Polinômios de Tchebychev

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em matemática, os **Polinómios de Chebyshev** (pt-PT) ou **Polinômios de Tchebychev** (pt-BR), receberam esse nome após matemático Pafnuty Chebyshev[1] defini-los como uma sequência de polinômios ortogonais, relacionados com a fórmula de Moivre e facilmente obtíveis de forma recursiva. Costuma-se denotar os polinômios de Tchebychev de primeira ordem por T_n o os polinômios de Tchebychev de segunda ordem por U_n. O uso da letra T para os polinômios de primeira ordem foi dado devido a uma das trasliterações de Tchebychev, que admitem também Chebyshev, Tchebyshef e Tschebyscheff.

Os polinômios de Tchebychev T_n ou U_n são polinômios de grau *n* e a sequência dos polinômios de todos os graus formam uma sequência polinomial.

Os polinômios de Tchebyshev são importantes na teoria da aproximação porque as raízes dos polinômios de primeira ordem podem ser utilizados na interpolação polinomial. O resultado da interpolação minimiza o problema do fenômeno de Runge e fornece a melhor aproximação de uma função contínua que obedece à norma do supremo. Essa aproximação conduz diretamente ao método da quadratura de Clenshaw–Curtis.

No estudo de equações diferenciais os polinômios de Tchebychev surgem como soluções das equações de Chebyshev

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + n^2\,y = 0$$

e

$$(1-x^2)\,y'' - 3x\,y' + n(n+2)\,y = 0$$

Índice

Definição

Os **polinômios de Tchebyshev de primeira ordem** são definidos pela relação recursiva:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Um exemplo de função geradora para T_n é

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

Os **polinômios de Tchebychev de segunda ordem** são definidos pela relação recursiva:

$$U_0(x) = 1$$
$$U_1(x) = 2x$$
$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Um exemplo de função geradora para U_n é

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{1-t(2x+t)}.$$

Definição trigonométrica

Os polinômios de Tchebychev podem ser definidos através das identidades trigonométricas:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cosh(n \operatorname{arccosh} x)$$

onde:

$$T_n(\cos(\vartheta)) = \cos(n\vartheta)$$

para n = 0, 1, 2, 3, ..., enquanto os polinômios de segunda ordem satisfazem

$$U_n(\cos(\vartheta)) = \frac{\sin((n+1)\vartheta)}{\sin \vartheta}$$

que são semelhantes às equações núcleo de Dirichlet.

Aplicação da definição trigonométrica

Tomando-se

$$T_0(x) = \cos\ 0x\ = 1$$

e

$$T_1(\cos(x)) = \cos\ (x)$$

é fácil obter algumas propriedades trigonométricas utilizando os polinômios de Tchebychev:

$$\cos(2\vartheta) = 2\cos\vartheta\cos\vartheta - \cos(0\vartheta) = 2\cos^2\ \vartheta - 1$$

$$\cos(3\vartheta) = 2\cos\vartheta\cos(2\vartheta) - \cos\vartheta = 4\cos^3\ \vartheta - 3\cos\vartheta$$

e assim por diante.

Relação entre os polinômios de Tchebychev de primeira e segunda ordem

Os polinômios de Tchebychev de primeira e segunda ordem estão estreitamente correlacionados pelas seguintes equações:

$$\frac{d}{dx}\,T_n(x) = nU_{n-1}(x)\ ,\ n = 1, \ldots$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - \,U_{n-2}(x)).$$

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1 - x^2)U_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = U_n(x) - x\,U_{n-1}(x).$$

A relação entre as derivadas dos prolinômios de Tchebychev são dadas pelas seguintes equações:

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1}\ \frac{d}{dx}T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}\ \frac{d}{dx}T_{n-1}(x)\ , \quad n = 1, \ldots$$

Essas proprieades são utilizadas para obter as soluções de equações diferenciais pelo método do espectro de Tchebychev.

De forma equivalente as duas sequências, de primeira e segunda ordem, podem ser definidas de forma mutualmente recursiva:

$$T_0(x) = 1$$

$$U_{-1}(x) = 0$$

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1 - x^2)U_{n-1}(x)$$

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x)$$

Fórmulas epecíficas

Diferentes abordagens na definição dos polinômios de Tchebychev levam a fórmulas específicas, tais como:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n\arccos(x)), & x \in [-1, 1] \\ \cosh(n\,\mathrm{arccosh}(x)), & x \geq 1 \\ (-1)^n\cosh(n\,\mathrm{arccosh}(-x)), & x \leq -1 \end{cases}$$

$$T_n(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{2}$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k} = x^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (1-x^{-2})^k$$

$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (x^2-1)^k x^{n-2k} = x^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (1-x^{-2})^k$$

Propriedades

Aninhamento

Um colorário imediato da definição recursiva dos polinômios de Tchebychev é a proriedade de aninhamento, ou identidade de composição:

$$T_n(T_m(x)) = T_{n \cdot m}(x).$$

Ortogonalidade

Ambas os polinômios de primeira e segunda ordem, T_n e U_n, formam uma sequência de polinômios ortogonais. Os polinômios de primeira ordem são ortogonais com relação ao peso

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

no intervalo [−1,1], ou seja:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

Tal propriedade pode ser provada definindo $x = \cos(\vartheta)$ e usando a identidade $T_n(\cos(\vartheta)) = \cos(n\vartheta)$. Similarmente os polinômios de segunda ordem são ortogonais ao peso

$$\sqrt{1-x^2}$$

no intervalo [−1,1], ou seja:

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & : n \ne m, \\ \pi/2 & : n = m. \end{cases}$$

(Note que o peso $\sqrt{1-x^2}$ é, dentro de uma constante de normalização, a densidade da distribuição do semicírculo de Wigne.

Mínimo ∞-norm

Para qualquer $n \geq 1$, entre os polinônios de grau n e coeficiente principal 1,

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

é uma função onde o valor absoluto máximo no intervalo $[-1, 1]$ é mínimo.

O valor máximo nesse caso é

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

e $|f(x)|$ atinge o máximo exatamente $n + 1$ vezes em

$$x = \cos\frac{k\pi}{n} \text{ for } 0 \le k \le n.$$

Diferenciação e integração

As derivadas dos polinômios de Tchebychev podem ser simples de se obter. A diferenciação dos polinômios na forma trigonométrica podem ser obtidos pelas fórmulas:

$$\frac{dT_n}{dx} = nU_{n-1}$$

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{(n+1)T_{n+1} - xU_n}{x^2 - 1}$$

$$\frac{d^2T_n}{dx^2} = n\frac{nT_n - xU_{n-1}}{x^2-1} = n\frac{(n+1)T_n - U_n}{x^2-1}.$$

As duas últimas fórmulas podem causar algumas dificuldades numéricas quando x=1 e x=-1. Pode ser mostrado que:

$$\left.\frac{d^2T_n}{dx^2}\right|_{x=1} = \frac{n^4-n^2}{3},$$

$$\left.\frac{d^2T_n}{dx^2}\right|_{x=-1} = (-1)^n\frac{n^4-n^2}{3}.$$

Raízes e extremos

Um polinômio de Tchebychev de grau n tem n raízes raízes simples, chamadas de "nós" de Tchebychev, compreendidas no intervalo $[-1,1]$. As raízes são muitas vezes chamadas por esse nome porque são frequentemente utilizadas na interpolação polinomial. Usando a definição trigonométrica e usando a propriedade

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)=0$$

é possível mostrar facilmente que as raízes de T_n são

$$x_k=\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}\right),\quad k=1,\ldots,n.$$

Similarmente, as raízes de U_n são

$$x_k=\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right),\quad k=1,\ldots,n.$$

Uma pripriedade dos polinômios de Tchebychev de primeira ordem é que no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ todos os máximos e mínimos valores são -1 ou 1. Dessa forma esses polinômios tem apenas dois valores críticos, tal como definidos pelos polinômios de Shabat. Ambos os polinômios de primeira ordem e segunda ordem possuem os extremos no limite de intervalo de definição das funções, sendo dados por:

$$T_n(1)=1$$

$$T_n(-1)=(-1)^n$$

$$U_n(1)=n+1$$

$$U_n(-1)=(n+1)(-1)^n.$$

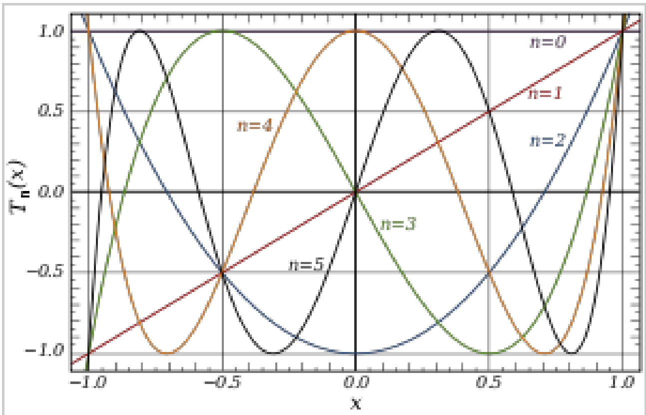
Outras Propriedades

- Os polinômios de Tchebychev são um caso particular dos polinômios de Gegenbauer, que por sua vez é caso particular dos polinômios de Jacobi.
- Para todo inteiro n não negativo, $T_n(x)$ e $U_n(x)$ são ambos polinômios de grau n. Eles são funções ímpares ou pares de x se n é ímpar ou par, respectivamente.
- O coeficiente principal de T_n é 2^{n-1}}} se $1 \leq n$ e 1 se $0=n$.
- T_n são casos especiais das curvas de Lissajous com frequência relativa igual a *n:1*.
- Diversas sequências de polinômios tais como os polinômios de Lucas polynomials (L_n), polinômios de Dickson (D_n), polinômios de Fibonacci (F_n) estão correlacionados com os polinômios de Tchebyshev T_n e U_n.
- Qualquer polinômio arbitrário de grau n pode ser escrito em termos de uma somatória de polinônios de Tchebychev de primeira ordem de grau máximo n. Tal polinômio arbitrário $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(x).$$

Exemplos

Os primeiros cinco polinônios de Tchebyshev de primeira ordem são:



Os primeiros cinco polinômios de Tchebyshev de primeira ordem no domínio -1<x<1: The flat T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 and T_5.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

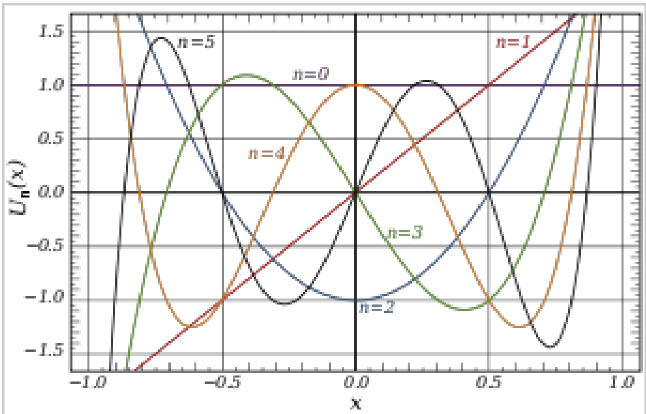
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$

Os primeiros cinco polinônios de Tchebyshev de segunda ordem são:



Os primeiros cinco polinômios de Tchebyshev de segunda ordem no domínio −1 < x < 1: The flat U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 and U_5.

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$

$$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

$$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x.$$

Referências

1. ↑ Chebyshev polynomials were first presented in: P. L. Chebyshev (1854) "Théorie des mécanismes connus sous le nom parallelogrammes," *Mémoires des Savants étrangers présentes à l'Academie de Saint-Pétersbourg*, vol. 7, pages 539-586.

Obtida de "http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Polinômios_de_Tchebychev&oldid=32140010"
Categoria: Análise numérica
