1^a Lista de Exercícios do curso GA-038 Processamento Digital de Sinais

Prof. Paulo Antonio A. Esquef

15 de Outubro de 2012

Aluno: Daniel Abrunhosa Fernandes

Data de devolução: 16 de Outubro de 2012, 9h

Exercício 1 *Classifique cada sinal descrito abaixo, classifique-o quanto a dimensão e quanto à natureza (contínua ou discreta) de seu domínio e sua imagem.*

a) A tensão (voltagem) entre os terminais de uma pilha ao longo do tempo.

b) O valor da taxa (% ao ano) de juros SELIC fixada pelo COPOM, em função da data de fixação, em 2011 (http://www.bcb.gov.br/?copomjuros).

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x) = \frac{1-2x^{-1}}{1-\frac{1}{2}x^{-1}}, \left\{x \, \epsilon \, \mathbb{C}, |x| > \frac{1}{2}\right\}$

d) Distribuição percentual de investimentos para a composição de uma carteira de ações, por setor econômico, conforme ilustrado na Figura 1.

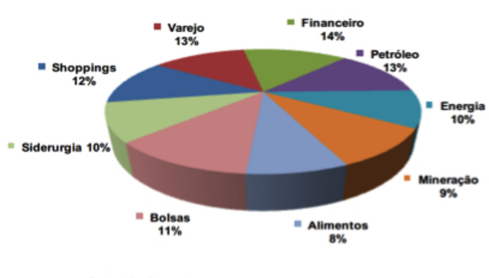

Figura 1: Composição setorial de uma carteira de investimentos em ações.

<u>Solução do Exercício 1:</u>

De acordo com a definição de sinal, este é uma função, cujo domínio e contradomínio (ou imagem) podem ser um subconjunto dos números inteiros, reais, etc. Este pode ser classificado quanto ao número de variáveis independentes que dará sua dimensão e a natureza de ambos domínio e contradomínio (ou imagem).

a) Pensando um pouco no nosso sinal de tensão, chegamos a conclusão que este é da forma: $s_1(t) = V * t$, sendo t,V $\epsilon\, \mathbb{R}$. Onde "V" é o valor da voltagem entre os terminais e "t" é o tempo. Dessa forma o sinal $s_1(t)$ terá a forma presente na Figura 2.

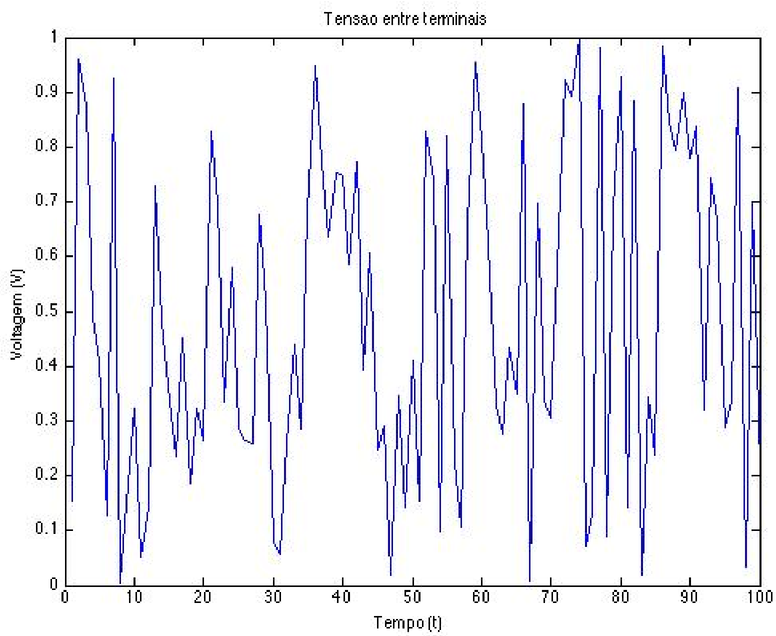

Figura 2: Um exemplo do gráfico que representa a tensão da pilha.

- **Dimensão**: **Unidimensional**. O sinal exposto é função apenas de uma variável, o tempo. Sendo mostrado na Figura 2 a variação da voltagem ao longo do tempo.
- **Natureza do Domínio**: **Contínuo**. O sinal mostrado é uma evolução contínua da variação da tensão entre os terminais da pilha desta forma, temos que: $t \epsilon\, \mathbb{R}$. Uma outra forma de mostra que o nosso domínio é contínuo é através da observação que este é um subconjunto não enumerável do reais.

- **Natureza da Imagem**: **Analógica**. Observando a Figura 2, podemos verificar que o nosso sinal $s_1(t) \epsilon \mathbb{R}$, desta forma a nossa imagem é um subconjunto não enumerável dos reais, mostrando que a natureza da imagem é contínua ou analógica.

b) De acordo com a tabela mencionada (Figura 3) podemos observar que o valor da taxa selic é fixado pelo COPOM e utilizado durante todo um mês, só mudando no mês seguinte. Dessa forma temos 12 valores para esta taxa em cada ano, sendo considerado para este sinal apenas o ano de 2011. Dessa forma o sinal possuí a forma: $s_2(m) = T * m$, sendo T $\epsilon \mathbb{R}$ e m $\epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Onde "T" é o valor da taxa selic e "m" é o mês de fixação desta taxa.

Reunião			Período de vigência	Meta SELIC	TBAN	Taxa SELIC	
nº	data	viés		% a.a. (1)(6)	% a.m. (2)(6)	% (3)	% a.a. (4)
163ª	30/11/2011		01/12/2011 - 18/01/2012	11,00		1,45	10,90
162ª	19/10/2011		20/10/2011 - 30/11/2011	11,50		1,21	11,40
161ª	31/08/2011		01/09/2011 - 19/10/2011	12,00		1,48	11,90
160ª	20/07/2011		21/07/2011 - 31/08/2011	12,50		1,40	12,42
159ª	08/06/2011		09/06/2011 - 20/07/2011	12,25		1,33	12,17
158ª	20/04/2011		21/04/2011 - 08/06/2011	12,00		1,49	11,92
157ª	02/03/2011		03/03/2011 - 20/04/2011	11,75		1,46	11,67
156ª	19/01/2011		20/01/2011 - 02/03/2011	11,25		1,27	11,17
155ª	08/12/2010		09/12/2010 - 19/01/2011	10,75		1,21	10,66

Figura 3: Tabela descrevendo a mudança da taxa selic em cada um dos meses de 2011 (Informações retiradas do site http://www.bcb.gov.br/?copomjuros).

- **Dimensão**: **Unidimensional**. O sinal exposto é função apenas de uma variável, o mês da mudança do valor da taxa. Sendo mostrado na Figura 3 a mudança no valor desta taxa referente a cada mês do ano de 2011.
- **Natureza do Domínio**: **Discreto**. O sinal mostrado é uma evolução da taxa selic ao longo do ano de 2011, porém esta taxa é fixada a cada mês pelo COPOM logo temos que: $m \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, o que mostra que o nosso domínio é um subconjunto enumerável de elementos, tornando-o discreto.
- **Natureza da Imagem**: **Digital**. Utilizando a simples definição do nosso sinal, podemos observar que a taxa selic não possui variações ao longo do ano,

esta é fixada em datas específicas e não varia até a próxima fixação que acontece no mês seguinte. Dessa forma apesar do nosso sinal $s_2(m) \epsilon \mathbb{R}$ os valores que este assume são enumeráveis, desta forma a natureza da imagem é discreta ou digital.

c) Neste item o nosso sinal já está definido como a função f, desta forma o único ponto que devemos destacar é o fato da nossa função não estar definida entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Com isso em mente, todas as classificações feitas neste item não levaram em conta esta descontinuidade na função.

- **Dimensão**: **Bi-Dimensional**. O sinal exposto é função apenas de uma variável, x, porém esta variável pertence ao conjunto dos números complexos. Com isso este número é formato de duas partes: uma parte real e outra imaginária.
- **Natureza do Domínio**: **Contínuo**. O sinal mostrado é uma variação ao longo de x. Da forma como a função está definida, o nosso domínio pertence aos complexos e possuí um subconjunto dos complexos não enumeráveis. Desta forma a natureza do domínio é contínuo.
- **Natureza da Imagem**: **Analógica**. Pensando novamente no nosso sinal, podemos perceber que a nossa função,f, pertence também ao conjunto dos números complexos e que é um subconjunto não enumeráveis deste. Logo a natureza da imagem deste sinal é contínua ou analógica.

d) Analisando melhor a descrição do sinal, podemos verificar que este tem a forma: $s_3(st) = I * st$, sendo $I \epsilon \mathbb{N}$ e $st \epsilon$ {Alimentos, Bolsas, Energia, Financeiro, Mineração, Shoppings, Siderurgia, Varejo}.

- **Dimensão**: **Unidimensional**. O sinal exposto é função apenas de uma variável, o setor econômico. Onde a Figura 1 mostra a quantidade de investimento em cada um destes setores econômicos.
- **Natureza do Domínio**: **Discreto**. O sinal mostrado é definido para cada um dos setores econômicos, desta forma seu domínio é um subconjunto enumerável dos setores, o que torna a natureza do domínio Discreto
- **Natureza da Imagem**: **Digital**. Com um outro olhar para o sinal, podemos perceber que o sinal possui a imagem como um subconjunto enumerável dos números naturais, dessa forma a natureza da imagem é discreta ou digital.

Exercício 2 *Considere que o esquema mostrado na Figura 4 é parte de um sistema ideal de aquisição de dados em que o sinal de saída de um sensor de temperatura é amplificado e alimentado em um A/D do tipo mid-tread. O sensor é projetado para operar na faixa* *entre 0 e 500 ºC, entregando em sua saída um sinal de tensão (em mV - milivolts) linearmente proporcional à temperatura a que está submetido, i.e., $v_s = cT$, com T em ºC e $c = \frac{1}{50}\frac{mV}{^oC}$. O amplificador de tensão é linear e tem ganho escalar ajustável G. A especificação para a faixa de entrada do A/D é entre 0 e 5V e o número de bits B pode ser escolhido arbitrariamente.*

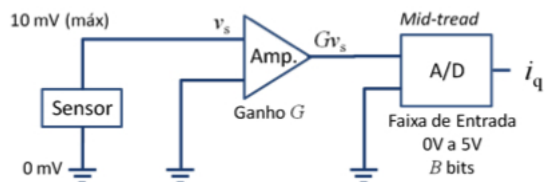

Figura 4: Diagrama esquemático do sistema de aquisição do exercício 2.

a) *Determine os valores apropriados para G e B de modo que o erro máximo entre a temperatura real e a obtenível após o processo de digitalização seja inferior a 1 º*

   Para sua escolha no item (a):

b) *Encontre a saída do A/D quando o sensor é submetido à temperatura de 100 ºC.*

c) *A qual temperatura está submetido o sensor quando a saída do A/D é igual a 10 ?*

d) *Forneça uma expressão para a temperatura quantiza T_q em função dos parâmetros do sistema.*

Solução do Exercício 2:

Antes de começarmos a resolver qualquer parte deste problema iremos primeiramente colocar os pontos importantes deste problema:

1. Com o A/D sendo do tipo mid-tread podemos definir a saída do A/D (i_q) e os níveis de quantização (x_q). Desta forma temos: $x_q = i_q * \Delta$ e $i_q = \left\lfloor \frac{x}{\Delta} - 0.5 \right\rfloor + 1$.

2. Podemos também definir a fórmula para o passo de quantização de um A/D (Δ), sendo: $\Delta = \frac{E}{2^B}$, onde: $E = x_{máx} - x_{mín}$ e B = Número de Bits do A/D.

3. A entrada do A/D é de 0 a 5V, desta forma: $x_{máx} = 5V$, $x_{mín} = 0V$ e $E = 5V - 0V = 5V$.

a) Como o nosso sensor entrega em sua saída o sinal de tensão v_s de 0 a 10mV, precisamos projetar o ganho G de tal forma que aproveitemos toda a faixa de entrada do A/D.

Desta forma se estivermos querendo transformar o valor máximo de saída do sensor (10 mV) para o valor máximo de entrada do A/D, teremos:

$$10mV * G = 5V \rightarrow \frac{10}{1000}V * G = 5V \rightarrow G = \frac{5 * 1000V}{10V} \rightarrow G = 500$$

Desta forma como entrada do A/D teremos:

$$Gv_s = G * T\frac{1}{50}\frac{mV}{^oC} = \frac{T * V}{100^oC}$$

Esta fórmula encontrada acima pode ser utilizada para transformar uma temperatura qualquer captada pelo sensor em um valor em volts para a entrada do A/D. Agora resta definir a quantidade B de bits que este A/D terá.

Como estamos querendo que o nosso erro máximo seja menor que 1^oC, faremos com que o nosso passo de quantização Δ seja menor que esse erro transformado em volts. Estamos realizando este procedimento pois desta forma teremos uma forma de calcular formalmente o valor de B. Desta forma, teremos:

$$\varepsilon = 1^oC \rightarrow \varepsilon = 0,01V$$

$$\Delta < 0,01V \rightarrow \frac{E}{2^B} < 0,01V \rightarrow \frac{5V}{2^B} < 0,01V \rightarrow 0,01V * 2^B > 5V$$

Desta forma o menor valor para B que satisfaz essa equação é B = 9 bits. Sendo assim teremos:

- G = 500. Sendo este valor adimensional.
- B = 9 bits.

b) Temos que encontrar a saída do A/D (i_q) para a entrada $x = 100^oC$. Com o valor de B obtido no item anterior podemos calcular que $\Delta = 0.0097V$. Começaremos transformando o valor da entrada em volts:

$$\frac{x * V}{100^oC} = 1V.$$

Desta forma o valor de entrada 100^oC transformado para a entrada do A/D equivale à 1V. Agora iremos calcular a saída do A/D (i_q):

$$i_q = \left\lfloor \frac{x}{\Delta} - 0.5 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1V}{0.0097V} - 0.5 \right\rfloor + 1 = \lfloor 103,09 - 0.5 \rfloor + 1 = \lfloor 102.59 \rfloor + 1 = 102 + 1 = 103.$$

Desta forma a saída do A/D é 103 (esse valor é adimensional).

c) Iremos utilizar a saída do A/D ($i_q = 10$) para calcular aproximadamente a que temperatura o sensor está submetido. Esta temperatura é aproximada devido a utilização do operador chão ($\lfloor . \rfloor$) no cálculo de i_q. Assim faremos:

$$i_q = \left\lfloor \frac{x}{\Delta} - 0.5 \right\rfloor + 1 \rightarrow 10 = \left\lfloor \frac{x}{0,0097} - 0.5 \right\rfloor + 1$$
$$\rightarrow 9 = \left\lfloor \frac{x - 0,00485}{0,0097} \right\rfloor \rightarrow x - 0,00485 \approx 0,0873 \rightarrow x \approx 0,09215V$$

Para recuperar o valor da temperatura faremos:

$$x * \frac{100^oC}{V} = \frac{0,09215V}{V} * 100^oC = 9,215^oC.$$

Desta forma temos que para a saída do A/D igual a 10, a temperatura mínima que o sensor estava medindo é 9,215^oC e a máxima é este valor acrescido de 0.5, sendo 9,715^oC.

Podemos verificar facilmente a corretude desse resultado para ambos os valores encontrados ($9,215^o \rightarrow 0,09215V$ e $9,715^o \rightarrow 0,09715V$) fazendo:

$$i_q = \left\lfloor \frac{x}{\Delta} - 0.5 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{0.09215}{0.0097} - 0.5 \right\rfloor + 1 = \lfloor 9.5 - 0.5 \rfloor + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$i_q = \left\lfloor \frac{x}{\Delta} - 0.5 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{0.09715}{0.0097} - 0.5 \right\rfloor + 1 = \lfloor 10.0154 - 0.5 \rfloor + 1 = \lfloor 9.5154 \rfloor + 1 = 9 + 1 = 10$$

d) A temperatura quantizada é calculada através da saída doA/D (i_q) e tentando transformá-la de volta para temperatura. Podemos então chegar a seguinte fórmula:

$$T_q = \frac{i_q * \Delta}{G * c}.$$

Exercício 3 *Verifique se os sinais abaixo listados ($n \,\epsilon\, \mathbb{Z}$) são periódicos e, em caso afirmativo, calcule o período fundamental.*

a) $x[n] = sen\left[\frac{3\pi}{13}n\right]$

b) $x[n] = cos^2\left[\frac{3\pi}{8}n\right]\frac{10}{|n|}$

c) $x[n] = exp\left[j\frac{\pi n}{8}\right] + cos\left[\frac{n}{7}\right]$

d) $x[n] = cos\left[\frac{\pi|n|}{3} + 8\pi\right]$

Solução do Exercício 3:

Antes de começar iremos definir o que é um sinal periódico. Um sinal x[n] é dito períodico se:

$$x[n] = x[n+N], \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{Z}, N \,\epsilon\, \mathbb{N}$$

Onde: N é o menor valor no qual esta equação se cumpre.

a) Considerando que o valor dentro do seno ($\frac{3\pi}{13}n$) é dado em radianos, podemos utilizar a seguinte identidade:

$$sen\left[\frac{3\pi}{13}n\right] = sen[\theta], \theta = \frac{3\pi}{13}n$$

$$sen[\theta] = cos\left[\frac{\pi}{2} - \theta\right] = cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{13}n\right]$$

$$x[n] = cos\left[-\frac{3\pi}{13}n + \frac{\pi}{2}\right] = A\,cos[w_0 n], w_0 = -\frac{3\pi}{13}, \phi = \frac{\pi}{2}, A = 1.$$

Utilizando uma propriedade de funções senoidais ou cossenoidais, que diz que: $cos(w_0) = cos(w_0 + 2\pi k), k \epsilon \mathbb{Z}$. Desta forma teremos $x[n] = A\,cos[w_0 n + \phi]$ e irémos supor que x[n] é periódico, logo:

$$x[n] = x[n+N] \rightarrow A\,cos[w_0 n + \phi] = A\,cos[w_0(n+N) + \phi]$$
$$\rightarrow cos[w_0 n + \phi + 2\pi k] = cos[w_0 n + \phi + w_0 N]$$

$$2\pi k = w_0 N \rightarrow N = \frac{2\pi k}{w_0} \rightarrow N = 2\pi k * \left(-\frac{13}{3\pi}\right) \rightarrow N = -\frac{26k}{3}$$

Desta forma precisamos encontrar o menor $N \epsilon \mathbb{N}$ com um $k \epsilon \mathbb{Z}$. Dessa forma:

$$N = -\frac{26k}{3} \rightarrow N = 26, k = -3$$

Este valor de N é o menor valor não-nulo pertence aos naturais, ou seja, x[n] é uma função periódica com período fundamental N = 26. Podemos verificar este resultado na Figura 5.

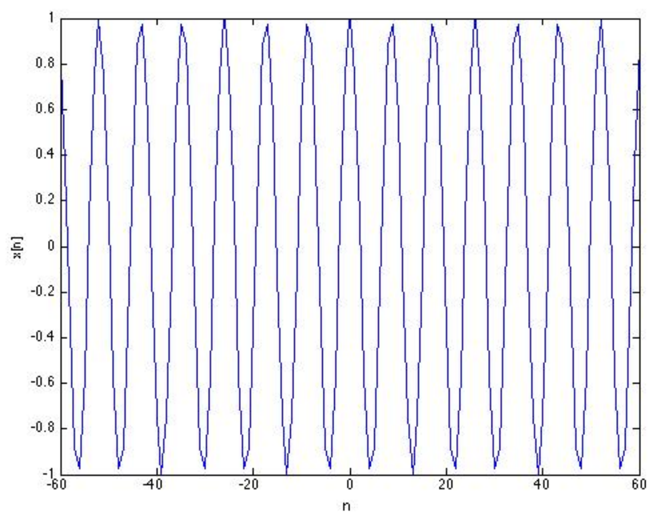

Figura 5: Simulação do sinal x[n]. Podemos perceber aqui que a função atinge o valor 1 no valor n = -51, -25, 1, 27 e 53. Mostrando o seu período fundamental igual a 26.

b) Como esse sinal é composto pela multiplicação de dois outros sinais, faremos a análise da periodicidade de ambos antes de analisar a periodicidade deste. Definimos que $x[n] = I[n] * P[n]$, onde: $I[n] = cos^2\left[\frac{3\pi}{8}n\right]$ e $P[n] = \frac{10}{|n|}$

Assim vamos começar verificando se o sinal I[n] é periódico. Vamos assumir que este é, logo: I[n] = I[n + N]. Utilizando a fórmula para redução do expoente de um cosseno: $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$, teremos que:

$$I[n] = cos^2\left[\frac{3\pi}{8}n\right] = \frac{1 + cos\left[\frac{6\pi}{8}n\right]}{2}$$

Considerando que para I[n] ser periódico basta provar que o cosseno é periódico, com os outros valores sendo apenas uma mudança na fase e amplitude, utilizando o mesmo procedimento feito no item (a), temos que:

$$N = \frac{2\pi k}{w_0} \rightarrow N = 2\pi k * \frac{8}{6\pi} \rightarrow N = \frac{8k}{3} \rightarrow N = 8, k = 3.$$

Assim conseguimos provar que I[n] é periódico com período fundamental N = 8. Agora verificamos que P[n] não pode ser períodico, já que o único valor que faz este sinal ir para infinito é n = 0.

O nosso sinal x[n] será a multiplicação amostra-a-amostra destes dois sinais I[n] periódico e P[n] não periódico. Podemos observar que como P[n] possui um ponto com o valor de infinito, quando for multiplicado pelo sinal I[n] levará um ponto de I[n] para o infinito. Isso significa que irá gerar um sinal x[n] não periódico, como pode ser visto na simulação computacional deste problema presente na Figura 6.

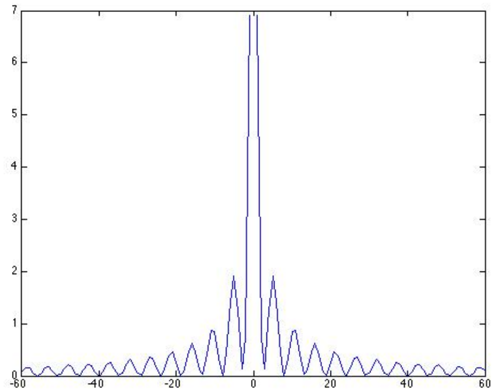

Figura 6: Simulação do sinal x[n].

c) Da mesma forma feita no item (b) iremos verificar a periodicidade de cada um dos sinais que formam x[n]. Desta forma fazemos: x[n] = I[n] + P[n], onde: $I[n] = exp\left[j\frac{\pi n}{8}\right]$ e $P[n] = cos\left[\frac{n}{7}\right]$. Vamos começar verificando P[n]:

$$P[n] = cos\left[\frac{n}{7}\right] = cos\left[\frac{1}{7}n\right] = A\,cos[w_0 n], A = 1, w_0 = \frac{1}{7}$$

Vamos supor que P[n] é periódico, dessa forma teremos da mesma forma que fizemos no item (a):

$$P[n] = P[n+N] \rightarrow N = \frac{2\pi k}{w_0} = 14\pi k$$

Dessa forma podemos observar que não existe um $k \,\epsilon\, \mathbb{Z}$ que faça $N \,\epsilon\, \mathbb{N}$, logo o sinal P[n] não é periódico.

Considerando que x[n] é periódico então este precisa respeitar a seguinte lei: x[n] = x[n + N]. O nosso sinal x[n] é formado pela soma de dois outros sinais: x[n] = I[n] + P[n], desta forma se x[n] for periódico teremos que:

$$x[n] = x[n+N] \rightarrow I[n] + P[n] = I[n+N] + P[n+N]$$

Essa equação mostra que para x[n] ser periódico este deveria ser formado por outros dois sinais períodicos, desta forma como P[n] não é periódico, x[n] também não é.

Podemos chegar a essa conclusão da mesma maneira que fizemos no item (b), como a soma é feita amostra a amostra alguns pontos do sinal irão ser deslocados o que irá causar a destruição da periodicidade. Podemos verificar o fenômeno através da simulação computacional presente na Figura 7.

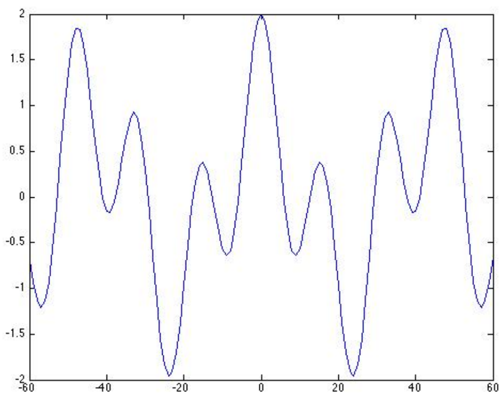

Figura 7: Simulação do sinal x[n]. Podemos verificar que não existe um período sendo repetido em nenhum momento.

d) Para verificar que este sinal é periódico faremos o mesmo processo utilizado no item (a):

$$x[n] = cos\left[\frac{\pi}{3}|n| + 8\pi\right] = A\,cos[w_0|n| + \phi], w_0 = \frac{\pi}{3}, \phi = 8\pi.$$

Considerando a aproximação que $|n+N| = |n| + |N|$, podemos fazer:

$$w_0|N| = 2\pi k \rightarrow |N| = 6k \rightarrow N = 6k \rightarrow N = 6, k = 1$$

Dessa forma podemos verificar que o sinal é periódico com período fundamental N = 6, este fato pode ser observado na simulação computacional na Figura 8.

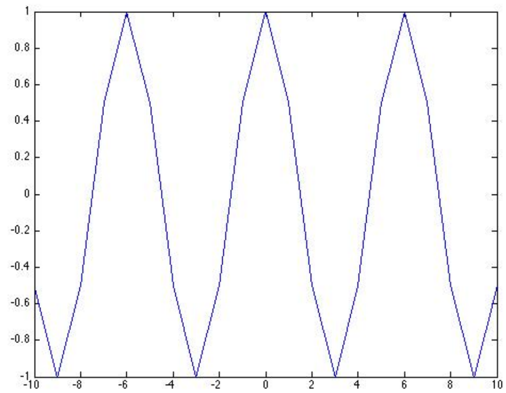

Figura 8: Simulação do sinal x[n]. Podemos verificar que a cada 6 valores todo um ciclo se repete.

Exercício 4 *Para cada um dos sinais abaixo ($n \in \mathbb{Z}$) verifique se são de potência ou energia e calcule sua energia e a potência média.*

a) $x[n] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n-7} u[n]$

b) $x[n] = \alpha^n u[n+3],\ com\ \alpha = \frac{1}{5}$

c) $x[n] = cos\left[\frac{\pi}{3} n\right]$

d) $x[n] = j^n (u[n+3] - u[n-3]),\ com\ j = \sqrt{-1}$

Solução do Exercício 4:

Antes de verificarmos se os sinais são se energia ou de potência, iremos definir o que é cada um destes. Um sinal de energia possui um E finito e não-nulo:

$$E = \sum_n |x[n]|^2$$

Já um sinal de potência possui P finito e não-nulo:

$$P = lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{k} |x[n]|^2$$

a) Podemos perceber que este sinal tem um problema quando n = 7 (o valor do sinal vai para infinito) que será considerado no sinal já que a função degrau começa com n = 0. Dessa forma temos que a ℓ_∞ não é limitada, o que faz com que este sinal não seja nem de energia nem de potência.

b) Devido a função degrau, este sinal começa a ser não-nulo a partir de n = -3. Apesar deste sinal possuir um suporte temporal infinito, o descrescimento será tão rápido que não a risco da energia ir para infinito, dessa forma iremos verificar esta suposição:

$$E = \sum_n |x[n]|^2 = \sum_{n=-3}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{5}\right)^n \right|^2 = \sum_{n=-3}^{\infty} \left| \frac{1}{5^n} \right|^2 = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{(5^n)^2} = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{(25)^n}$$

A soma acima é a soma dos infinitos termos S_∞ dos termos de uma progressão geométrica (PG) com razão $q = \frac{1}{25}$. Esta é chamada de série geométrica e é bem definida, para $|q| < 1$, como:

$$E = S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{25^3}{1 - \frac{1}{25}} \approx 1,62 * 10^4$$

Onde: a_1 é o primeiro termo da PG.

Desta forma como o valor da energia é finita e não-nula, o nosso sinal é de energia.

c) Primeiramente iremos verificar se este sinal é periódico, assim como foi feito no exercício 3 item (a). Logo vamos considerar que este sinal é periódico, desta forma este precisa respeitar a seguinte equação: $x[n] = x[n+N]$.

$$x[n] = cos\left[\frac{\pi}{3}n\right] = cos[w_0 n], w_0 = \frac{\pi}{3}$$

Desta forma temos que:

$$N = \frac{2\pi k}{w_0} = 2\pi k * \frac{\pi}{3} = 6k = 6, k = 1$$

Logo podemos concluir que este sinal é periódico com um período fundamental N = 6. Com isso podemos dizer que este sinal não é de energia já que iremo somar infinitamente diversos termos com o valor igual a 1, o que tornará a nossa energia infinita.

Assim basta verificarmos se este sinal é de potência:

$$P = lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sum_{n=-k}^{k}|x[n]|^2 = lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sum_{n=-k}^{k}\left|cos\left[\frac{\pi}{3}n\right]\right|^2$$

$$= lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sum_{n=-k}^{k}cos^2\left[\frac{\pi}{3}n\right] = lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sum_{n=-k}^{k}\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}{2}$$

Analisando o somatório para k = 1, 2, 3, ..., temos:

$$\sum_{n=-1}^{1}\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}{2} = \frac{1+cos\left[\frac{-2\pi}{3}\right]}{2}+\frac{1+cos[0]}{2}+\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}\right]}{2} = \frac{1}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\sum_{n=-2}^{2}\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}{2} = \frac{1+cos\left[\frac{-4\pi}{3}\right]}{2}+\frac{1+cos\left[\frac{4\pi}{3}\right]}{2}+\sum_{n=-1}^{1}\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{6}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\sum_{n=-3}^{3}\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}{2} = \frac{1+cos\left[-\frac{\pi}{3}\right]}{2}+\frac{1+cos\left[\frac{\pi}{3}\right]}{2}+\sum_{n=-2}^{2}\frac{1+cos\left[\frac{2\pi}{3}n\right]}{2} = \frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{8}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Se continuarmos desta forma podemos observar que o somatório pode ser aproximado por:

$$\sum_{n=-k}^{k}|x[n]|^2 \approx \frac{2.1k+0.6}{2}$$

Este processo foi feito por uma simpels aproximação linear. Desta forma teremos que:

$$P = lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sum_{n=-k}^{k}|x[n]|^2 \approx lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{2.1k+0.6}{2} \approx \frac{1}{2}$$

Como o valor de potência é não-nulo e limitado o sinal é de potência.

d) Este sinal possui duas funções degrau, uma que começa com n = -3 ($u[n+3]$, onde abaixo deste valor a função é zero) e outra que começa com n = 3 ($u[n-3]$, onde abaixo deste valor a função é zero).

Desta forma possuímos um domínio limitado (-3 a 2), devido a subtração destas funções, onde a função não é nula. Como o domínio é limitado o sinal exposto, provavelmente, é de energia já que a potência média irá a zero.Temos que $n \epsilon \mathbb{Z}$ e que $j = \sqrt{-1}$, assim podemos calcular a energia:

$$E = \sum n|x[n]|^2 = \sum_{n=-3}^{2}|j^n|^2 = \sum_{n=-3}^{2}(j^2)^n = \sum_{n=-3}^{2}(-1)^n =$$

$$= (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^{0} + (-1)^{1} + (-1)^{2} = 0$$

Podemos observar neste caso que a energia é nula, fazendo com que o sinal não seja de energia e nem de potência já que quando calcularmos esta teremos o mesmo resultado pela definição de P.

Desta forma o sinal exposto não é de energia e nem de potência.

Exercício 5 *Discuta as afirmativas abaixo, i.e., justifique se são verdadeiras ou falsas.*

a) Na soma (amostra-a-amostra) de duas sequências não-nulas distintas, basta que uma delas seja não-periódica para que o resultado seja uma sequência não-periódica.

b) A soma de duas sequências distintas, ambas do tipo lateral-direita, é sempre uma sequência lateral-direita.

c) Toda sequência pertencente ao ℓ_1 é sinal de energia.

d) É sempre não-nulo o somatório das amostras de uma sequência par pertencente ao ℓ_∞ e com suporte temporal finito.

Solução do Exercício 5:

a) Verdadeiro, como podemos verificar pela definição de um sinal periódico ($x[n] = x[n+N], n\,\epsilon\,\mathbb{Z}\,e\,N\,\epsilon\,\mathbb{N}$), vamos supor que x[n] é formado pela soma de outros dois sinais ($P[n]\,e\,I[n]$), desta forma se x[n] for periódico, teremos que:

$$x[n] = x[n+N] \rightarrow P[n] + I[n] = P[n+N] + I[n+N]$$

Esta equação acima, indica que para este sinal x[n] ser periódico os dois sinais que o formam também precisam ser periódicos. Este conceito faz um certo sentido, se possuímos um sinal periódico e somarmos com um valor constante estamos apenas mudando a fase deste sinal. Porém quando somamos com um outro sinal que não é periódico, pelo menos, um ponto do nosso sinal não irá se repetir o que faz com que este sinal perca a periodicidade original.

b) Falso, vamos supor que as duas sequências que estão sendo somadas são duas funções degrau. Vamos ainda supor que uma delas é negativa apartir de um certo ponto e zero em todo o restante do domínio. Agora faremos a soma (ou subtração) destas duas sequências que por construção se anulam em todos os pontos exceto um. Acabamos de criar desta forma a função delta ($\delta[n]$) e como verificamos nos slides presentes em aula esta função não é definida como do tipo lateral-direita.

c) Verdadeiro, verificando a definição de um sinal de energia, podemos perceber que a norma 2 (ℓ_2) é definida como a raiz quadrada da energia E do sinal. Dessa forma como a norma 1 (ℓ_1) é mais estrita ou no mínimo é equivalente a norma 2, um sinal que pertence a ℓ_1 é um sinal de energia por definição.

d) Falso, vamos supor que possuímos uma sequência par onde os valores positivos somados são exatamente iguais aos valores negativos somados. Apesar da definição que é feita para um sinal par ($x[n] = x[-n]$), o que esta restringe é que valores iguais devem se repetir em outro instante de tempo com o mesmo sinal (se temos um valor 3 este deve se repetir em algum outro instante do sinal com o mesmo sinal positivo). Porém o que esta definição não restringe é que os valores positivos somados não possam ser anulados com os valores negativos.