimo estrito local. O último caso é quando a Hessiana é *indefinida* i.e, existem $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\xi}$ em $\mathbb{R}^m$ tais que $(\mathbf{h}^t H(\mathbf{x})\mathbf{h})(\boldsymbol{\xi}^t H(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}) < 0$. Aí então $\mathbf{x}$ é ponto de sela.

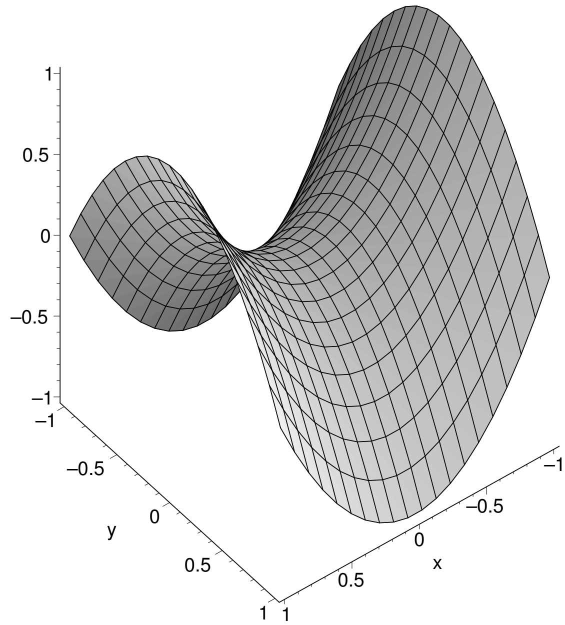

FIG. 1. Gráfico de $x^2 - y^2$, que tem ponto de sela em $(0,0)$.

TEOREMA 5.4.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas, e $\mathbf{x} \in A$ ponto crítico. Temos então que*

(1) *se $H(\mathbf{x})$ for positiva definida então $\mathbf{x}$ é mínimo estrito local,*
(2) *se $H(\mathbf{x})$ for negativa definida então $\mathbf{x}$ é mínimo estrito local,*
(3) *se $H(\mathbf{x})$ for indefinida então $\mathbf{x}$ é ponto de sela.*

DEMONSTRAÇÃO. Mostraremos apenas o caso em que $H(\mathbf{x})$ é positiva definida. neste caso, devido à continuidade das segundas derivadas, $H(\cdot)$ é positiva definida numa vizinhança de $\mathbf{x}$. Para $\mathbf{y} \in A\backslash\{\mathbf{x}\}$ satisfazendo as condições do Teorema 5.4.1, e suficientemente próximo de $\mathbf{x}$, temos que existe $\boldsymbol{\xi}$ pertencente ao segmento de reta entre $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$ e tal que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^t H(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{y}-\mathbf{x}). \tag{5.4.2}$$

Portanto $\mathbf{x}$ é mínimo estrito local pois a espressão do lado direito de (5.4.2) é estritamente positiva. $\square$

Note que apesar do teorema anterior dar condições suficientes para determinar se um ponto crítico é ou não extremo local, ainda é preciso descobrir se a hessiana é positiva ou negativa definida ou indeterminada. Esta dificuldade é contornável, pois existem vários resultados de álgebra linear que dizem, por exemplo, quando uma matriz é ou não positiva definida. Por exemplo, uma matriz simétrica é positiva definida se e somente se seus autovalores são positivos. A referência [**3**] apresenta este e vários outros resultados relacionados ao tema.

Uma segunda aplicação do Teorema 5.4.1 diz respeito à funções convexas definidas em convexos. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}^m$ é convexo se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$ implica em $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in A$ para

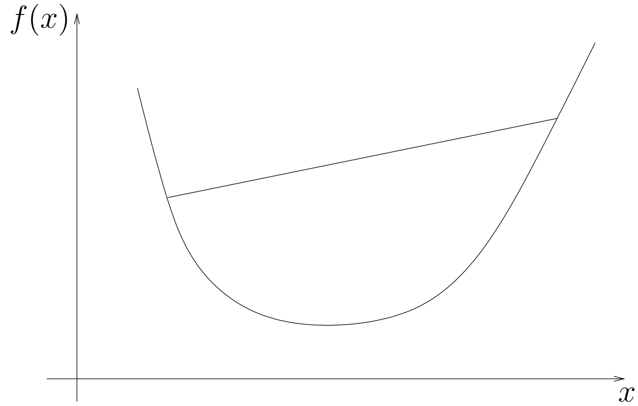

FIG. 2. Gráfico de $x^2 - y^2$, que tem ponto de sela em $(0,0)$.

todo $t \in [0,1]$. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é convexa em A se

$$f\big((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big) \le (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}).$$

para todo $t \in [0,1]$. Graficamente, uma função é convexa se o gráfico de f entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ está abaixo da reta que une os pontos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ e $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$, como ilustra a Figura 2.

Existem inúmeros resultados relacionados a convexidade. Em particular, um mínimo local é também global, e se o mínimo local é estrito, segue-se a unicidade de mínimo global [**7**].

TEOREMA 5.4.4. *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ conjunto aberto e convexo e $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) *f é convexa*
(2) *A matriz hessiana $H(\mathbf{x})$ é semi-definida positiva para todo $\mathbf{x} \in A$.*

DEMONSTRAÇÃO. ($\Leftarrow$) Assuma que $H(\mathbf{x})$ seja semi-definida positiva em A. Seja S o segmento de reta unindo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in A$, e seja $0 < t < 1$. Definindo $\mathbf{x}_0 = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, pelo Teorema de Taylor existe $\boldsymbol{\xi}_1 \in S$ entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_0$, e $\boldsymbol{\xi}_2 \in S$ entre $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}$ tais que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t H(\boldsymbol{\xi}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)^t H(\boldsymbol{\xi}_2)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).$$

Como $H(\boldsymbol{\xi}_1)$ e $H(\boldsymbol{\xi}_2)$ são ambas semi-definidas positivas, então

$$\begin{aligned}
&(1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}) \\
&= f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)[(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} - \mathbf{x}_0] + \frac{(1-t)}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t H(\boldsymbol{\xi}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{t}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)^t H(\boldsymbol{\xi}_2)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \\
&\qquad = f(\mathbf{x}_0) + \frac{(1-t)}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t H(\boldsymbol{\xi}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{t}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)^t H(\boldsymbol{\xi}_2)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \ge f(\mathbf{x}_0).
\end{aligned}$$

Logo f é convexa.

($\Rightarrow$) Se f é convexa,

$$f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \le (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y})$$

e para $t \in (0,1]$ temos que

$$\frac{f((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})-f(\mathbf{x})}{t} \le f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}).$$

Tomando o limite $t \to 0$ obtemos $Df(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \le f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})$. Usando agora a fórmula de Taylor obtemos que existe $\boldsymbol{\xi}$ no segmento unindo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tal que

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^t H(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})-Df(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \ge 0,$$

Tomando $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$ e usando a continuidade de H concluímos a demonstração. $\square$

Observação. Note que no processo de demonstração do Teorema 5.4.4, mostramos também que uma função f ser convexa é equivalente a $Df(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \le f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

5.5. Exercícios

Exercício 5.1. Assuma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $c \in \mathbb{R}$ e $f(c) = 0$. Mostre então que $g(x) = |f(x)|$ é diferenciável em c se e somente se $f'(c) = 0$.

Exercício 5.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1,\dots,n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de f. Mostre que é único.

Exercício 5.3. Dê exemplo de uma função uniformemente contínua em $[0,1]$ que seja diferenciável em $(0,1)$ mas cuja derivada não seja limitada em $(0,1)$. Mostre porque o seu exemplo funciona.

Exercício 5.4. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se f' é positiva em I, i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.

Exercício 5.5. Mostre que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável com derivada limitada em I, então f é de Lipschitz.

Exercício 5.6. Seja $B \subset \mathbb{R}^m$ limitado, e $f : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que f é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.

Exercício 5.7. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, então $f+g$ é uniformemente contínua. Mostre que, mesmo que f seja limitada, a função fg não é necessariamente uniformemente contínua.

Exercício 5.8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{para } (x,y) \ne (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que a derivada direcional de f em $(0,0)$ com respeito a $\mathbf{u} = (a,b)$ existe e que

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \frac{b^2}{a}, \qquad \text{se } a \neq 0.$$

Mostre que f não é contínua e portanto não é diferenciável no $(0,0)$.

Exercício 5.9. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança de $x \in I$. Mostre então que existe uma constante c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para h suficientemente pequeno. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 5.10. Mostre que dados quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$ fixados, o resto da série de Taylor da função $\cos x$ centrada em x e calculada em y converge para zero quando $n \to +\infty$.

Exercício 5.11. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ função diferenciável no interior de B tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B. Mostre que f tem ponto crítico no interior de B.

Exercício 5.12 (Mínimos Quadrados). Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^n x_i^4 + b\sum_{i=1}^n x_i^3 + c\sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^n x_i^3 + b\sum_{i=1}^n x_i^2 + c\sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i + cn &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Exercício 5.13. Mostre, usando o Teorema 5.4.3, que $(0,0)$ é ponto de sela de $f(x,y) = x^2 - y^2$, e ponto de mínimo estrito local de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 5.14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Calcule $f'(0)$.

Exercício 5.15. Seja $f : (-1,1)$ tal que f', f'' f''' existam e sejam contínuas em $(-1,1)$. Assuma $f'(0) = f''(0) = 0$, mas $f'''(0) \neq 0$. Mostre que f não é mínimo local.

Exercício 5.16. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciável e tal que $\|\mathbf{f}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre então que $\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$.

CAPÍTULO 6

Sequência de Funções

[1] Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f_i : A \to \mathbb{R}^n$, onde $i \in \mathbb{N}$. Dizemos então que (f_i) define uma sequência de funções. Note que cada $\mathbf{x} \in A$ define a sequência $(f_i(\mathbf{x}))$ em $\mathbb{R}^n$.

6.1. Convergência Pontual

DEFINIÇÃO 6.1.1. *Seja (f_i) uma sequência de funções, onde $f_i : A \to \mathbb{R}^n$, e $A \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que (f_i) converge pontualmente para uma função $f : A_0 \to \mathbb{R}^n$ em $A_0 \subset A$ se para todo $\mathbf{x} \in A_0$, a sequência $(f_i(\mathbf{x}))$ converge para $f(\mathbf{x})$.*

EXEMPLO 6.1. Sejam $f_i(x) = x/i$ e $f(x) = 0$. Então f_i converge pontualmente para f em $\mathbb{R}$, pois para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = \lim_{i\to\infty} x/i = 0$.

EXEMPLO 6.2. Sejam $g_i(x) = x^i$. Então

(1) Se $x \in (-1, 1)$, então $\lim_{i\to\infty} g_i(x) = \lim_{i\to\infty} x^i = 0$.
(2) Se $x = 1$, então $\lim_{i\to\infty} g_i(x) = \lim_{i\to\infty} 1 = 1$.
(3) Se $x = -1$, então $g_i(x) = (-1)^n = 1$ não converge.
(4) Se $|x| > 1$, então $g_i(x)$ não é limitada e portanto não converge.

Logo (g_i) converge pontualmente para g em $(-1, 1]$, onde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Note que

$$0 = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \lim_{i\to+\infty} g_i(x) \neq \lim_{i\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} g_i(x) = 1.$$

Note que a definição de convergência pontual pode ser escrita da seguinte forma.

DEFINIÇÃO 6.1.2. *Uma sequência de funções (f_i) onde $f_i : A \to \mathbb{R}^n$, e $A \subset \mathbb{R}^m$ converge pontualmente para uma função $f : A_0 \to \mathbb{R}^n$ em $A_0 \subset A$ se para dado $\epsilon > 0$ e $\mathbf{x} \in A_0$, existe $N_0(\mathbf{x}, \epsilon)$ tal que*

$$n > N_0(\mathbf{x}, \epsilon) \implies |f_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \epsilon.$$

O que fica claro na definição acima é que a "escolha de N_0" *depende* do ponto $\mathbf{x}$ em consideração. Considere o exemplo 6.1, e seja $\epsilon = 1/10$. Então, para $x = 1$ e $N_0(x, \epsilon) = 10$, temos

$$n > N_0(x, \epsilon) = 10 \implies |f_i(x) - f(x)| = |1/n| < \epsilon.$$

Mas para $x = 2$, a escolha anterior de $N_0 = 10$ já não é suficiente e temos que escolher $N_0(x, \epsilon) \geq 20$.

[1] Última Atualização: 17/03/2006

6.2. Convergência Uniforme

Definição 6.2.1. *Dados $A \subset \mathbb{R}^m$ e $i \in \mathbb{N}$, seja $f_i : A \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que a sequência de funções (f_i), converge uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}^n$, se dado $\epsilon > 0$ existe $N_0(\epsilon)$ tal que*

$$n > N_0 \implies \|f_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon \text{ para todo } \mathbf{x} \in A.$$

Observe que convergencia uniforme implica em convergencia pontual, mas que a afirmação recíproca não vale. Uma forma prática de se mostrar que uma sequência de funções não converge uniformemente é utilizando o resultado abaixo.

Teorema 6.2.2. *Seja $f_i : A \to \mathbb{R}^n$ onde $A \subset \mathbb{R}^m$ e $i \in \mathbb{N}$. Então a sequência de funções (f_i) não converge uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}^n$ se e somente se para algum $\epsilon > 0$ existir uma subsequência (f_{n_k}) e uma sequência de pontos $(\mathbf{x}_k)$ em A tais que*

$$\|f_{n_k}(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k)\| \geq \epsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 6.3. Sejam $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f_i(x) = x/i$ e $f(x) = 0$. Tome $\epsilon = 1/2$, $n_k = k$ e $x_k = k$. Então

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = 1 > \epsilon.$$

Logo não há convergencia uniforme.

Uma forma de "medir" convergência uniforme é através da norma do supremo, que para cada função limitada associa o valor máximo que o módulo desta assume. Formalmente temos a seguinte definição.

Definição 6.2.3. *Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$, função limitada. Definimos a* norma do supremo *então por*

$$\|f\|_{\sup,A} = \sup\{\|f(\mathbf{x})\| : \mathbf{x} \in A\}.$$

Portanto, uma sequência de funções limitadas (f_i), onde $A \subset \mathbb{R}^m$, converge para $f : A \to \mathbb{R}^n$, se e somente se $\lim_{i\to\infty} \|f_i - f\|_{\sup,A} = 0$.

Exemplo 6.4. Se $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ é tal que $g_i(x) = x^i$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1), \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

então

$$\|g_i - g\|_{\sup,[0,1]} = \sup\big(\{x^i : x \in [0,1)\} \cup \{0\}\big) = 1$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo g_i não converge uniformemente para g.

Exemplo 6.5. Se $f_i(x) = x/i$ e $f(x) = 0$ então

$$\|f_i - f\|_{\sup,[0,1]} = \sup\{x/i : x \in [0,1]\} = 1/i.$$

Logo f_i converge uniformemente para a função identicamente nula.

Exemplo 6.6. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ e defina $f_i(x) = f(x + 1/i)$. Então f_i converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$. De fato, seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Seja então $N^* \in \mathbb{N}$ tal que $N^* > 1/\delta$. Logo

$$i > N^* \implies |f_i(x) - f(x)| = |f(x + 1/i) - f(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f_i converge uniformemente para f.

Teorema 6.2.4 (Critério de Cauchy para convergência uniforme). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f_i : A \to \mathbb{R}^n$ funções limitadas. Então (f_i) converge uniformemente para uma função $f : A \to \mathbb{R}$ se e somente se dado $\epsilon > 0$, existe N_0 tal que*

$$i, j > N_0 \implies \|f_i - f_j\|_{\sup,A} < \epsilon.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Basta usar que

$$\|f_j(x) - f_i(x)\| \le \|f_j(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_i(x)\|$$

para todo $\mathbf{x} \in A$.

($\Leftarrow$) Assuma que dado $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que

$$i, j > N_0 \implies \|f_i - f_j\|_{\sup,A} < \epsilon.$$

Logo,

$$m, n > N_0 \implies \|f_m(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\| < \epsilon,$$

para todo $\mathbf{x} \in A$. Mas então $(f_i(\mathbf{x}))$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e podemos definir $f(\mathbf{x}) = \lim_{i\to+\infty} f_i(\mathbf{x})$. Falta agora mostrar que $\lim_{i\to+\infty} \|f_i - f\|_{\sup,A} = 0$. Dado $\epsilon > 0$, seja $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, j > K \implies \|f_i - f_j\|_{\sup,A} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado $\mathbf{x} \in A$ e seja $\bar{K} \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \ge \bar{K} \implies |f_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Note que K depende somente de ϵ e $\bar{K}$ depende também de x. Então, seja $i \ge K$, e para cada $\mathbf{x} \in A$, seja $j = \sup\{K, \bar{K}\}$. Logo

$$\|f(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\| \le \|f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})\| + \|f_j(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})\| < \epsilon,$$

e (f_i) converge uniformemente para f. $\square$

Finalmente concluímos esta seção mostrando que limite uniforme de funções contínuas é também uma função contínua. Lembre-se que esta propriedade não vale em geral se a convergência é só pontual.

Teorema 6.2.5 (Troca de Limites e Continuidade). *Seja (f_i) sequência de funções $f_i : A \to \mathbb{R}^n$ contínuas em $A \subset \mathbb{R}^m$ convergindo uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}^n$. Então f é contínua em A.*

Demonstração. Seja $\mathbf{x}_0 \in A$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x})\| < \epsilon/3$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Como f_{N_0} é contínua em A, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f_{N_0}(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x}_0)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo se $\mathbf{x} \in A$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, então

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| \le \|f(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x})\| + \|f_{N_0}(\mathbf{x}) - f_{N_0}(\mathbf{x}_0)\| + \|f_{N_0}(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon.$$

Logo f é contínua. □

6.3. Equicontinuidade

Nesta seção discutiremos os conceitos de equicontinuidade e enunciaremos o Teorema de Arzelá–Ascoli. Não apresentaremos demonstrações, que podem (devem) ser conferidas em [**4**], por exemplo.

Seja F conjunto de funções $f : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$. Chamamos o conjunto F de *equicontínuo em* $\mathbf{x}_0 \in A$, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon \text{ para todo } \mathbf{x} \in A \text{ e } f \in F.$$

Se F for equicontínuo em todos os pontos de A, dizemos simplesmente que F é *equicontínuo*.

O conceito de equicontinuidade num ponto pode ser generalizado de forma a que a escolha de δ não dependa mais do ponto em consideração i.e., seja uniforme. Dizemos então que F é *uniformemente equicontínuo*, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in A, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon \text{ para todo } \mathbf{x},\, \mathbf{x}_0 \in A \text{ e } f \in F.$$

De forma semelhante, chamamos F de *simplesmente limitado* se para cada $\mathbf{x} \in A$ existe c tal que $\|f(\mathbf{x})\| < c$ para todo $f \in F$. Finalmente, dizemos que F é *uniformemente limitado* se existe c tal que $\|f(\mathbf{x})\| < c$ para cada $\mathbf{x} \in A$ e para todo $f \in F$.

O resultado abaixo informa que se A for compacto, então equicontinuidade e equicontinuidade uniforme são equivalentes. O mesmo acontece com limitação simples e uniforme.

Lema 6.3.1. Seja F conjunto de funções $f : K \to \mathbb{R}$, onde $K \subset \mathbb{R}$ é compacto. Então F é equicontínuo se e somente se é uniformemente equicontínuo. Além disto, F é simplesmente limitado se e somente se for uniformemente limitado.

Temos então o Teorema de Arzelá–Ascoli, que de alguma forma generaliza o Teorema de Bolzano–Weierstrass para sequências de funções.

Teorema 6.3.2 (Teorema de Arzelá–Ascoli). *Seja F conjunto de funções definidas em K e assumindo valores em $\mathbb{R}$, onde $K \subset \mathbb{R}$ é compacto. Então F é equicontínuo e simplesmente limitado se e somente se toda sequência de funções têm subsequência que converge uniformemente.*

Como aplicação mostramos alguns detalhes do belo exemplo apresentado em [**4**].

Exemplo 6.7. Seja F o conjunto das funções $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, contínuas e tais que $f(-1) = f(1) = 1$. Considere $A(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$. É possível mostrar que não existe $\bar{f} \in F$ tal que $A(\bar{f}) = \min_{f \in F} A(f)$. Considere agora

$$F_c = \{f \in F : f \text{ é de Lipschitz com constante } c\}.$$

Então F_c é simplesmente limitado e equicontínuo. Seja então $\mu_c = \inf\{A(f) : f \in F_c\}$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_i \in F_c$ tal que

$$\mu_c \leq A(f_i) \leq \mu_c + \frac{1}{i}.$$

Pelo Teorema de Arzelá–Ascoli, (f_i) possui subsequência (f_{i_k}) uniformemente convergente para algum $\bar{f}_c$. Pode-se mostrar que $\bar{f}_c \in F_c$, e que $A(\bar{f}_c) = \min_{f \in F_c} A(f)$. Portanto o problema de minimizar $A(\cdot)$ em F_c tem solução.

6.4. Exercícios

Exercício 6.1. Seja a sequência de funções (f_i), onde $f_i(x) = \sin(nx)/(1+nx)$. Mostre que (f_i) converge pontualmente para todo $x \in \mathbb{R}^+$, uniformemente em $[a, +\infty)$ para $a > 0$, mas não converge uniformemente em $[0, +\infty)$.

Exercício 6.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f_i : A \to \mathbb{R}$ sejam funções uniformemente contínuas. Mostre que (f_i) converge uniformemente para f, então f é uniformemente contínua.

Exercício 6.3. Ache exemplo de sequência (f_i) de funções que converge uniformemente em $(0, 1]$, mas não em $[0, 1]$.

Bibliography

[1] R. G. Bartle, *The elements of real analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, New York, 1976.
[2] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, Second edition, Wiley, New York, 1992.
[3] R.A. Horn and C.R.Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
[4] E. L. Lima, *Curso de análise. Vol. 1*, Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro, 1976.
[5] E. L. Lima, *Curso de análise. Vol. 2*, Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro, 1981.
[6] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro, 1977.
[7] D. G. Luenberger, *Introduction to linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley, Reading,MA, 1973.
[8] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third edition, McGraw-Hill, New York, 1976.