CAPITULO VII

CONCLUSÕES

Problemas de contato em elasticidade linear foram abordados aqui a partir de formulações variacionais que dão origem a problemas de otimização que são, por sua vez, resolvidos via técnicas de programação matemática. Esta opção proporciona uma formulação consistente, tanto do ponto de vista mecânico quanto matemático, onde resultados relativos à existência e unicidade da solução bem como relativos à convergência dos algoritmos numéricos utilizados, estão disponíveis.

Para o caso sem atrito, viu-se que a introdução de restrições unilaterais faz com que o problema, antes escrito como um sistema de equações lineares, se transforme num problema de complementaridade linear. Mostrou-se ainda que, para materiais elásticos lineares, o problema do equilíbrio na ausência de atrito é equivalente à minimização de um funcional quadrático, sem restrições no caso usual bilateral, e com restrições lineares de desigualdade no caso unilateral.

Neste contexto, o uso de estratégias que requerem a introdução de elementos artificiais de interface ou ainda procedimentos de penalização do conjunto de restrições (todos de natureza incremental e/ou iterativa) são desnecessários, já que a solução pode ser obtida com algoritmos - inclusive com terminação finita - para o problema de complementaridade linear ou programação quadrática.

Dentre as alternativas consideradas aqui para os problemas sem atrito, pode-se concluir que, do ponto de vista da implementação computacional, o procedimento mais simples corresponde à solução do problema primal pelo algoritmo GSRP, desde que o conjunto de restrições possa ser colocado na forma $a \leqq u \leqq b$.

Entretanto, uma redução substancial do tempo de processamento pode ser obtida efetuando-se a condensação estática dos graus de liberdade não-restritos ou seja, resolvendo-se o problema primal condensado.

Para o caso mais geral de restrições da forma $Au \leqq b$ uma opção é resolver o problema primal condensado pelo algoritmo de Lemke.

Entretanto, quando a matriz de rigidez do problema é positiva-definida, a melhor opção é resolver o problema dual, cuja dimensão é igual ao número de restrições do problema original. Neste caso, o algoritmo GSRP pode ser utilizado, mas o algoritmo de Lemke tem a vantagem de fornecer a solução exata (a menos de erros de arredondamento) do problema discreto num número finito de passos.

Para o problema de indentação rígida a matriz do sistema é positiva-semi-definida e a opção mais eficiente é resolver o problema dual, que tem agora restrições adicionais de igualdade, pelo algoritmo de Lemke.

O algoritmo de Uzawa, embora de implementação simples, apresentou convergência lenta e um comportamento mais dependente do problema do que o desejado.

O problema de contato com atrito é bem mais complexo não sendo possível uma formulação em termos de inequações variacionais. Com isto, muito se perde em relação ao problema sem atrito. Entretanto, lançando mão do problema auxiliar de Duvaut-Lions (ou suas generalizações para o caso de indentação rígida e contato entre dois sólidos) é possível estabelecer a sequência de sub-problemas P_1 P_2 P_1 ......, onde P_1 corresponde ao problema sem atrito e P_2 ao problema de Duvaut-Lions associado, cujas soluções, espera-se, convirjam para a solução do problema original.

Embora P_1 e P_2 sejam, em geral, bem-postos, a convergência do processo acima não pode ser provada para o caso da lei de Coulomb.

Entretanto, para todos os exemplos analisados até aqui a sequência de soluções convergiu e o melhor desempenho se deu quando os problemas duais associados a P_1 e P_2 foram resolvidos pelo algoritmo GSRP (partindo de resultados do sub-problema anterior) com limitação no número de iterações.

No caso de indentação rígida, o algoritmo GSRP foi substituído pelo algoritmo de Lemke, já que a matriz do problema é positiva-semi-definida.

Uma extensão imediata dos procedimentos propostos aqui corresponde ao caso de materiais com uma função densidade de energia de deformação convexa, mas não necessariamente quadrática. Neste caso, o problema de contato sem atrito ainda é equivalente à minimização da energia potencial total no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis. Para a solução do problema discreto associado basta utilizar um algoritmo para minimização de um funcional convexo em $\mathbb{R}^n$ sob restrições lineares de desigualdade.

Outra extensão natural deste trabalho seria incluir o comportamento elasto-plástico. Neste caso, como a restrição de admissibilidade plástica imposta ao campo de tensões é também de natureza unilateral e convexa, a combinação das formulações e algoritmos expostos aqui, com aqueles propostos em FEIJÓO e ZOUAIN (74), parece ser o caminho natural para se abordar problemas de contato no caso de comportamento elasto-plástico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) KIKUCHI, N.; ODEN, J.T., "Contact problems in elasticity", TICOM report 79-8, The University of Texas at Austin, Austin, TX, USA, (1979).

(2) JOHNSON, K.L., "One hundred years of Hertz contact", Proc. Inst.Mech.Engrs., vol. 196, pp. 363-378 (1982).

(3) FICHERA, G., "Existence theorems in elasticity" e "Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints" em Encyclopedia of Physics (S. Flügge), vol. VI a/2, Mechanics of Solids II, ed. C.Truesdell, Springer-Verlag, pp. 347-424, (1972).

(4) STAMPACCHIA, G., "Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes", C.R.Acad.Sci. Paris, vol. 258, pp. 4413-4416, (1964).

(5) LIONS, J.L.; STAMPACCHIA, G., "Variational inequalities", Comm. Pure Appl.Math., vol. 20, pp. 493-519, (1967).

(6) DUVAUT, G; LIONS, J.L., Les inéquations en méchanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).

(7) GLOWINSKI, R; LIONS, J.L.; TRÉMOLIÈRES, R., Analyse numerique des inequations variationelles, Tome 1 e Tome 2, Dunod, Paris, (1976).

(8) KALKER, J.J., "A survey of the mechanics of contact between solid bodies", ZAMM, 57, T3-T17, (1977).

(9) WILSON, E.A.; PARSONS, B., "Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements", Int.J.Num.Meth.Eng., vol. 2, nº 3, pp. 387-395, (1970).

(10) CHAN, S.K.; TUBA, I.S., "A finite element method for contact problems of solid bodies - Part I. Theory and validation", Int.J.Mech.Sci., vol. 13, pp. 615-625 e "Part II. Application to turbine blade fastenings",

Int.J.Mech.Sci., vol. 13, pp. 627-639, (1971).

(11) TSUTA, T.; YAMAJI, S., "Finite element analysis of contact problem", Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis,(ed. Y. Yamada e R.H. Gallagher), Univ. of Tokio Press, pp. 177-194, (1973).

(12) FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O.C., "A note on numerical computation of elastic contact problems", Int.J.Num. Meth.Eng., vol. 9, pp. 913-924, (1975).

(13) SACHDEVA, T.D.; RAMAKRISHNAN, C.V.; NATARAJAN, R., "A finite element method for the elastic contact problems", J. Eng.Ind., Trans. ASME, vol. 103, pp. 456-461, Nov. (1981).

(14) SACHDEVA, T.D.; RAMAKRISHNAN, C.V., "A finite element solution for the two-dimensional elastic contact problems with friction", Int.J.Num.Meth.Eng., vol. 17, pp. 1257-1271, (1981).

(15) FREDRIKSSON, B., "Finite element solution of surface non-linearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems", Computers and Structures, vol. 6, pp. 281-290,(1976).

(16) GAERTNER, R., "Investigation of plane elastic contact allowing for friction", Computers and Structures, vol. 7, pp. 59-63, (1977).

(17) OKAMOTO, N; NAKAZAWA, M., "Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions", Int.J.Num.Meth.Eng., vol. 14, pp. 337-357, (1979).

(18) SCHÄFER, H., "A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements", Comp.Meth. Appl.Mech.Engng. 6, pp. 335-354, (1975).

(19) STADTER, J.T.; WEISS, R.O., "Analysis of contact through finite element gaps", Computer and Structures, vol. 10, pp. 867-873, (1979).

(20) ZOLTI, E., "A finite element procedure to time dependent contact analysis", Computers and Structures, vol. 17, nº 4, pp. 555-561, (1983).

(21) MAHMOUD, F.F.; SALAMON, N.J.; MARKS, W.R., "A direct automated procedure for frictionless contact problems", Int.J.Num.Meth.Eng., vol. 18, pp. 245-257, (1982).

(22) MAHMOUD, F.F.; SALAMON, N.J.; PAWLAK, T.P., "Simulation of structural elements n receding/advancing contact", Computers and Structures, vol. 22, nº 4, pp. 629-635, (1986).

(23) TSENG, J.; OLSON, M.D., "The mixed finite element method applied to two-dimensional elastic contact problems", Int.J.Num.Meth.Eng., vol. 17, pp. 991-1014, (1981).

(24) PIAN, T.H.H.; KUBOMURA, K., "Formulation of contact problems by assumed stress hybrid elements" em Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Ed. W. Wunderlich et. al.) Springer-Verlag, pp. 49-59, (1981).

(25) ANDERSSON, T.; ALLAN-PERSSON, B.G., The boundary element method applied to two-dimensional contact problems" em Progress in Boundary Element Methods, vol. 2 (Ed. C.A. Brebbia), Pentech Press, pp. 136-157, (1983).

(26) PARIS, F.; GARRIDO, J.A., "Aspectos numericos de la aplicación del metodo de los elementos de contorno al problema de contacto", Rev.Int.Met.Num.Calc.Dis.Ing., vol. 2, nº 1, pp. 43-62, (1986).

(27) DUPUIS, G.; PROBST, A., "Étude d'une structure élastique soumise à des conditions unilatérales", J. de Mécanique, vol. 6, nº 1, pp. 3-41, (1967).

(28) VILLAGIO, P., "Monodimensional solids with constrained solutions", Meccanica, 2, pp. 65-68, (1967).

(29) CONRY, T.F.; SEIREG, A., "A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact", J.Appl. Mech. 52 (ASME), pp. 387-392, (1971).

(30) FRÉMOND, M., "Dual formulations for potential and complementary energies. Unilateral boundary conditions. Applications to the finite element method", The Mathematics of Finite Elements and Applications (ed. Whitheman). Academic Press, pp. 175-188, (1973).

(31) SAYEGH, A.F., "Elastic analysis with indeterminate boundary conditions", J.Engng.Mech.Div. ASCE, 100, pp. 49-62, (1974).

(32) PANAGIOTOPOULOS, P.D., "A non-linear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity", Ing. Archiv 44, pp. 421-432, (1975).

(33) CHAND, R.; HAUG, E.J.; RIM, K., "Analysis of unbounded contact problems by means of quadratic programming", J.Opt. Theory and Appl., vol. 20, nº 2, pp. 171-189, (1976).

(34) HAUG, E.; CHAND, R.; PAN, K., "Multibody elastic contact analysis by quadratic programming", J.Opt.Theory and Appl., vol. 21, nº 2, pp. 189-198, (1977).

(35) HUNG, N.D.; SAXCÉ, G., "Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique", Computers and Structures, vol. 11, pp. 55-67, (1980).

(36) FREDRIKSSON, B.; RYDHOLM, G.; SJÖBLOM, P., "Variational inequalities in structural mechanics with emphasis on contact problems", International Conference on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Geilo, Noruega. (Pré-print), (1977).

(37) DEL PIERO, G.; MACERI, F. (Editores), "Unilateral problems in structural analysis", Proc. of the 2nd Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis, Ravello, Itália, 1983, CISM Courses and Lectures nº 288, Springer-Verlag (1985).

(38) KEER, A.D., "Elastic and viscoelastic foundation models", J.Appl.Mech., ASME, vol. 31, pp. 491-498, Sept., (1964).

(39) BAIOCCHI, C.; GASTALDI, F.; TOMARELLI, F., "Inéquations variationelles non coërcives", C.R.Acad.Sc. Paris, t. 299, Serie I, pp. 647-650, (1984).

(40) KIKUCHI, N.; SONG, Y.J., "Contact problems involving forces and moments for incompressible linearly elastic

materials", Int.J.Engng.Sci., vol. 18, pp. 357-377, (1980).

(41) MACERI, F.; TOSCANO, R.; MACERI, A., "A contact problem: the elastic beam on one-sided Pasternak foundation", Applicable Analysis, vol. 13, pp. 19-43, (1982).

(42) KIKUCHI, N.; SONG, Y.J., "Penalty/finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity", Quart.Appl.Math., vol. XXXIX, nº 1, pp. 1-22, (1981).

(43) ODEN, J.T.; KIM, S.J., "Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics", Comp. and Math. with Appl., vol. 8, nº 1, pp. 35-56, (1982).

(44) ASCIONE, L.; GRIMALDI, A., "Penalty formulations of the unilateral contact problem between plates and an elastic half-space" em Penalty-Finite Element Methods in Mechanics - AMD - vol. 51, pp. 109-122, (Ed. J.N. Reddy).

(45) PALMER, F., "What about friction?", American J. of Physics, vol 17, pp. 181-187, (1949).

(46) TABOR, D., "Friction - the present state of our understanding", J. of Lubrication Technology 183, ASME, pp. 169-179, (1981).

(47) ODEN, J.T.; MARTINS, J.A.C., "Models and computational methods for dynamic friction phenomena", Comp.Meth. Appl.Mech.Engng. 52, pp. 527-634, (1985).

(48) ODEN, J.T.; PIRES, E.B., "Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity", J.Appl.Mech. (ASME), 50(1), pp. 67-76, (1983).

(49) ODEN, J.T.; PIRES, E.B., "Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws", Computers and Structures, vol. 16, nº 1-4, pp. 481-485, (1983).

(50) MICHALOWSKI, R.; MROZ, Z., "Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems", Archiv. Mech. 30, pp. 259-276, (1978).

(51) CURNIER, A., "A theory of friction", Int.J. Solids and Structures, vol. 20, nº 7, pp. 637-647, (1984).

(52) NECAS, J.; JARUSEK, J.; HASLINGER, J., "On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction", Boll. U.M.I. (5), 17-B, pp. 796-811, (1980).

(53) DUVAUT, G., "Équilibre d'un solide elastique avec contact unilatéral e frottement de Coulomb", C.R.Acad.Sc. Paris, t. 290, série A, pp. 263-265, (1980).

(54) DEMKOWICZ, L.; ODEN, J.T., "On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction", Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, vol. 6, nº 10, pp. 1075-1093, (1982).

(55) COCU, M., "Existence of solutions of Signorini problems with friction", Int.J.Engng.Sci., vol. 22, nº 5, pp. 567-575, (1984).

(56) DUVAUT, G.; LIONS, J.L., "Un problème d'élasticité avec frottement", J.Mécanique, vol. 10, nº 3, pp. 409-420, (1971).

(57) KALKER, J.J., "On the contact problem in elastostatics" em Unilateral Problems in Structural Analysis (Ed. G. Del Piero e F. Maceri) CISM Courses and Lectures nº 288, Springer-Verlag, pp. 81-118, (1985).

(58) CRYER, C.W., "The solution of a quadratic programming problem using systematic overrelaxation", SIAM J. Control, vol. 9, nº 3, pp. 385-392, (1971).

(59) APELT, C.J.; ISAACS, L.T., "On the estimation of the optimum accelerator for SOR applied to finite element methods", Comp.Meth.Appl.Mech.Engng. 12, pp. 383-391, (1977).

(60) BAZARAA, M.S.; SHETTY, C.M., Nonlinear programming, theory and algorithsm, John Wiley and Sons.

(61) CAMPOS, L.T.; ODEN, J.T.; KIKUCHI, N., "A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics", Comp.Meth.Appl.Mech.Engng. 34, pp. 821-845, (1982).

(62) RAOUS, M., "Contacts unilatēraux avec frottment en visco-ēlasticitē, em Unilateral Problems in Structural Analysis, (Ed. G. Del Piero, F. Maceri) CISM Courses and Lectures nº 288, Springer-Verlag, pp. 269-297, (1985).

(63) HASLINGER, J.; PANAGIOTOPOULOS, P.D., "The reciprocal variational approach to the Signorini problem with friction. Approximation results", Proc.Royal Soc. of Edinburgh, 98A, pp. 365-383, (1984).

(64) FEIJŌO, R.A.; BARBOSA, H.J.C.,"Static analysis of piping systems with unilateral supports", VII Cong. Brasileiro de Engenharia Mecānica, vol. D, pp. 269-279, Uberlāndia, MG, (1983).

(65) BARBOSA, H.J.C. e FEIJŌO, R.A., "Numerical algorithms for contact problems in linear elastostatics", Conf. on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, vol. 1, pp. 231-244, Porto Alegre, RS,(1984).

(66) BARBOSA, H.J.C. e FEIJŌO, R.A., "Um algoritmo para o problema de indentação rīgida em elastostatica", V Cong. Latino-Americano de Mētodos Computacionais para Engenharia, vol. II, pp. 948-959, Salvador, BA, (1984).

(67) BARBOSA, H.J.C. e FEIJŌO, R.A., "Numerical algorithms for frictionless contact problems in linear elastostatics", 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering, pp. 6.53-6.63, Southampton, England, (1985).

(68) BARBOSA, H.J.C. e FEIJŌO, R.A., "Um algoritmo numērico para o problema de Signorini com atrito de Coulomb", VIII Cong. Brasileiro de Engenharia Mecānica, pp. 541-544, São Josē dos Campos, (1985).

(69) BARBOSA, H.J.C. e FEIJŌO, R.A., "Minimization algorithms for indentation problems with friction", 1st World

Congress on Computational Mechanics, Austin, TX, USA, (1986).

(70) BARBOSA, H.J.C. e FEIJÓO, R.A., "Análise dos componentes do fechamento de uma tubulação como um problema de contato unilateral", IV SIBRAT, Salvador, BA, (1986).

(71) GALEÃO, A.C.N.R.; GUERREIRO, J.N.C. e BARBOSA, H.J.C., "Um sistema automático para a análise estrutural de tubulações", III Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil e I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, vol. I, pp. 109-128, Porto Alegre, RS, (1979).

(72) TIMOSHENKO, S. e GOODIER, J.N., Teoria de la elasticidad, Ed. Ormo, Bilbao, (1968).

(73) PRASAD, S.N. e DASGUPTA, S., "Effect of sliding friction on contact stresses in a rectangle compressed by rigid planes", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, sept. 1975, pp. 656-662.

(74) FEIJÓO, R.A. e ZOUAIN, N. - "Statical and Kinematical Formulations for Rates and Increments in Plasticity", ITABRA/86, LNCC/CNPq, Rio de Janeiro, Agosto de 1986.

APÊNDICE

Visando a comodidade do leitor, sumariza-se neste apêndice alguns resultados utilizados no texto. Evidentemente, maiores detalhes devem ser buscados na literatura especializada.

A - Alguns Resultados em Análise

Considere-se um espaço de Banach real U com norma $\|\cdot\|$, um subconjunto convexo fechado não-vazio $K \subset U$ e um funcional F.

F é dito próprio se toma valores nos reais extendidos $\bar{\mathbb{R}}$, (conjunto dos reais mais os extremos $+\infty$ e $-\infty$) sem no entanto atingir o valor $-\infty$ e sem ser identicamente $+\infty$.

F é dito fracamente inferiormente semi-contínuo em K se, para toda seqüência $\{u_k\} \in K$ que converge fracamente para $u \in K$, tem-se

$$\liminf_{k\to\infty} F(u_k) \geq F(u)$$

Se isto ocorre para u_k que converge fortemente para $u \in K$, diz-se que F é inferiormente semi-contínuo.

A seqüência $\{u_k\}$ converge fortemente para $u \in K$ se

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \| = 0$$

e converge fracamente para $u \in K$ se

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) = f(u)$$

para todo funcional linear contínuo $f : K \to \mathbb{R}$.

O conjunto dos funcionais lineares e contínuos $f : U \to \mathbb{R}$ define o espaço dual (topológico) de U denotado aqui por U^*. U e U^* são colocados em dualidade através do funcional real bilinear denotado por

$$<\cdot, \cdot> : (U^* \times U) \to \mathbb{R}$$

Assim, para um funcional $f \in U^*$ pode-se escrever

$$f(u) = <f,u>$$

U^* torna-se um espaço linear normado com a norma

$$\| f \|_* = \sup_{u\neq 0} \frac{|f(u)|}{\| u \|} = \sup_{u\neq 0} \frac{|<f,u>|}{\| u \|}$$

Um espaço de Banach U é dito reflexivo se ele pode ser identificado com o seu bidual $(U^*)^*$.

Um funcional $F : K \to \mathbb{R}$ é diferenciável no sentido de Gâteaux, no ponto $u \in K$, se existe o funcional linear $DF(u) \in U^*$ tal que, para todo $v \in K$, tem-se

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(u + \alpha\, v) = <DF(u), v>$$

Teorema A1

Se o funcional $F : K \to \mathbb{R}$ é

(i) convexo

(ii) diferenciável no sentido de Gâteaux

então, F é fracamente inferiormente semi-contínuo.

Teorema A2 - (Weierstrass generalizado)

Seja F um funcional fracamente inferiormente semi-contínuo definido no conjunto convexo fechado não-vazio K do espaço de Banach reflexivo U. Então F é limitado inferiormente em K e atinge seu mínimo em K quando uma das duas condições seguintes vale

(i) K é limitado

(ii) F é coercivo

Teorema A3

Se $F : K \to \mathbb{R}$ é diferenciável no sentido de Gâteaux, então são equivalentes

(i) F é convexo

(ii) $\langle DF(u) - DF(v), u - v\rangle \geqq 0 \qquad \forall\, u, v \in K$

(iii) $F(v) - F(u) \geqq \langle DF(u), v - u\rangle \quad \forall\, u, v \in K$

Combinando-se os resultados anteriores tem-se o

Teorema A4

Se F é um funcional real, próprio, coercivo, convexo, diferenciável no sentido de Gâteaux, definido no subconjunto convexo, fechado, ilimitado do espaço de Banach reflexivo U, então F atinge seu mínimo em K. Além disso, se F é estritamente convexo, o elemento minimizante é único.

A caracterização do elemento minimizante de um funcional é abordada no teorema seguinte.

Teorema A5

Seja $F : K \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável no sentido de Gâteaux e K um subconjunto do espaço linear normado U. Se u é um minimizante de F em K, então ele pode ser caracterizado de uma das maneiras seguintes:

(i) Se K é convexo, fechado e não-vazio, então

$$\langle DF(u), v - u\rangle \geqq 0 \qquad \forall\, v \in K$$

(ii) Se K é convexo, fechado, não-vazio e u pertence ao interior de K, então

$$\langle DF(u), v\rangle = 0 \qquad \forall\, v \in K$$

(iii) Se K é um cone convexo, fechado, não-vazio e de vértice w, então

$$\langle DF(u), u - w\rangle = 0 \quad \text{e}$$

$$\langle DF(u), v - w\rangle \geqq 0 \qquad \forall\, v \in K$$

(iv) Se K é um subespaço linear transladado de w em relação à origem, então

$$\langle DF(u), v\rangle = 0 \qquad \forall\, v \text{ tal que } v - w \in K$$

(v) Se K é um subespaço linear de U, então

$$\langle DF(u), v\rangle = 0 \qquad \forall\, v \in K$$

Para os casos (ii) e (v) pode-se escrever alternativamente

$$DF(u) = 0$$

Outra situação de interesse é abordada no

Teorema A6

Seja o funcional próprio G da forma

$$G = F + \phi$$

onde F e ϕ são convexos e inferiormente semi-contínuos no conjunto convexo, fechado, não-vazio K e F é diferenciável no sentido de Gâteaux. Então, são equivalentes

(i) $G(u) = \inf\limits_{K} G(v)$

(ii) $\langle DF(u), v - u\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geqq 0 \qquad \forall\, v \in K$

(iii) $\langle DF(v), v - u\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0 \qquad \forall v \in K$

Enuncia-se a seguir os teoremas de Stampacchia e de Fichera. Para isto considere-se o espaço de Hilbert real H com produto interno e norma denotados, respectivamente, por $(\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|$. Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear contínua em H, isto é,

$$\exists\, c_1 : |a(u,v)| \leq c_1 \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u, v \in H$$

e ℓ um funcional linear contínuo em H.

Diz-se que a $(\cdot,\cdot)$ é coerciva se existe $c_2 > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq c_2 \|v\|^2 \qquad \forall v \in H$$

Tem-se então o

<u>Teorema A7</u> (Stampacchia)

A inequação variacional

$$u \in K : a(u, v - u) \geq \ell(v - u) \qquad \forall v \in K,$$

onde $K \subset H$ é um conjunto convexo fechado e a é coerciva, tem solução única para todo funcional linear contínuo ℓ.

Considere-se agora que a forma bilinear contínua $a(u,v)$ seja simétrica, isto é,

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u, v \in H$$

e não-negativa:

$$a(v,v) \geq 0 \qquad \forall\, v \in H$$

Neste caso, mostra-se a equivalência entre resolver o problema de minimizar em K o funcional

$$F(v) = \frac{1}{2}\, a(v,\, v) - \ell(v)$$

e resolver a inequação variacional

$$u \in K : a(u,\, v - u) \geq \ell(v - u) \qquad \forall\, v \in K$$

Antes de se passar aos resultados obtidos por Fichera várias considerações devem ser feitas.

Inicialmente, associa-se à forma bilinear contínua e simétrica a(u,v) o operador linear contínuo (único) $A : H \to H$ tal que

$$a(u,\, v) = (Au,\, v) \qquad \forall\, u,\, v \in H$$

Denota-se por N(A) o núcleo deste operador, ou seja,

$$N(A) \equiv \{v : Av = 0\}$$

que é um espaço linear e é também o núcleo da forma quadrática não-negativa a(v,v), isto é,

$$N(A) \equiv \{v : a(v,\, v) = 0\}$$

Seja Q o operador de projeção ortogonal de H sobre o núcleo de a(v,v), I o operador identidade e P = I - Q. Duas hipóteses serão assumidas aqui:

(I) Semi-coercividade:

$$a(v,\ v) \geqq c \,\|\, P\, v \,\|^2 \qquad \forall\, v \in H$$

onde $c > 0$ independe de v.

(II) O núcleo da forma quadrática a(v,v) tem dimensão finita.

Seja U um conjunto contido em H e com algum $u \neq 0$. Considere-se para qualquer $u \in U$, $u \neq 0$, o conjunto dos números não-negativos t tais que $t \,\|u\|^{-1} u$ pertença a U. Denota-se por p(u,U) o supremo deste conjunto, isto é,

$$p(u,\ U) = \sup \{t : u \in U,\ u \neq 0\ ,\ t \,\|u\|^{-1} u \in U\}$$

Para um operador $T : H \to H$ e um conjunto $U \subset H$, denota-se por T[U] a imagem de U sob T.

Define-se o núcleo do funcional ℓ, isto é,

$$N(\ell) \equiv \{v : \ell(v) = 0\}$$

Sejam

$$L = N(\ell) \cap N(A) \qquad e$$

$$N(A) = L \oplus L_1$$

onde $\oplus$ denota soma direta.

Sejam ainda $\tilde{Q}$ e Q_1 as projeções ortogonais de H sobre L e L_1, respectivamente, e $\tilde{P} = I - \tilde{Q}$.

Em relação a um ponto u_0 pertencente a um conjunto K, define-se o conjunto

$$K(u_0) \equiv \{v : v \in H,\ v + u_0 \in K\}$$

Neste contexto, tem-se

<u>Teorema A8</u> (Fichera)

O funcional $F(v)$ tem um mínimo absoluto em K se existe $u_0 \in K$ tal que

(i) $\ell(r) < 0$ para $r \in N(A) \cap K(u_0)$

$$p\,\{Q_1\, r,\ Q_1\,[N(A) \cap K(u_0)]\} = \infty$$

(ii) O conjunto $\tilde{P}[K(u_0)]$ é fechado em H.

<u>Teorema A9</u> (Fichera)

Se $F(v)$ tem um mínimo em K, então, para qualquer $u_0 \in K$ e qualquer $r \in N(A) \cap K(u_0)$ tal que $p(Q_1\, r,\ Q_1\,[N(A) \cap K(u_0)] = \infty$, deve-se ter $\ell(r) < 0$.

Teorema A10 (Fichera)

Se u minimiza F em K, Pu é determinado de maneira única por ℓ. Qualquer outro elemento u' que minimize F é dado por $u' = u + r$, onde $r \in N(A)$ é tal que

$$\ell(r) = 0 \quad e \quad u + r \in K$$

B - Convergência do Algoritmo de Uzawa

Com a notação do Capítulo V, considere-se o lagrangeano

$$L(u, \lambda) = \pi(u) + \lambda'(Au - b)$$

com

$$\pi(u) = \frac{1}{2} u' K u - u' f$$

e os conjuntos convexos fechados

$$\mathbf{K} = \{v \in \mathbf{R}^n : Av - b \leq 0\} \qquad e$$

$$\mathbf{R}^m_+ = \{v \in \mathbf{R}^m : v \geq 0\}$$

O algoritmo de Uzawa busca determinar o ponto de sela (u^*, λ^*) de $L(u,\lambda)$ em $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$, ou seja

$$L(u^*, \lambda) \leq L(u^*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*) \qquad \forall\, u \in \mathbf{R}^n, \ \forall\, \lambda \in \mathbf{R}^m_+$$

Com as hipóteses

(i) $\exists\ \alpha_1 > 0 \quad : \quad v'\,Kv \geq \alpha_1 \, \| v \|^2 \qquad \forall\ v \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\exists\ \alpha_2 \qquad : \quad \| Av \| \leq \alpha_2 \, \| v \| \qquad \forall\ v \in \mathbb{R}^m$

o algoritmo de Uzawa

1 - Escolha $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$

2 - Conhecido λ^k calcule u^k

$$K\, u^k = f - A'\,\lambda^k$$

3 - Com u^k faça

$$\lambda^{k+1} = [\lambda^k + \gamma(Au^k - b)]^+$$

4 - Repita 2 e 3 até obter convergência

converge para a solução (u^*,λ^*) desde que

$$0 < \gamma < 2\,\alpha_1/\alpha_2^2$$

<u>Demonstração</u>

Do algoritmo tem-se

$$(v - u^k)'\,(Ku^k - f + A'\,\lambda^k) = 0 \qquad \forall\ v \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Da condição

$$L(u^*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*) \qquad \forall\ u \in \mathbb{R}^n$$

segue-se

$$(v - u^*)' \, (Ku^* - f + A' \, \lambda^*) \geq 0 \qquad \forall \; v \in \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

Fazendo $v = u^*$ em (1), $v = u^k$ em (2) e combinando as duas expressões chega-se a

$$(u^k - u^*)' \, [K(u^* - u^k) + A' \, (\lambda^* - \lambda^k)] \geq 0$$

Introduzindo

$$e_k = u^k - u^* \quad \text{e} \quad r_k = \lambda^k - \lambda^*$$

tem-se

$$e_k' \, K \, e_k \leq - e_k \, A' \, r_k \qquad (3)$$

Tendo em vista (i), segue-se que

$$\alpha_1 \, \| e_k \|^2 \leq | r_k \, Ae_k | \leq \| r_k \|^2 \, \| Ae_k \|$$

e, usando (ii), tem-se

$$\| e_k \| \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \| r_k \| \qquad (4)$$

Por outro lado,

$$r_{k+1} = \lambda^{k+1} - \lambda^* = [\lambda^k + \gamma(Au^k - b)]^+ - \lambda^* =$$

$$= [\lambda^k + \gamma(Au^k - b)]^+ - [\lambda^* + \gamma(Au^* - b)]^+$$

e, assim,

$$\| r_{k+1} \| \leq \| r_k^{\circ} + \gamma A e_k \|$$

de onde segue-se que

$$\| r_{k+1} \|^2 \leqq \| r_k \|^2 + 2 \gamma r_k' A e_k + \gamma^2 \| A e_k \|^2$$

Usando (3) tem-se

$$\| r_{k+1} \|^2 \leqq \| r_k \|^2 - 2 \gamma e_k' K e_k + \gamma^2 \| A e_k \|^2$$

que, levando em conta (i) e (ii), passa a se escrever

$$\| r_{k+1} \|^2 \leq \| r_k \|^2 - (2 \alpha_1 \gamma - \alpha_2^2 \gamma^2) \| e_k \|^2$$

Escolhendo γ tal que

$$0 < \gamma < 2 \alpha_1 / \alpha_2^2$$

tem-se

$$2 \alpha_1 \gamma - \alpha_2^2 \gamma^2 \geqq \beta > 0$$

e, daí,

$$\| r_{k+1} \| \leq \| r_k \|$$

o que acarreta $\lambda^k \to \lambda^*$ quando $k \to \infty$.

Finalmente, de (4) segue-se que $u^k \to u^*$ quando $k \to \infty$.

C - Descrição do Algoritmo de Lemke

Considerando-se o problema de complementaridade linear

$$w - Mz = q$$

$$w \geq 0 \ , \ z \geq 0$$

$$w' \ z = 0$$

em $\mathbb{R}^p$, constroi-se o "tableau"

$$T = [\ I \ \vdots \ M \ \vdots \ 1 \ \vdots \ q\ ]$$

que expandido fica

$$\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & w_1 & w_2 & \cdots\cdots & w_p & z_1 & z_2 & \cdots\cdots & z_p & z_0 & \\
\hline
w_1 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & m_{11} & m_{12} & \cdots\cdots & m_{1p} & 1 & q_1 \\
w_2 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & m_{21} & m_{22} & \cdots\cdots & m_{2p} & 1 & q_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
w_p & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & m_{p1} & m_{p2} & \cdots\cdots & m_{pp} & 1 & q_p \\
\hline
\end{array}$$

O algoritmo de Lemke efetua uma seqüência de operações de pivoteamento sobre o "tableau" T e pode ser descrito como se segue:

INICIALIZAÇÃO

- **Se** $q \geqq 0$ **então**: $w \leftarrow q$

  $q \leftarrow 0$

  pare (solução trivial)

  senão: Encontre s : $- q_s = \min_i (- q_i)$

  Pivote na linha s e coluna z_0

  $y_s \leftarrow z_s$

ITERAÇÃO

d_s é a coluna de T correspondente à variável y_s

$\bar{q}$ é a última coluna de T atualizada

I - **Se** $d_s \leqq 0$ **então**: vá para IV

senão: determine o índice r tal que

$$\frac{\bar{q}_r}{d_{sr}} = \min_i \frac{\bar{q}_i}{d_{si}} : d_{si} > 0$$

Se a variável básica na linha r é z_0 **então**: vá para III

senão: vá para II

II - A variável y_s entra na base

Atualize T pivotando na linha r e coluna de y_s

Se a variável que saiu da base é w_k **então** $y_s \leftarrow z_k$

senão $y_s \leftarrow w_k$

Vá para I

III - A variável y_s entra na base

A variável z_0 sai da base

Pivote na linha de z_0 e coluna de y_s

Pare (terminação normal)

IV - **Pare** (terminação em raio)