

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos de aplicação das formulações e algoritmos de resolução discutidos em itens anteriores. Os algoritmos foram implementados em FORTRAN IV, compilados sem otimização e executados sob o Michigan Terminal System (MTS) no IBM/370-158 do Laboratório Nacional de Computação Científica do CNPq. Esses resultados foram publicados, em boa parte, nas referências de números 64 a 70.

6.2. EXEMPLO Nº 1

O primeiro exemplo envolve uma viga reta de seção constante e material homogêneo elástico linear que se encontra engastada na sua extremidade direita e apoiada em suportes unilaterais discretos conforme esquematizado na Figura 6.1.

A viga foi modelada por 8 elementos finitos (deslocamentos transversais interpolados por polinômios cúbicos de Hermite) de igual comprimento. Os apoios nos nós 3, 5, 7 e 9 são unilaterais e apresentam no caso dos nós 3 e 9, uma folga conforme indicado na Figura 6.1.

Quatro casos de carga foram considerados, cada um consistindo de uma força vertical concentrada P unitária aplicada respectivamente nos nós 2, 4, 6 e 8.

As condições de apoio mostradas na Figura 6.1 implicam que o deslocamento transversal w deve satisfazer a

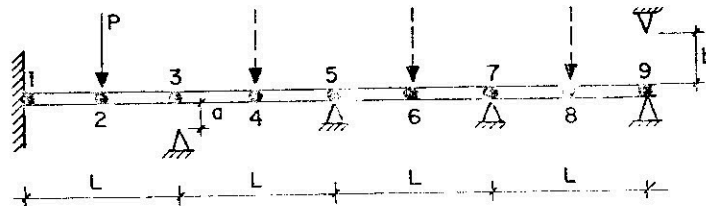
$$w(L) \geq -a$$

$$w(2L) \geq 0$$

$$w(3L) \geq 0$$

$$b \geq w(4L) \geq 0$$

o que acarretará, no problema discreto, um conjunto de restrições da forma $a \leq u < b$. Isto possibilita, como já visto, o uso do algoritmo GSRP.



$$L=4, \quad a=0.01, \quad b=0.2, \quad EI=100$$

Fig. 6.1

Para cada caso de carga a configuração deformada é mostrada na Figura 6.2 e as correspondentes reações de apoio são listadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1. Reações de Apoio no Exemplo nº 1

Reações	M ₁	R ₁	R ₃	R ₅	R ₇	R ₉
Caso 1	0.966	0.755	0.228	0.018	0.0	-0.001
Caso 2	0.141	0.012	0.453	0.565	0.0	-0.029
Caso 3	-0.138	-0.052	0.0	0.591	0.490	-0.030
Caso 4	-0.115	-0.029	0.0	0.0	0.587	0.442

Os resultados estão de acordo com a solução exata do problema e foram obtidos pela solução do problema primal com o algoritmo GSRP (alternativa (i)).

O critério de parada adotado foi

$$\max_i |u_i^k - u_i^{k+1}| / \max_i |u_i^k| < 0.0001$$

e a relação entre o número de iterações e o parâmetro de sobre-relaxação ω é mostrada na Figura 6.3 para cada caso de carga.

6.3. EXEMPLO Nº 2

O segundo exemplo é o de uma tubulação tridimensional, esquematizada na Figura 6.4, submetida a um acréscimo de temperatura de 800°F. A estrutura foi modelada com elementos finitos para tubulações (GALEÃO, GUERREIRO e BARBOSA (71)) e é engastada nos nós 1 e 8 e tem apoios unilaterais (com folga) nos nós 4 e 6 conforme esquematizado na Figura 6.4.

Como no exemplo anterior, o conjunto de restrições pode ser colocado na forma $a \leq u \leq b$ e assim, adotou-se o algoritmo GSRP na solução do problema primal. As reações de apoio estão listadas na Tabela 6.2 e correspondem a $\omega=1.85$ e a uma tolerância

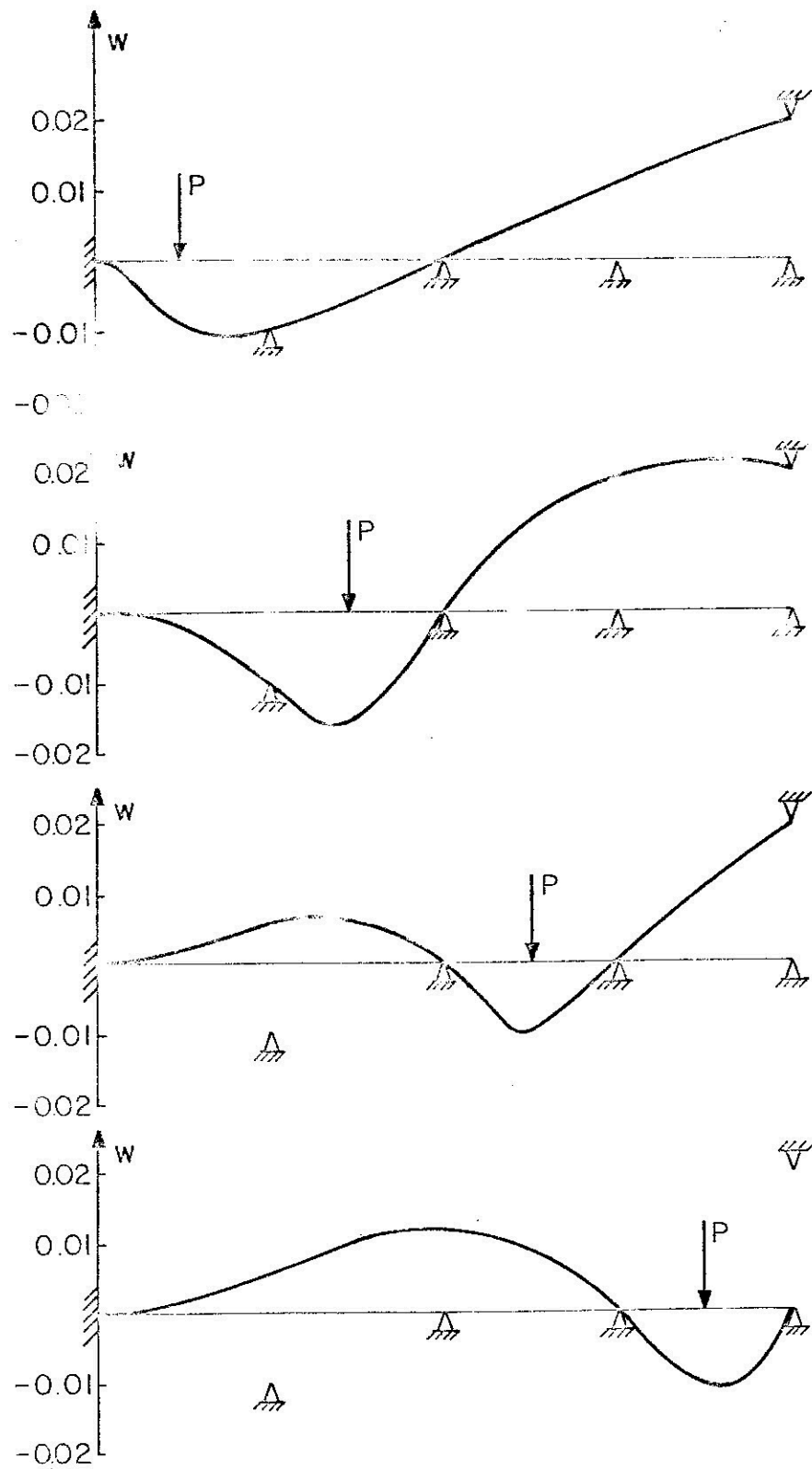


Figura 6.2. Deslocamentos da viga para os diferentes casos de carga

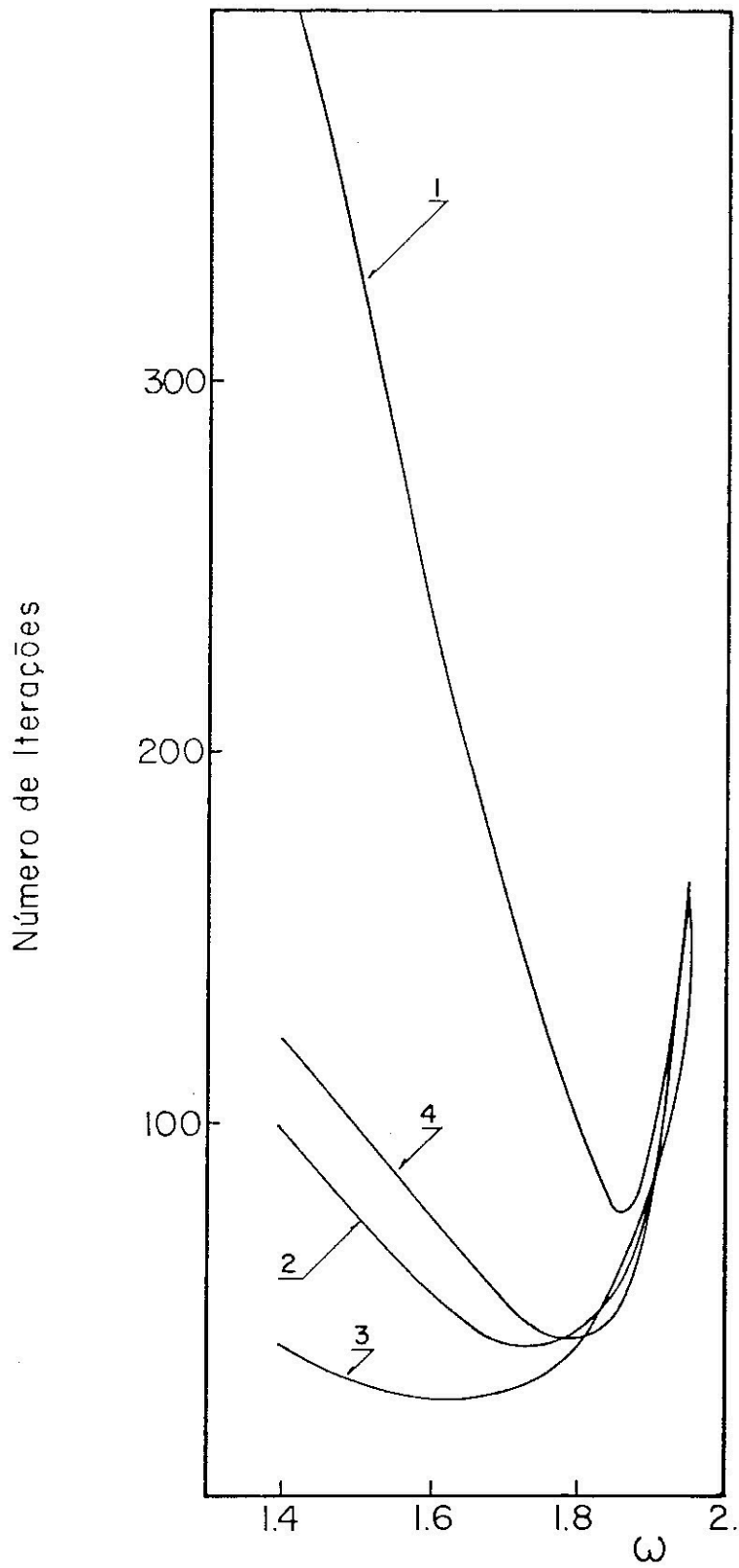


Figura 6.3. Número de iterações versus parâmetro de sobre-relaxação

$\epsilon = 0.00001$. O número de iterações realizadas foi de 197.

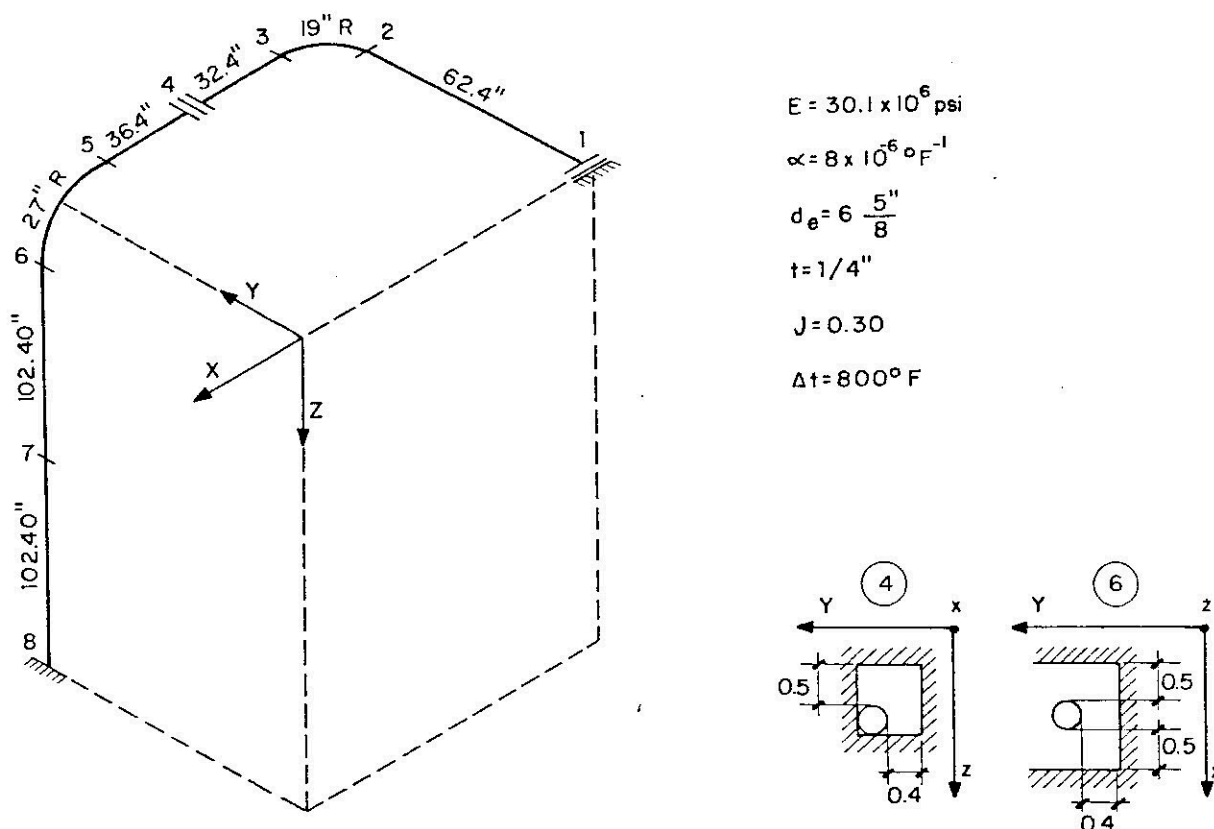


Figura 6.4. Exemplo nº 2

Tabela 6.2. Reações de Apoio no Exemplo nº 2

Nº	R_x	R_y	R_z	M_x	M_y	M_z
1	4036	4371	334	37648	- 34400	-117105
4	0	-5087	2218	0	0	0
6	-2329	0	0	0	0	0
8	-1704	715	-2552	82848	131289	27075

Mostra-se ainda, na Tabela 6.3, o número de iterações realizadas para diferentes valores do parâmetro de sobre-relaxação ω e da tolerância ϵ .

Tabela 6.3. Número de Iterações no Exemplo nº 2

$\omega \backslash \epsilon$	1.65	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95
10^{-4}	338	264	220	170	149	244
10^{-5}	392	296	239	197	180	336
10^{-7}	500	361	278	239	255	488

6.4. EXEMPLO Nº 3

O terceiro exemplo consiste num semi-cilindro circular longo apoiado sobre um suporte horizontal rígido e submetido a um carregamento vertical de compressão distribuído uniformemente como esquematizado na Figura 6.5.

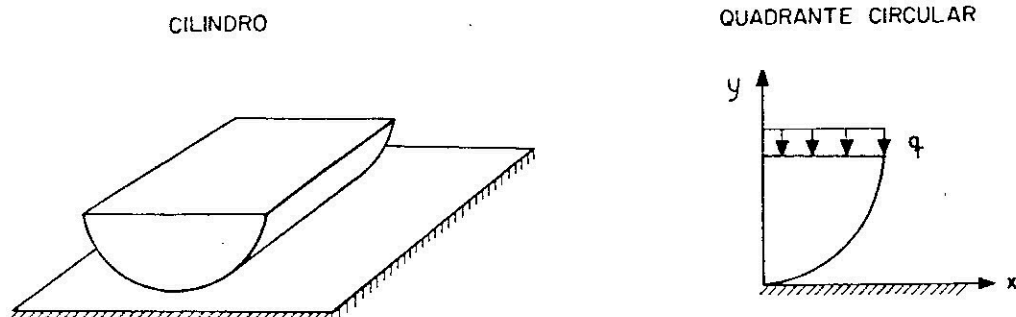


Figura 6.5. Exemplo nº 3

O cilindro tem raio $R=8$ e é de material homogêneo isotrópico elástico linear com módulo de Young $E=1000$ e coeficiente de Poisson $\nu=0.3$. O atrito é desprezado, assume-se um estado plano de deformações e quatro casos de carga são considerados correspondentes a cargas distribuídas de valor $q=3.75, 6.25, 12.5$ e 30 .

A malha adotada é mostrada na Figura 6.6a e consiste em

136 elementos finitos isoparamétricos bilineares de 4 nós dando origem a um modelo discreto com 304 graus de liberdade.

A fim de efetuar uma comparação entre diferentes alternativas, a condição de não-interpenetração $v \cdot n - s \leq 0$ foi tomada substituindo o vetor normal unitário exterior ao corpo, n , pelo normal unitário interior ao suporte horizontal. Isto acarreta, no modelo discreto, restrições da forma $u \leq a$ e, assim, várias alternativas podem ser adotadas e comparadas.

Na Figura 6.6b tensões de contato normalizadas são mostradas juntamente com a solução clássica de Hertz (vide TIMOSHENKO e GOODIER (72)). As tensões foram calculadas como a média de tensões nos nós de elementos adjacentes obtidas resolvendo-se o problema dual pelo algoritmo de Lemke.

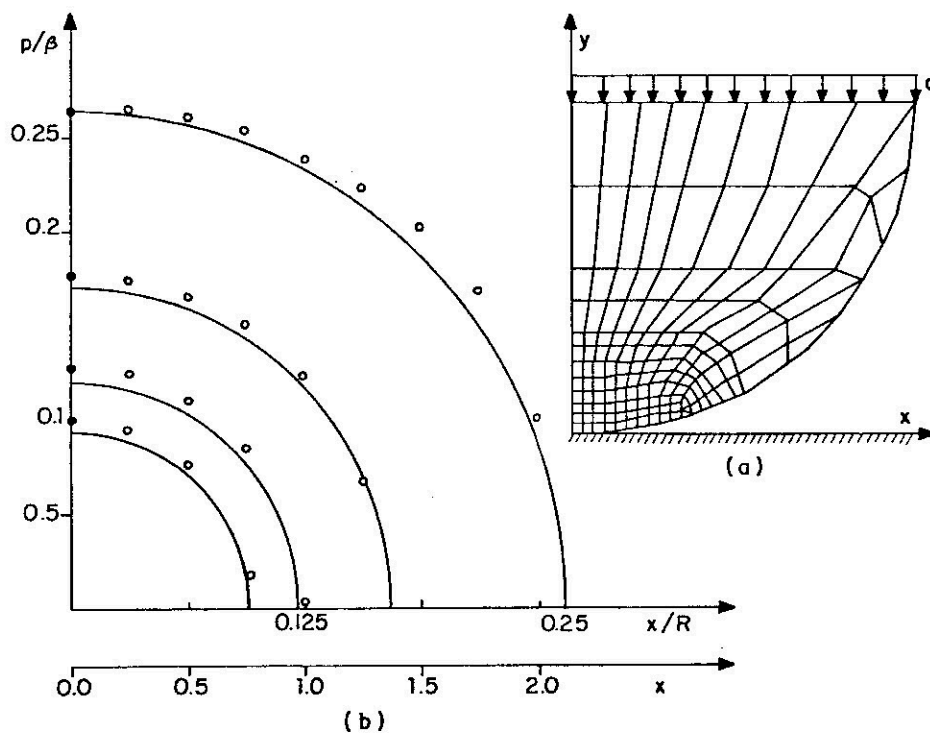


Figura 6.6. Malha adotada e tensões de contato

Resultados similares foram obtidos resolvendo-se o problema dual via GSRP com $\epsilon=0.001$. O número de iterações requerido é mostrado na Tabela 6.4.

Tabela 6.4. Número de Iterações necessárias para Solução do Problema Dual via GSRP

ω	Caso de Carregamento			
	1	2	3	4
0.6	17	19	20	24
0.8	12	16	19	26
1.0	12	15	20	30
1.2	12	16	23	39
1.4	15	22	32	56

A solução do problema primal via GSRP com $\omega=1.8$ e $\epsilon=0.0001$ acarretou, para os quatro casos de carga, 275, 266, 307 e 321 iterações respectivamente.

A Tabela 6.5 mostra o número de iterações necessárias na solução do problema primal reduzido (alternativa (ii)) via GSRP com $\epsilon=0.001$.

Tabela 6.5. Número de Iterações necessárias para a Solução do Problema Primal reduzido via GSRP

ω	Caso de Carregamento			
	1	2	3	4
1.2	37	33	28	20
1.4	25	23	19	13
1.6	16	16	16	15
1.8	29	30	31	31

Valores típicos do tempo de processamento, em segundos, para o conjunto dos quatro casos de carga foram

- . 34s para a solução do problema dual pelo algoritmo de Lemke ou via GSRP
- . 47s para a solução do problema primal reduzido via GSRP
- . 573s para a solução do problema primal via GSRP

O algoritmo de Uzawa foi também aplicado a este exemplo e com $\epsilon=0.0001$ convergiu com 129, 119, 109 e 109 iterações para os quatro casos de carga considerados. O tempo de processamento foi cerca de cinco vezes o tempo correspondente à solução do problema dual pelo algoritmo de Lemke.

6.5. EXEMPLO Nº 4

O quarto exemplo é o de uma placa circular de raio $R=60$ e espessura constante $h=4$ apoiada sobre uma fundação horizontal rígida e sem atrito. O material da placa tem peso específico $\rho=0.8085$ e constantes elásticas $E=2.1 \times 10^6$ e $\nu=0.3$. A placa está submetida ao peso próprio e a uma força vertical $P=100$ distribuída uniformemente num disco de raio $r=8$ concêntrico com a placa.

O modelo discreto adotado corresponde a uma malha uniforme de 120 elementos isoparamétricos bilineares de 4 nós, axissimétricos, (Figura 6.7) resultando em 304 graus de liberdade.

De acordo com a teoria de flexão de placas (TIMOSHENKO e GOODIER (72)) a região que perde contato com a superfície rígida corresponde a um círculo de raio $a=44$ e a deflexão no centro vale $u_c=1.337 \times 10^{-4}$.

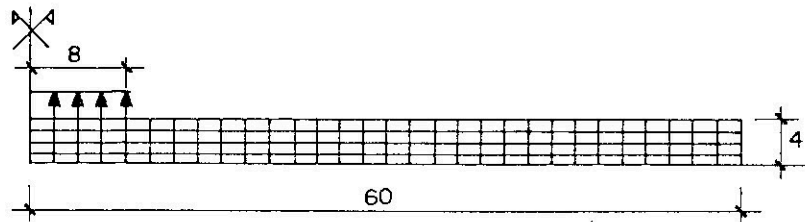


Figura 6.7. Exemplo nº 4

Para o modelo de sólido axissimétrico adotado aqui os valores encontrados foram $a=42$ (os primeiros 21 nós a partir do centro se separam da superfície) e $u_c = 1.347 \times 10^{-4}$ correspondentes à solução do problema dual pelo algoritmo de Lemke, alternativa (vi).

Essencialmente os mesmos resultados foram obtidos resolvendo-se o problema dual pelo algoritmo GSRP (alternativa (vii)) tomando-se $\epsilon=0.0001$. A Tabela 6.6 procura dar uma idéia da distribuição do tempo de CPU (em segundos) gasto em algumas etapas da solução do problema.

Tabela 6.6. Tempos de CPU para o Problema Dual

ETAPAS	LEMKE	GSRP		
		$\omega=0.8$	$\omega=1.0$	$\omega=1.2$
.Até a decomposição da matriz de rigidez	8.2	7.3	7.1	7.3
.Montagem e resolução do problema dual	9.3	25.7	23.6	25.1
.(nº de iterações em GSRP ou de pivoteamentos em Lemke)	(39)	(899)	(795)	(861)
.Cálculo de deslocamentos e tensões	3.4	2.9	2.9	2.9
.Total prob. bilateral	11.6	10.2	10.0	10.2
.Total prob. unilateral	20.9	35.9	33.6	35.3

Na Tabela 6.6 o tempo total para o problema bilateral cor

responde à soma do tempo gasto até a decomposição da matriz de rigidez com o tempo utilizado no cálculo de deslocamentos e tensões e busca dar uma idéia do tempo total de CPU para um problema de mesmo porte porém sem restrições unilaterais.

Os tempos de CPU apresentados são fornecidos por subrotinas do sistema operacional e podem sofrer flutuações (vide 1ª linha da Tabela 6.6 para o algoritmo GSRP). Além disso, há pequenas diferenças entre os programas correspondentes a algoritmos diferentes o que acarreta diferentes tempos de CPU para uma "mesma" etapa, como na 1ª linha da Tabela 6.6.

A solução do problema primal via GSRP com $\omega=1.95$ e $\epsilon=0.0001$ convergiu com 1203 iterações, fornecendo, $u_c=1.276 \times 10^{-4}$ e resultados pobres para as reações de apoio. O tempo total de CPU foi de 260 segundos.

Considerando-se o problema primal reduzido, o uso do algoritmo GSRP com $\epsilon=0.0001$ leva a resultados bem próximos daqueles obtidos na alternativa (vi) e, na Tabela 6.7, a distribuição do tempo de CPU (em segundos) utilizado em algumas etapas da solução são apresentados para alguns valores do parâmetro de sobrerelaxação ω .

Tabela 6.7. Tempos de CPU para o Problema Primal Reduzido

ETAPAS	GSRP			
	$\omega=1.6$	$\omega=1.8$	$\omega=1.9$	$\omega=1.95$
.Montagem da matriz de rigidez	3.1	3.1	3.2	3.2
.Condensação	14.5	14.4	14.5	14.4
.Algoritmo GSRP (nº de iterações)	13.9 (605)	7.2 (318)	4.4 (191)	7.8 (338)
Total	43.6	36.7	34.2	37.3

Dificuldades surgiram entretanto na aplicação do algoritmo de Uzawa a este problema. De início, a escolha automática adotada para o parâmetro γ deste algoritmo

$$\gamma = 0.05 \times \min_i K_{ii}$$

que funcionou bem no exemplo anterior, não funcionou aqui e várias tentativas foram feitas antes de se conseguir que o critério de parada, com $\epsilon=0.0001$, fosse satisfeito.

Dois exemplos de aplicação do algoritmo de Uzawa neste problema são resumidos na Tabela 6.8. Os multiplicadores de Lagrange obtidos, entretanto, não concordaram muito bem com aqueles dados pelo algoritmo de Lemke.

Tabela 6.8. Algoritmo de Uzawa

γ	nº de iterações	$u_c \times 10^{-4}$	tempo de processamento
12000	1123	1.358	211
8000	1747	1.357	313

6.6. EXEMPLO Nº 5

O quinto exemplo está esquematizado na Figura 6.8 e consiste na indentação de um bloco retangular por um sólido rígido cuja superfície de contato tem seção transversal circular de raio $R=8$. O atrito não foi levado em conta e assumiu-se um estado plano de deformações. O bloco é de material elástico linear isotrópico com módulo de Young $E=1000$ e coeficiente de Poisson $\nu=0.3$. As forças aplicadas ao sólido rígido tem resultante P e momento

nulo.

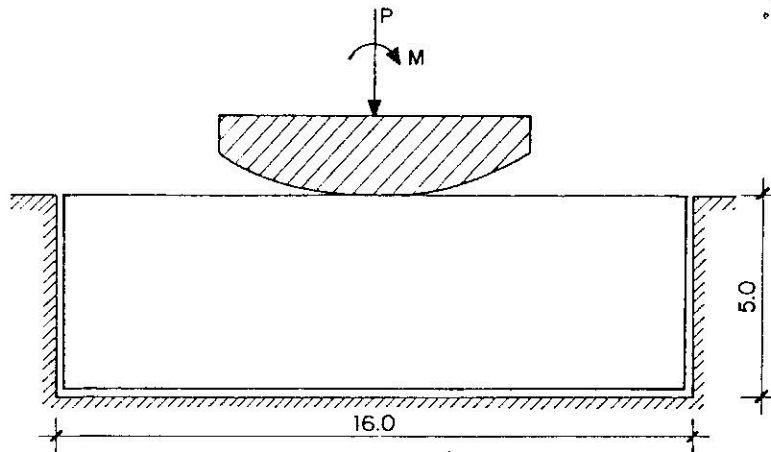


Figura 6.8. Exemplo nº 5

Dada a simetria do problema, apenas metade do bloco foi discretizada. Utilizou-se 202 elementos finitos isoparamétricos de 4 nós o que deu origem a um modelo discreto com $440+1$ graus de liberdade.

O giro e o deslocamento horizontal foram prescritos como nulos e cinco casos foram analisados correspondendo à prescrição da profundidade de indentação $\alpha=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 .

A Figura 6.9 apresenta a malha adotada antes e depois da deformação (no caso, $\alpha=0.8$) enquanto a Figura 6.10 mostra a curva que relaciona a força aplicada P com a profundidade de indentação α .

Finalmente, a Figura 6.11 apresenta a pressão de contato normalizada calculada a partir dos multiplicadores de Lagrange. As curvas correspondem à solução clássica de Hertz e os pontos correspondem à solução numérica que é obtida em 200 segundos de CPU no IBM/370-158.

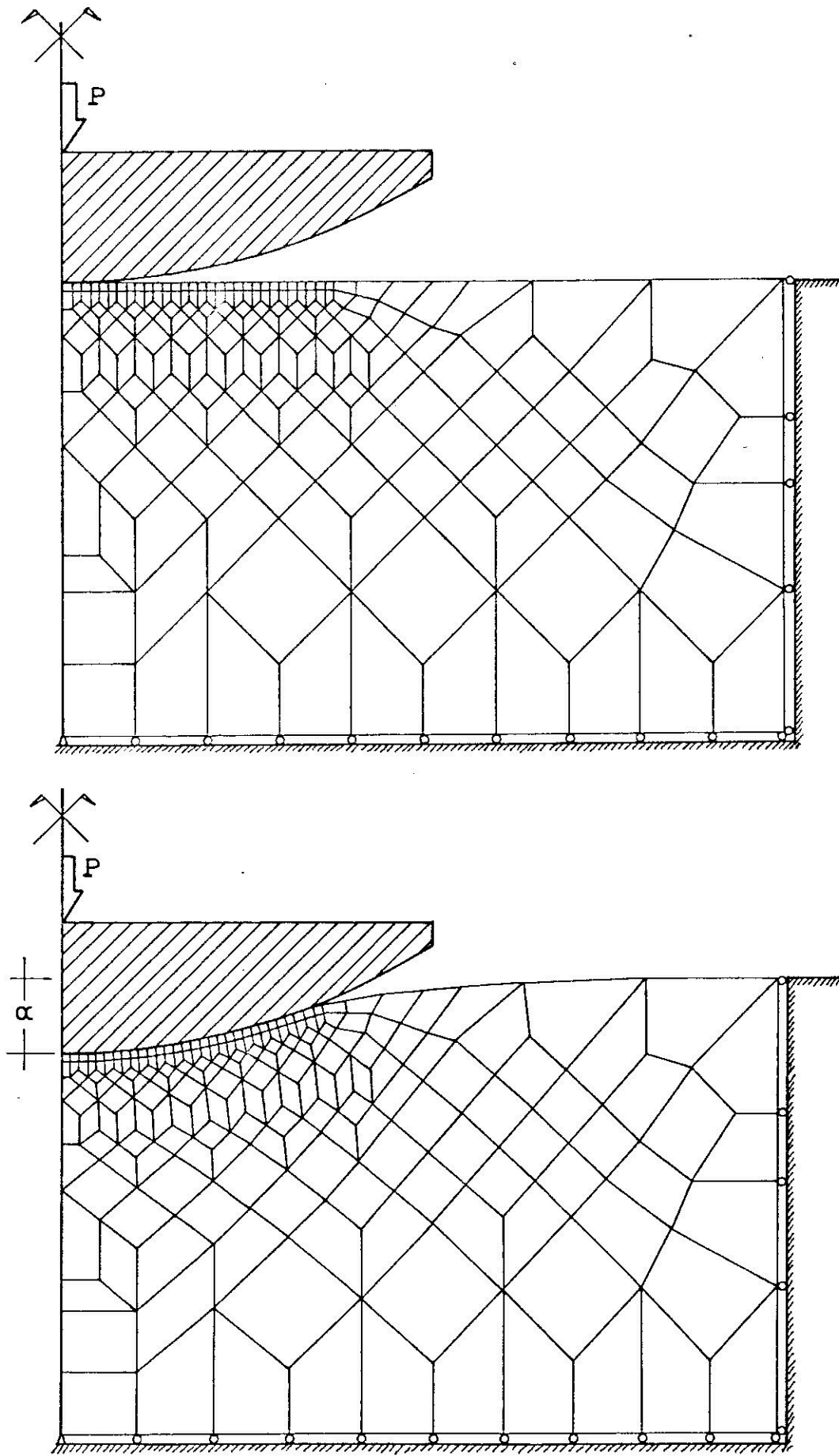


Figura 6.9. Malha adotada e deformação para $\alpha=0.8$

Este exemplo apareceu em BARBOSA e FEIJÓO (66) onde a alternativa (v), solução do problema primal reduzido via algoritmo de Lemke é apresentada.

É importante notar que, posteriormente, este mesmo exemplo foi resolvido através da alternativa (viii): solução do problema dual (que envolve restrições de igualdade) pelo algoritmo de Lemke. Os resultados obtidos foram idênticos e o tempo de CPU foi de 63 segundos o que representa menos de 1/3 do tempo requerido na alternativa (v).

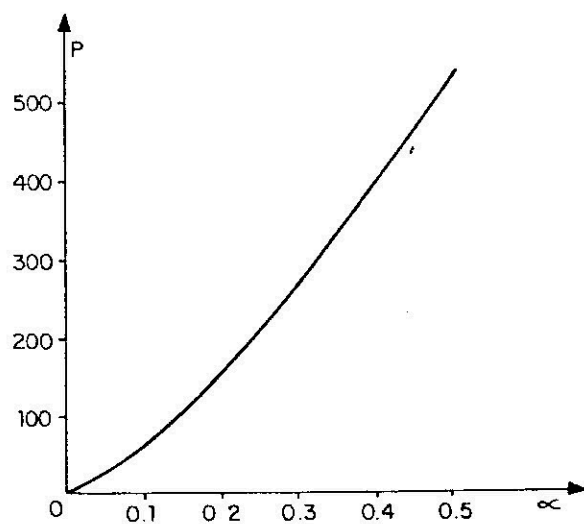


Figura 6.10. Relação P versus α

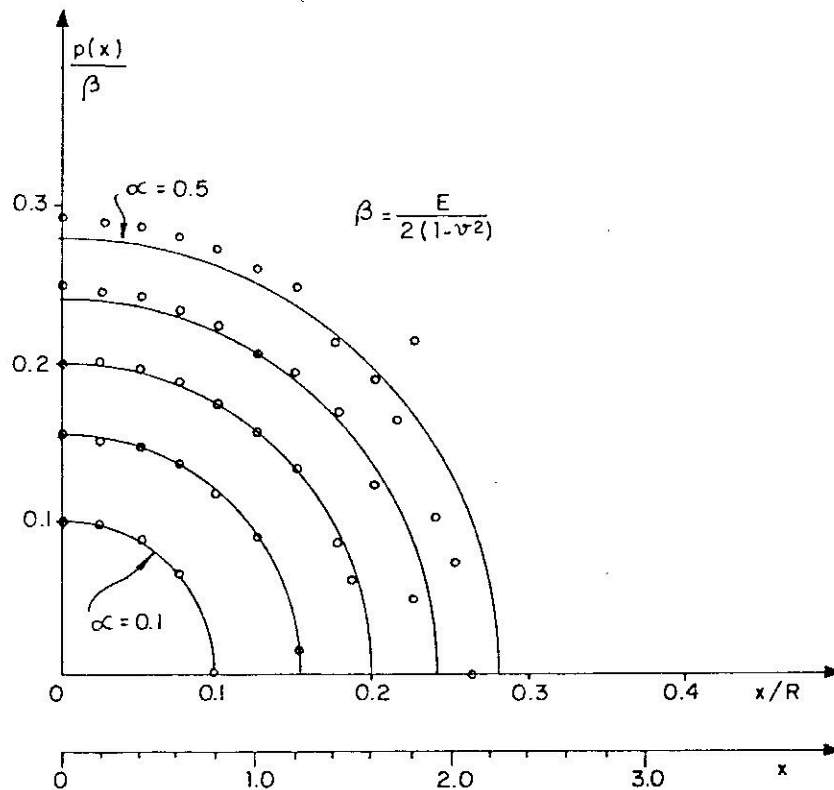


Figura 6.11. Tensões de contato

6.7. EXEMPLO Nº 6

Neste exemplo considera-se um bloco retangular de material homogêneo isotrópico elástico linear com módulo de Young $E=13000$ e coeficiente de Poisson $\nu=0.2$. O bloco se encontra sobre uma superfície rígida horizontal na qual forças de atrito são consideradas de acordo com a lei de Coulomb. Assume-se um estado plano de deformações e um carregamento de compressão uniformemente distribuído conforme indicado na Figura 6.12.

Devido a simetria do problema, apenas metade do bloco é discretizada através de 194 elementos finitos isoparamétricos bilineares de 4 nós (Figura 6.13) dando origem a um modelo discre-

to com 439 graus de liberdade.

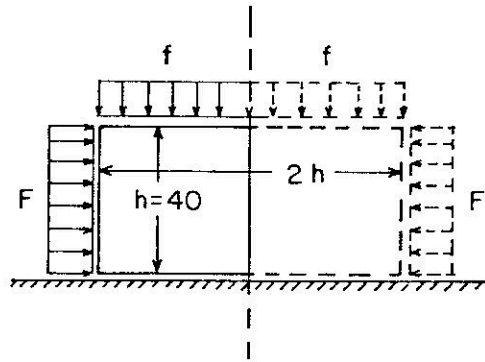


Figura 6.12. Exemplo nº 6

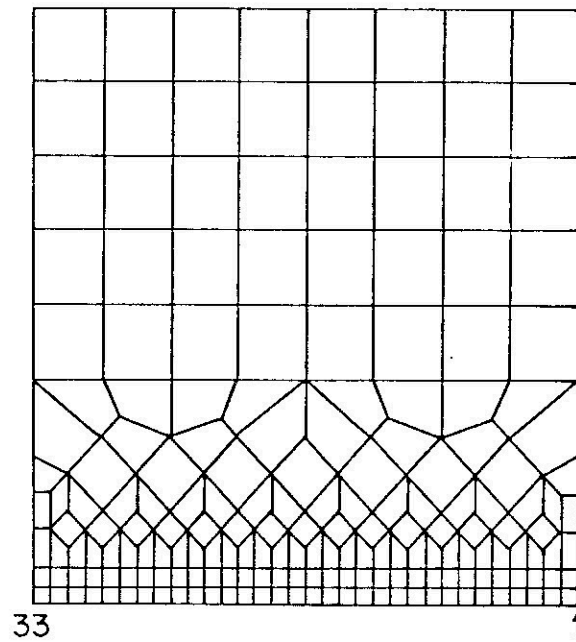


Figura 6.13. Malha adotada

Considera-se inicialmente o caso de carga correspondente a $F=15$ e $f=5$ e tomando-se um coeficiente de atrito $\eta=1.0$. A Figura 6.14 apresenta a malha deformada (deslocamentos ampliados 100 vezes). Os deslocamentos e reações nodais na superfície de contato estão listados na Tabela 6.9 onde pode-se identificar facilmente três regiões de comportamento distinto: uma região de adesão (nº 1 ao nº 9), uma região de deslizamento (nº 10 ao nº 30) e uma região em que o bloco perde contato com a superfície rígida (nº 31 ao nº 33).

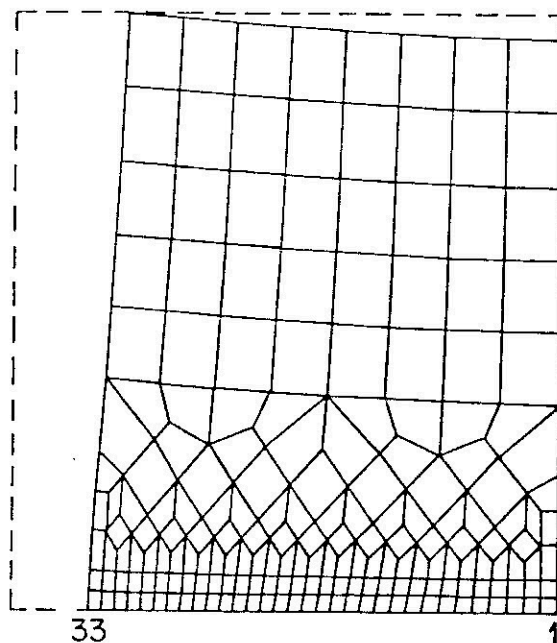


Figura 6.14. Deformada para $F=15$, $f=5$ e $\eta=1.0$

Um segundo caso de carga, correspondente a $F=10$, $f=15$ e $\eta=0.2$, foi analisado e a malha deformada é apresentada na Figura 6.15.

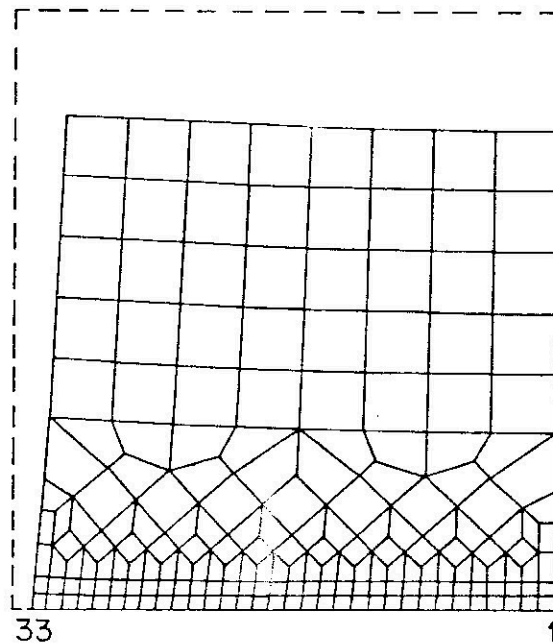


Figura 6.15. Deformada para $F=10$, $f=15$ e $\eta=0.2$

A Tabela 6.10 apresenta o deslocamento tangencial e as reações nodais na superfície de contato identificando-se uma região de adesão (nó 1 ao nó 14) e uma região de deslizamento (nó 15 ao nó 33).

Mais três casos de carga foram considerados, correspondentes a

$$F = 10 \quad , \quad f = 5 \quad \text{e} \quad \eta = 1.0 \quad ,$$

$$F = 10 \quad , \quad f = 5 \quad \text{e} \quad \eta = 0.2 \quad ,$$

$$F = 10 \quad , \quad f = 25 \quad \text{e} \quad \eta = 0.2 \quad ,$$

e as malhas deformadas são mostradas nas Figuras 6.16, 6.17, 6.18, respectivamente.

Tabela 6.9. Deslocamentos e Reações Nodais ($F=15$, $f=5$ e $\eta=1.0$)

N \bar{O}	u_n	u_t	F_n	F_t
1	0.	0.	5.23	0.
2	0.	0.	10.47	0.64
3	0.	0.	10.47	1.28
4	0.	0.	10.46	1.96
5	0.	0.	10.44	2.69
6	0.	0.	10.41	3.52
7	0.	0.	10.38	4.48
8	0.	0.	10.31	5.75
9	0.	0.	9.80	8.57
10	0.	0.0003	8.93	8.93
11	0.	0.0009	8.28	8.28
12	0.	0.0016	7.86	7.86
13	0.	0.0025	7.52	7.52
14	0.	0.0034	7.21	7.21
15	0.	0.0043	6.93	6.93
16	0.	0.0054	6.66	6.66
17	0.	0.0065	6.39	6.39
18	0.	0.0076	6.13	6.13
19	0.	0.0088	5.86	5.86
20	0.	0.0101	5.59	5.59
21	0.	0.0113	5.30	5.30
22	0.	0.0127	5.00	5.00
23	0.	0.0140	4.68	4.68
24	0.	0.0154	4.34	4.34
25	0.	0.0169	3.96	3.96
26	0.	0.0183	3.53	3.53
27	0.	0.0198	3.04	3.03
28	0.	0.0213	2.46	2.46
29	0.	0.0229	1.72	1.72
30	0.	0.0244	0.66	0.66
31	0.0001	0.0258	0.	0.
32	0.0003	0.0272	0.	0.
33	0.0006	0.0286	0.	0.

Tabela 6.10. Deslocamentos e Reações Nodais ($F=10, f=15$ e $\eta=0.2$)

Nº	u_t	F_n	F_t
1	0.	10.40	0.
2	0.	20.80	0.17
3	0.	20.80	0.34
4	0.	20.79	0.52
5	0.	20.77	0.70
6	0.	20.76	0.88
7	0.	20.74	1.08
8	0.	20.71	1.28
9	0.	20.68	1.50
10	0.	20.65	1.73
11	0.	20.61	1.99
12	0.	20.57	2.30
13	0.	20.52	2.66
14	0.	20.42	3.23
15	0.00003	20.17	4.03
16	0.00016	19.86	3.97
17	0.00036	19.63	3.93
18	0.00060	19.43	3.89
19	0.00088	19.24	3.85
20	0.00119	19.04	3.81
21	0.00153	18.84	3.77
22	0.00189	18.63	3.73
23	0.00228	18.40	3.68
24	0.00270	18.15	3.63
25	0.00314	17.86	3.57
26	0.00360	17.53	3.51
27	0.00409	17.14	3.43
28	0.00461	16.65	3.33
29	0.00515	16.03	3.21
30	0.00572	15.17	3.03
31	0.00633	13.88	2.78
32	0.00699	11.50	2.30
33	0.00776	3.64	0.73

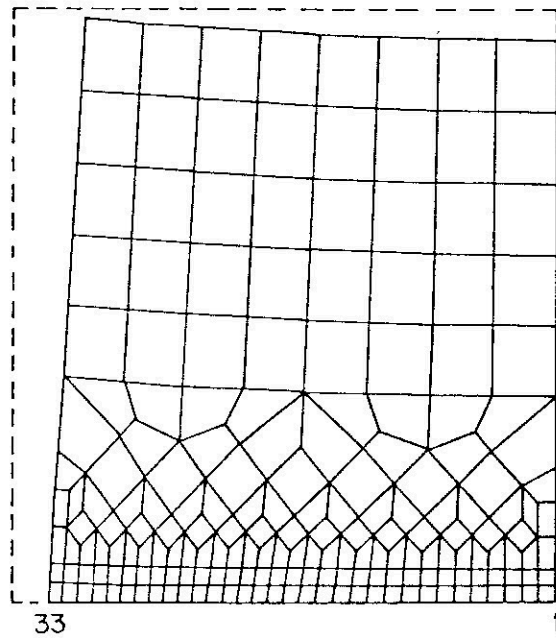


Figura 6.16. Deformada para $F=10$, $f=5$ e $\eta=1.0$

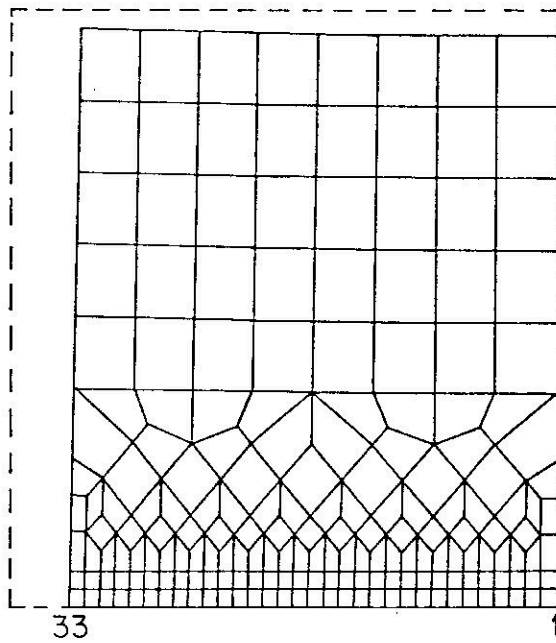


Figura 6.17. Deformada para $F=10$, $f=5$ e $\eta=0.2$

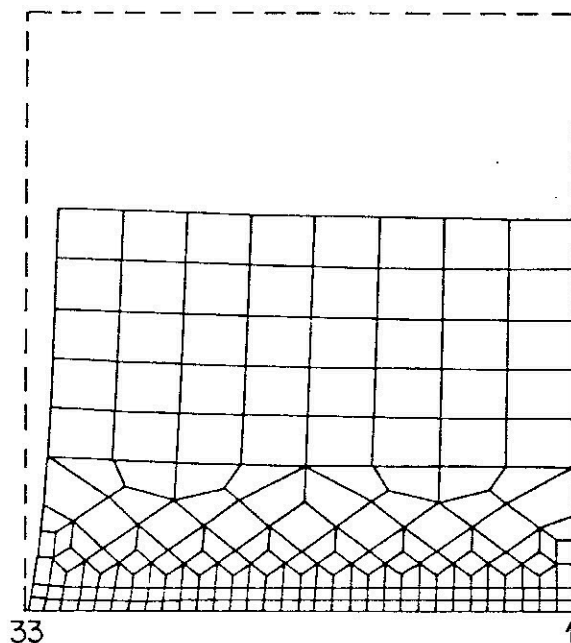


Figura 6.18. Deformada para $F=10$, $f=25$ e $\eta=0.2$

As regiões de separação, deslizamento e adesão para estes três últimos casos de carga são dadas na Tabela 6.11.

F	f	η	Separação	Deslizamento	Adesão
10	5	1.0	n̄o 31 ao n̄o 33	n̄o 16 ao n̄o 30	n̄o 1 ao n̄o 15
10	5	0.2	-	n̄o 2 ao n̄o 33	-
10	25	0.2	-	n̄o 31 ao n̄o 33	n̄o 1 ao n̄o 30

Os resultados aqui mostrados (que correspondem a multiplicadores de Lagrange concentrados nos n̄os) concordam com aqueles obtidos utilizando-se o algoritmo de RAOUS (62).

Para a solução dos sub-problemas P_1 e P_2 do processo iterativo adotou-se o algoritmo GSRP com $\omega=1$ e $\epsilon=0.0001$. Os tempos

de CPU, em segundos, para os casos de carga analisados aqui são mostrados nas Tabelas 6.12 e 6.13.

Tabela 6.12. Tempo de CPU para $\eta=1.0$
(GSRP com $\omega=1.0$ e $\epsilon=0.0001$)

Etapas	Tempo de CPU
Até a decomposição da matriz de rigidez	21
Montagem dos problemas duais	34
1º Caso de Carga: $F=10$ e $f=5$	44
2º Caso de Carga: $F=15$ e $f=5$	42
Total	141

Tabela 6.13. Tempo de CPU para $\eta=0.2$
(GSRP com $\omega=1.0$ e $\epsilon=0.0001$)

Etapas	Tempo de CPU
Até a decomposição da matriz de rigidez	21
Montagem dos problemas duais	34
1º Caso de Carga: $F=10$ e $f=5$	24
2º Caso de Carga: $F=10$ e $f=15$	52
3º Caso de Carga: $F=10$ e $f=25$	79
Total	210

6.8. EXEMPLO Nº 7

Considera-se agora o problema axissimétrico de indentação rígida esquematizado na Figura 6.19 que apresenta também a malha de elementos finitos utilizada. O modelo discreto resultante tem $170+1$ graus de liberdade.

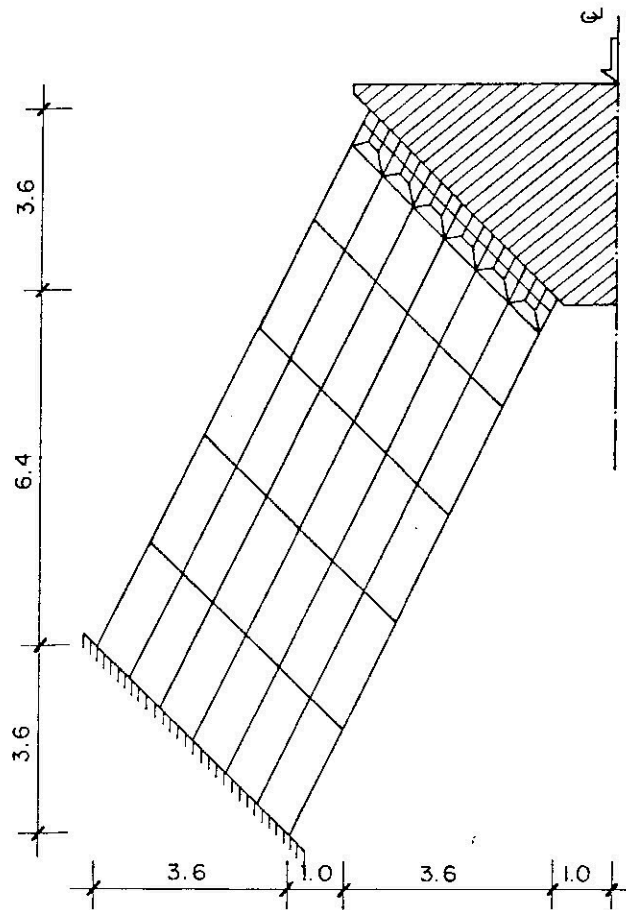


Figura 6.19. Exemplo nº 7

O material foi tomado com módulo de Young $E=1000$ e coeficiente de Poisson $\nu=0.3$. A carga aplicada ao sólido rígido é $P=100$.

As Figuras 6.20, 6.21 e 6.22 apresentam as deformadas (ampliadas 100 vezes) para os casos sem atrito, com coeficiente de atrito $\eta=0.3$ e $\eta=0.7$, respectivamente.

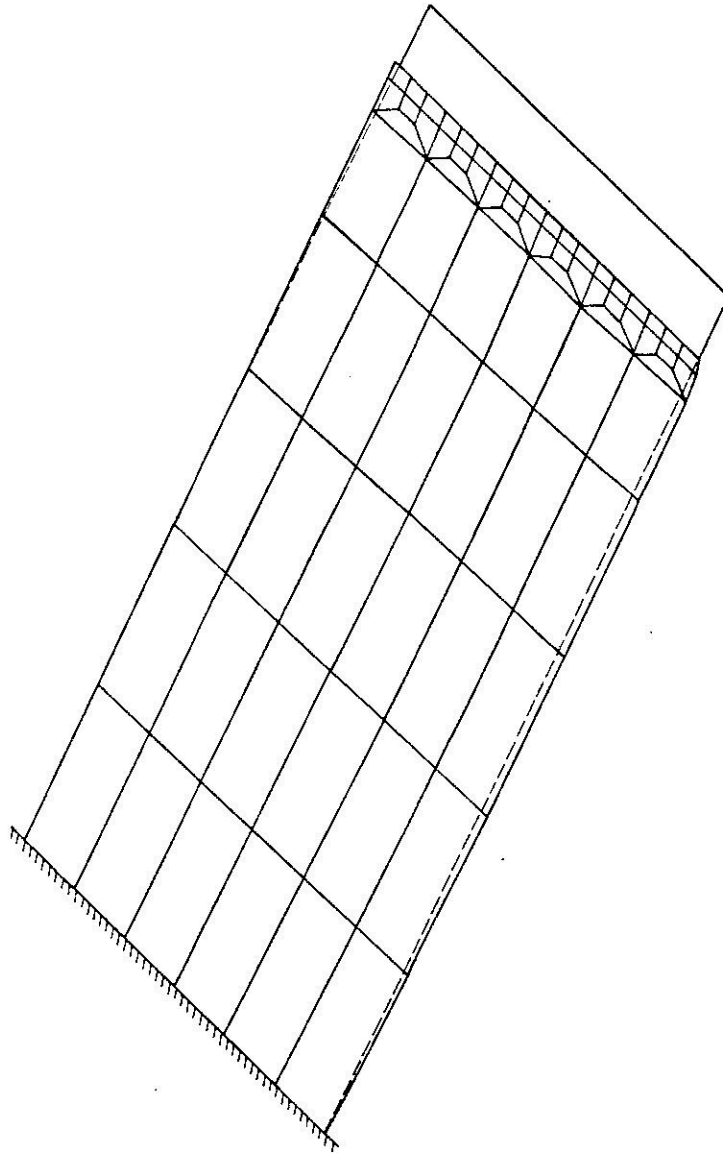


Figura 6.20. Deformada para $\eta=0$

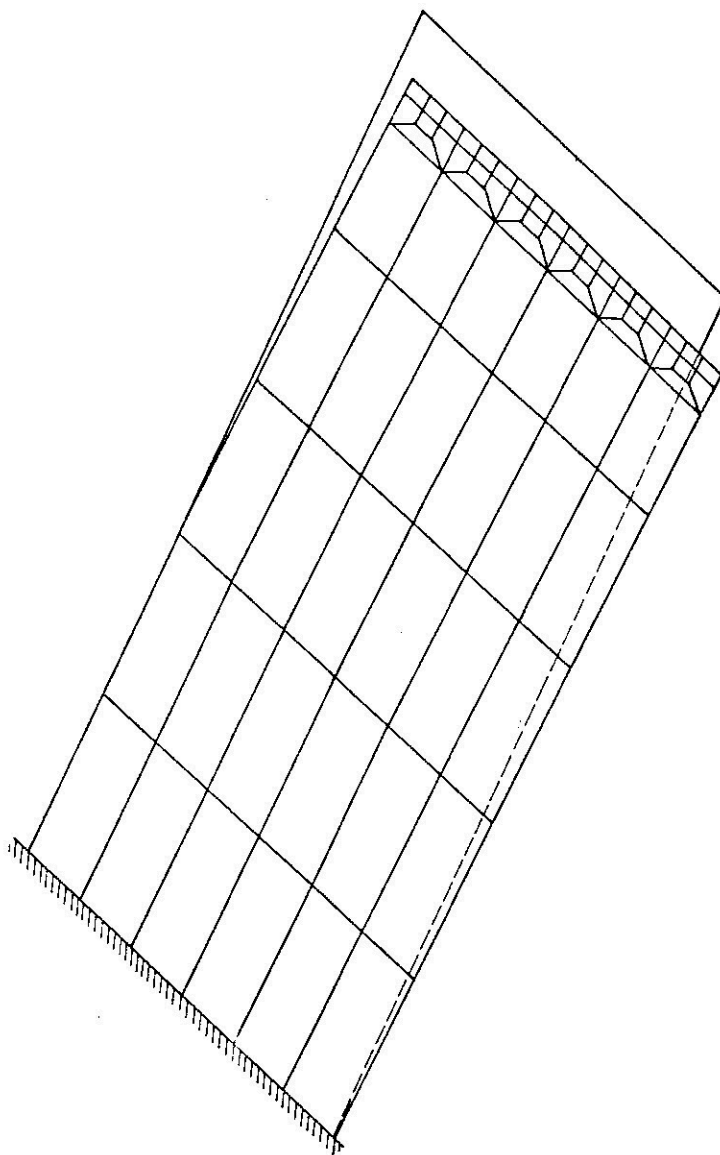


Figura 6.21. Deformada para $\eta=0.3$

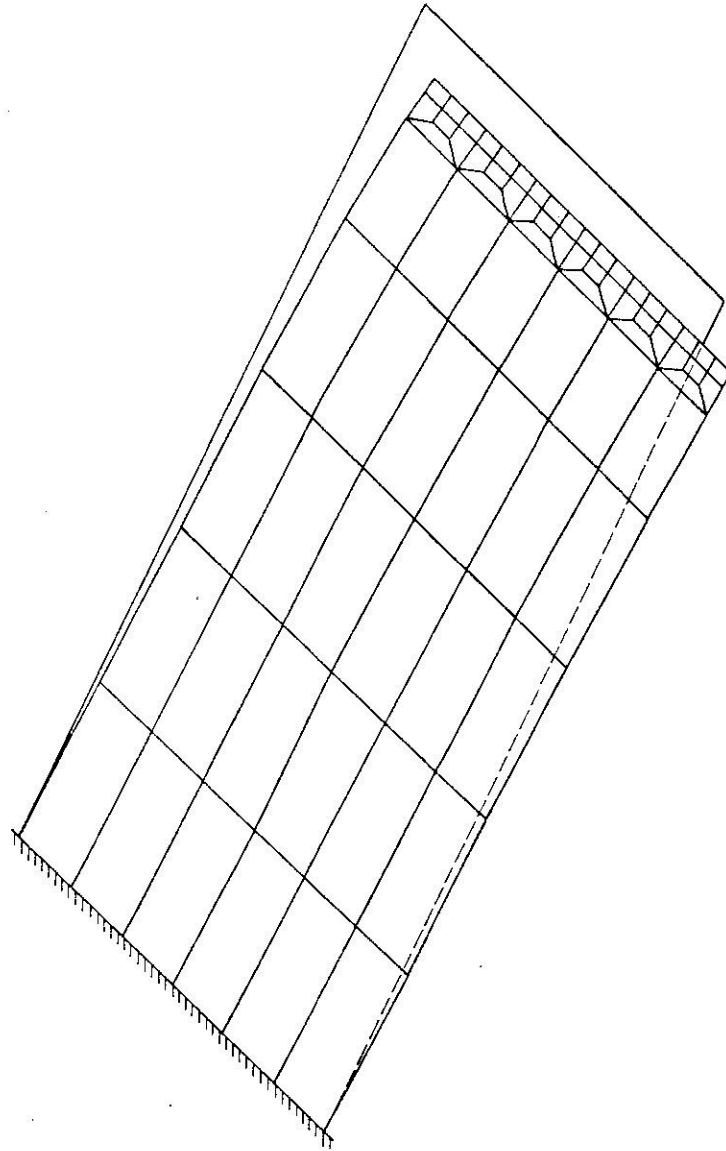


Figura 6.22. Deformada para $\eta=0.7$

Para o caso de $\eta=0.7$ todos os nós da superfície de contato estão em adesão com o sólido rígido enquanto que para o caso de $\eta=0.3$ há movimento tangencial relativo em todos os nós.

Finalmente, na Figura 6.23, apresenta-se a variao do deslocamento vertical α do sólido rígido e dos deslocamentos vertical v e radial r do nó mais interior da superfície de contato.

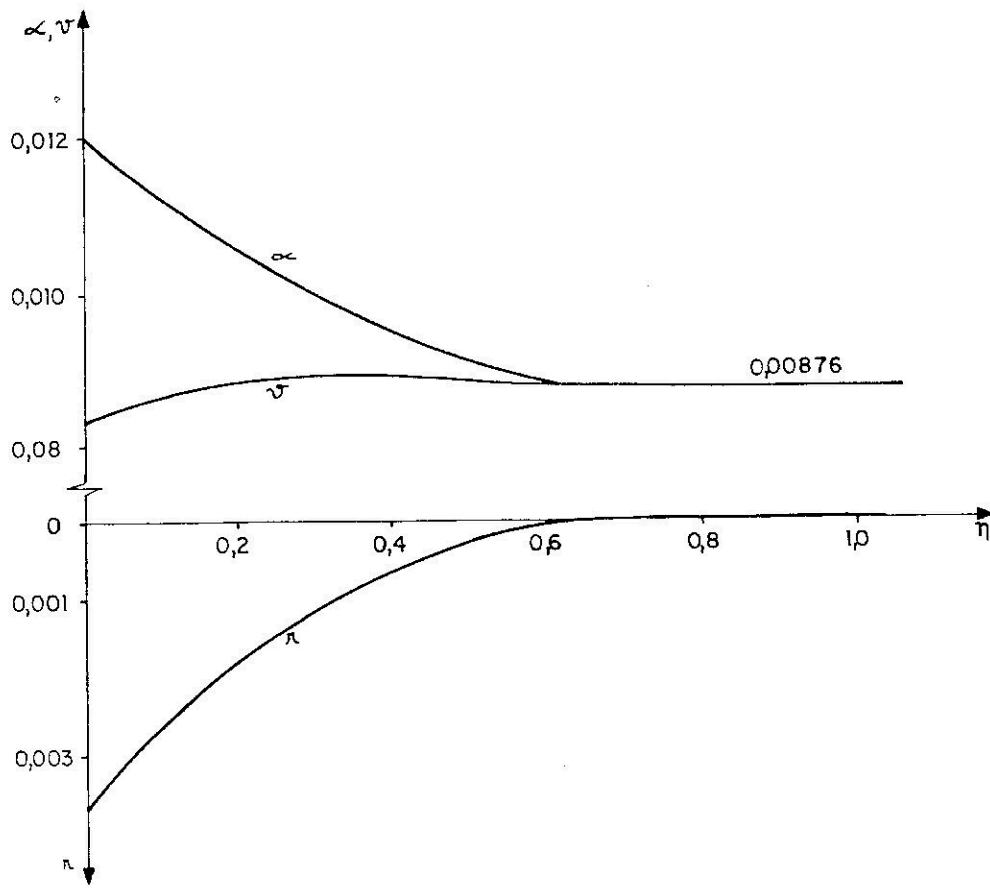


Figura 6.23 - Variação de α , v e r com η

6.9. EXEMPLO Nº 8

Analisá-se aqui um bloco de seção quadrada comprimido por duas superfícies planas rígidas nas quais forças de atrito são consideradas de acordo com a lei de Coulomb. O material do bloco é assumido homogêneo isotrópico elástico linear e o problema é tratado como estado plano de deformações. Dada a simetria existente, apenas um quarto do bloco foi discretizado (vide Figura 6.24) adotando-se uma malha de elementos finitos idêntica (a menos de um fator de escala) à empregada no exemplo nº 6. O modelo

discreto resultante possui $432+1$ graus de liberdade.

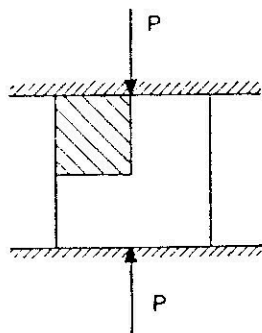


Figura 6.24. Exemplo nº 8

Este problema foi formulado por PRASAD e DASGUPTA (73) de maneira a recair em duas equações integrais que são então resolvidas numericamente. Estes autores mostram que o problema é governado essencialmente pelos coeficientes de atrito η e de Poisson ν que determinam a extensão relativa da porção central das faces do bloco que permanece em adesão com as superfícies rígidas. Observa-se ainda que a distribuição das regiões em que há adesão ou escorregamento não varia com o valor da carga aplicada P .

Assim sendo, alguns experimentos numéricos foram feitos para diferentes valores dos coeficientes de atrito e de Poisson com o intuito de efetuar uma comparação com os resultados obtidos por PRASAD e DASGUPTA (73).

O problema foi tratado como uma indentação rígida e, na Figura 6.25, mostra-se a deformada para os casos de $\eta=0$ e $\eta=0.35$.

Nas Figuras 6.26 e 6.27 mostra-se a variação, respectivamente, da pressão de contato e da tensão cisalhante (normalizadas), ao longo da abscissa relativa z para alguns valores dos

coeficientes de Poisson e de atrito. Os resultados obtidos com o algoritmo descrito no Capítulo 5 são indicados por pontos e as linhas correspondem às publicadas no trabalho de PRASAD e DASGUPTA (73).

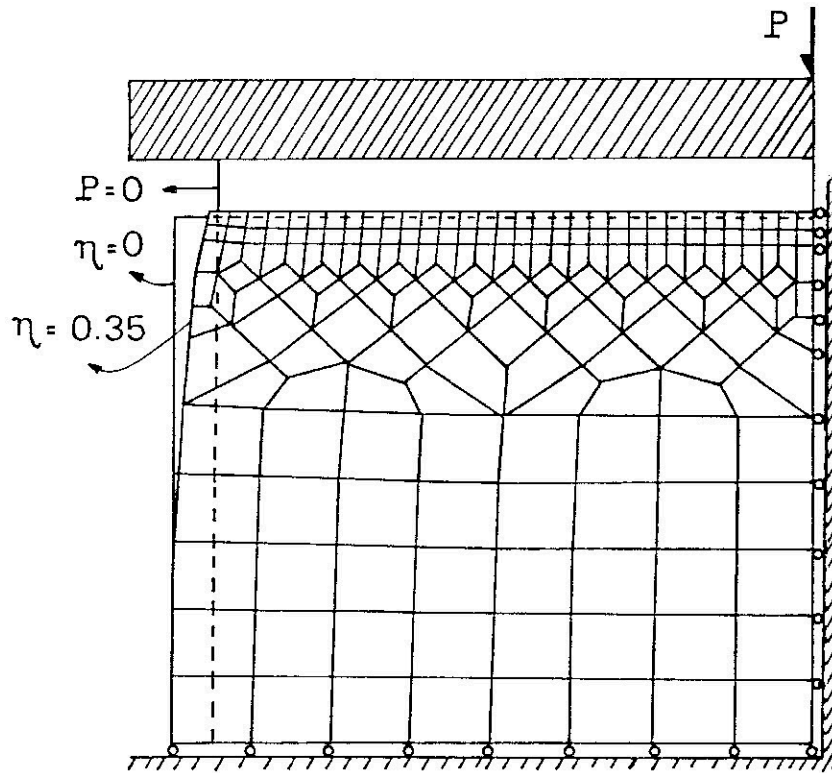


Figura 6.25 - Deformada para $\eta = 0$ e $\eta = 0.35$

Finalmente, na Figura 6.28, mostra-se a razão entre as tensões de contato normal e tangencial ao longo da abscissa z para diferentes valores dos coeficientes de Poisson e de atrito.

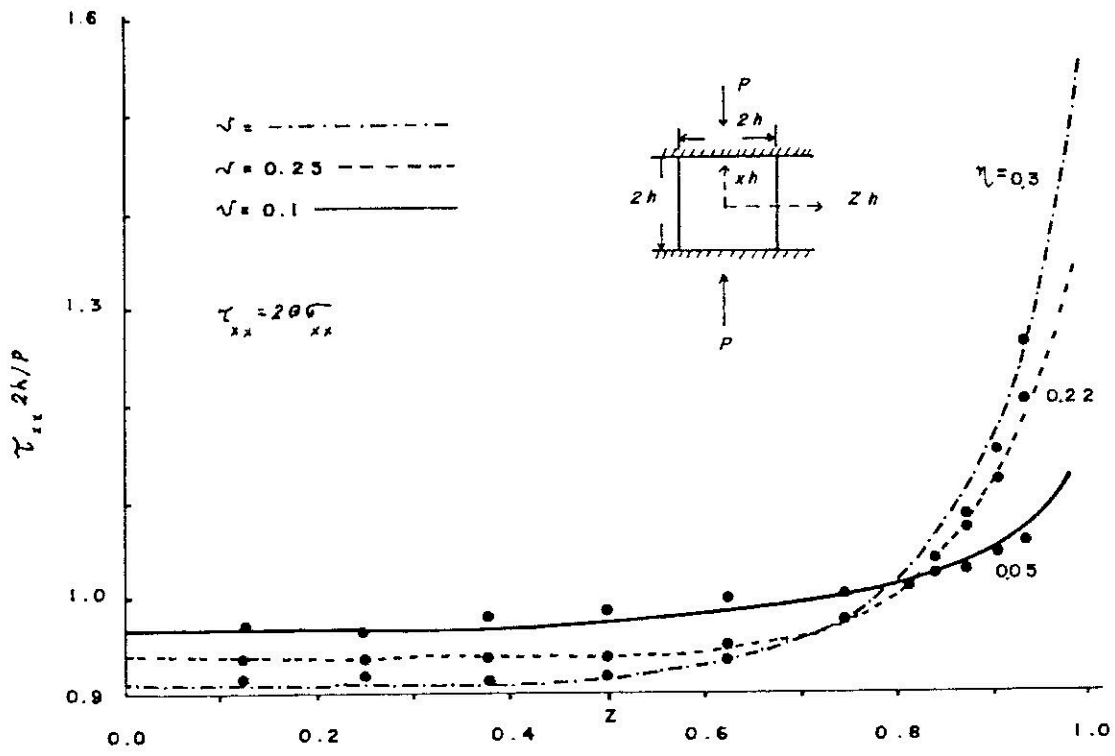


Figura 6.26. Pressão de contato

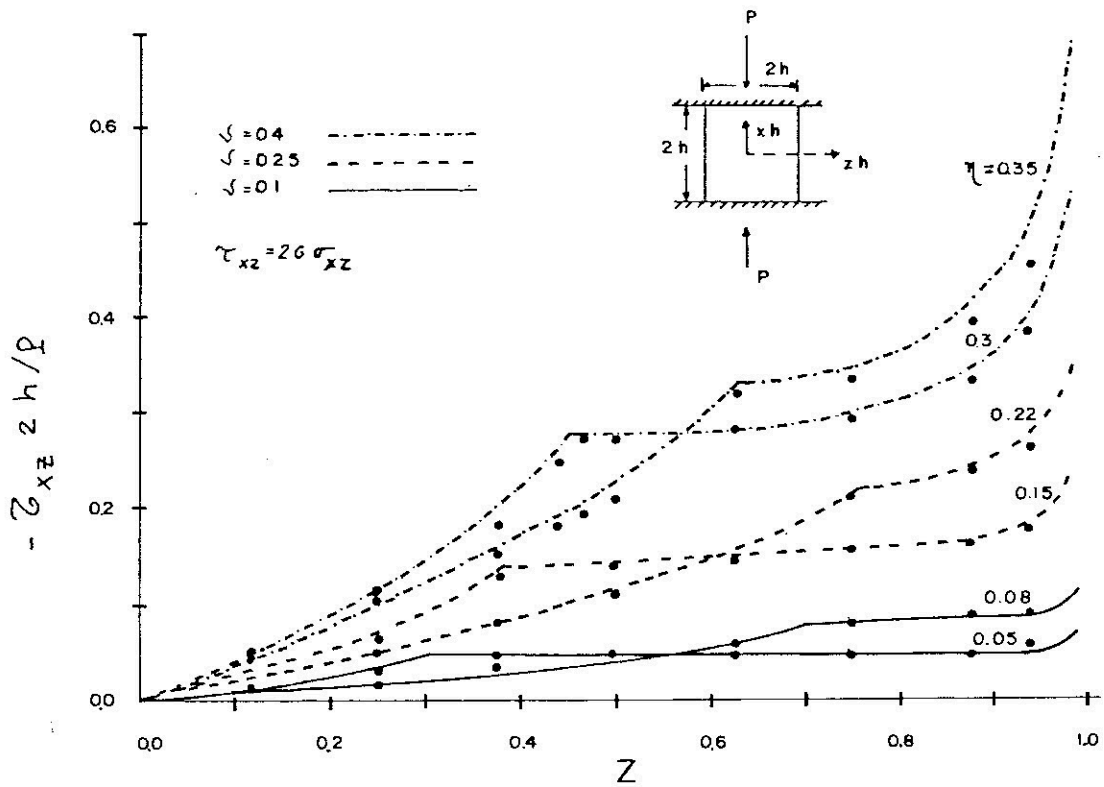


Figura 6.27. Tensão cisalhante

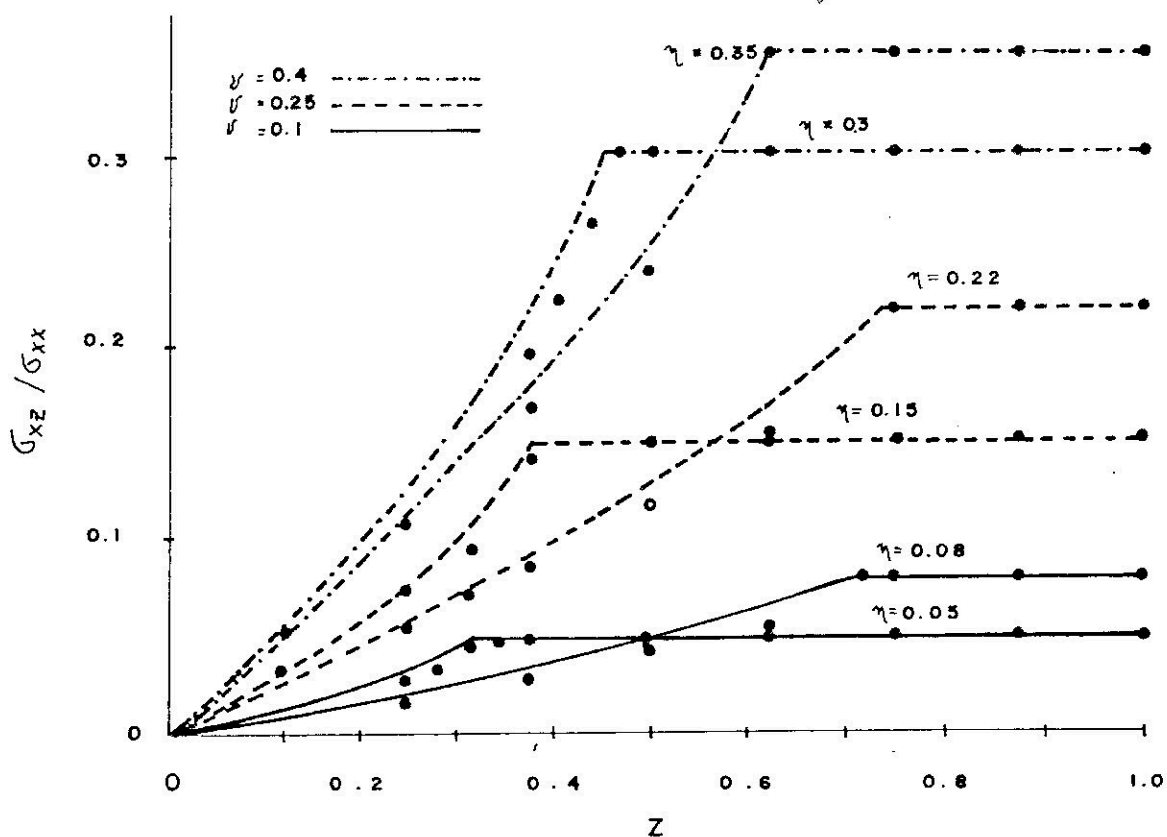


Figura 6.28. Razão entre a tensão cisalhante e a tensão normal na superfície de contato

Para resolução dos problemas de programação quadrática que surgem na sequência de sub-problemas $P_1 P_2 P_1 \dots$ (vide item 5.4.3) adotou-se o algoritmo de Lemke para P_1 e o algoritmo GSRP com $\omega=1$ e $\epsilon=0.0001$ para P_2 .

Os tempos de CPU para alguns dos casos analisados aqui são apresentados na Tabela 6.14.

Tabela 6.14. Tempo de CPU para o Exemplo nº 8

Etapas	$\eta=0$	$\nu=0.1$ $\eta=0.08$	$\nu=0.25$ $\eta=0.22$	$\nu=0.4$ $\eta=0.35$
.Até a decomposição da matriz de rigidez	19.1	19.7	20.1	20.0
.Montagem e resolução do(s) sub-problema(s)	19.0	61.5	60.3	55.7
.Cálculo de deslocamentos e tensões	4.7	4.6	5.0	4.6
Total	42.8	85.8	85.4	80.3

6.10. EXEMPLO Nº 9

Como último exemplo considera-se a análise do fechamento de uma tubulação do tipo esquematizado na Figura 6.29.

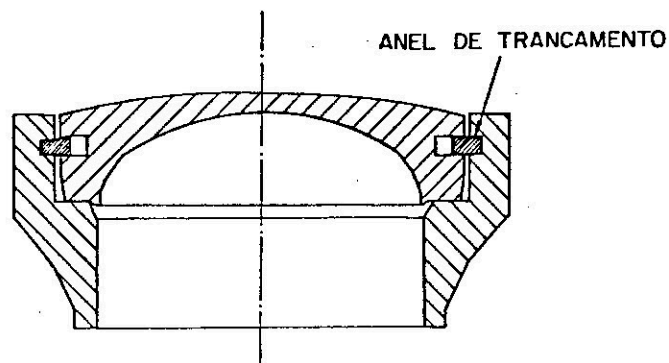


Figura 6.29. Esquema do fechamento de uma tubulação

Visando facilitar a geração da malha de elementos finitos adotou-se uma geometria simplificada como mostrado na Figura 6.30. O modelo discreto resultante tem 569 graus de liberdade.

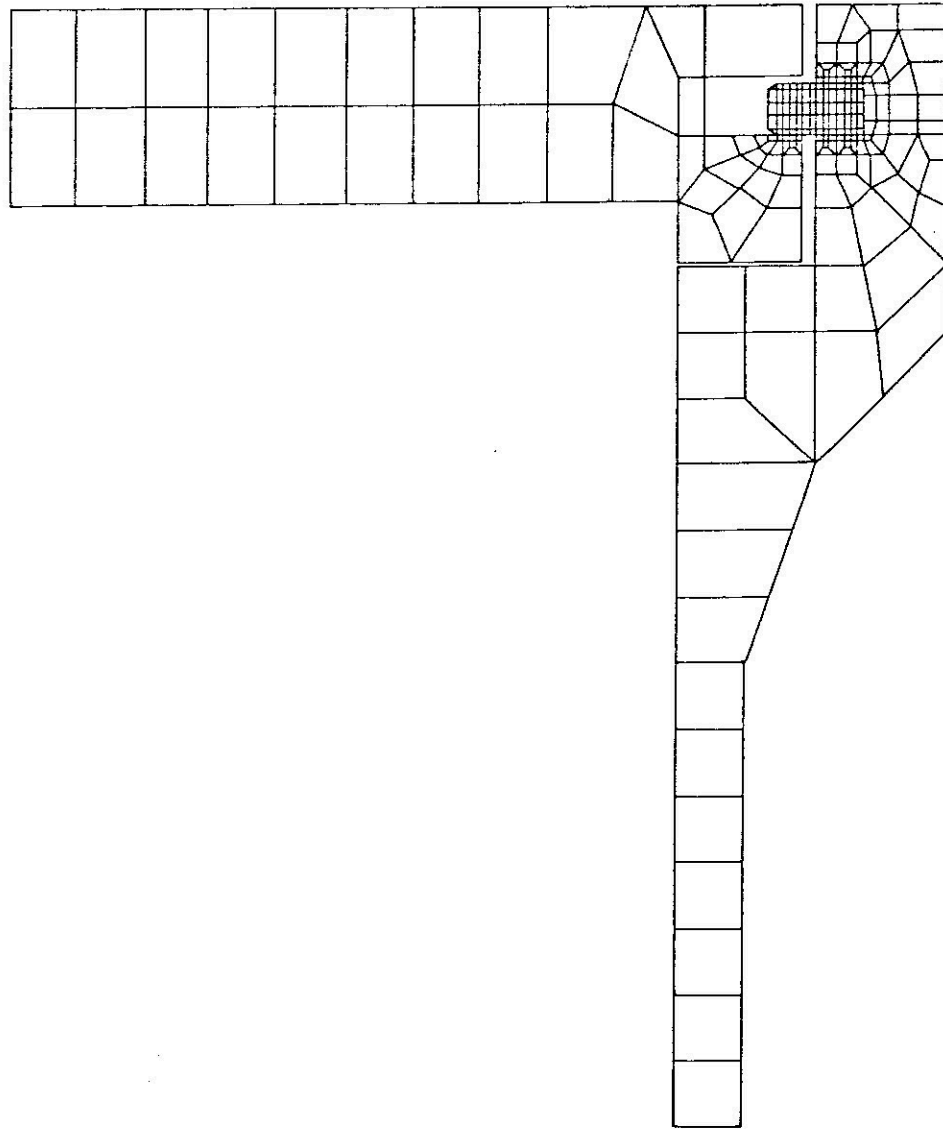


Figura 6.30. Geometria e malha adotados

Denotando por E_A o módulo de Young do material do anel de trancamento e por E o módulo do material do tubo e da tampa, foram consideradas três situações em relação à razão $r = E_A/E$: (i) o caso do anel mais deformável, $r=0.1$, (ii) o caso de mesmo material, $r=1$ e (iii) o caso do anel com material mais rígido, $r=10$.

Considerou-se o carregamento correspondente a uma pressão interna unitária.

Para o caso de $r=1$ mostra-se nas Figuras 6.31, 6.32 e 6.33 a malha deformada (deslocamentos ampliados 3 vezes) para os casos de coeficientes de atrito $\eta=0$, $\eta=0.25$ e $\eta=0.5$ respectivamente.

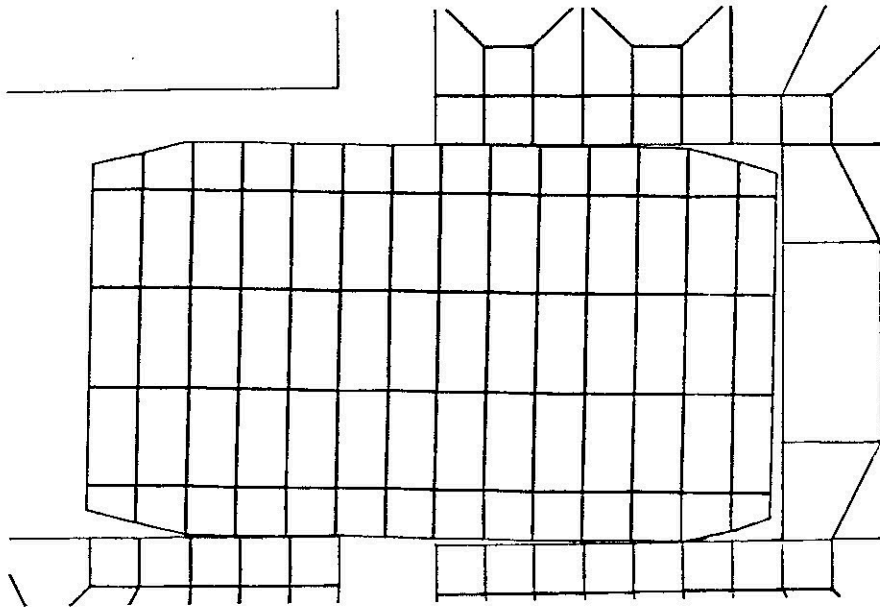


Figura 6.31. Deformação do anel para $\eta=0$

Levando em conta o esquema de identificação dos n \bar{o} s da Figura 6.34, as Tabelas 6.15, 6.16 e 6.17 apresentam, para $r=0.1$, $r=1$ e $r=10$ respectivamente, os multiplicadores de Lagrange λ_n e λ_t obtidos para alguns valores do coeficiente de atrito η e que representam forças (por unidade de comprimento) nodais respectivamente normais e tangenciais à superfície de contato. Os asteriscos indicam n \bar{o} s em que houve adesão.

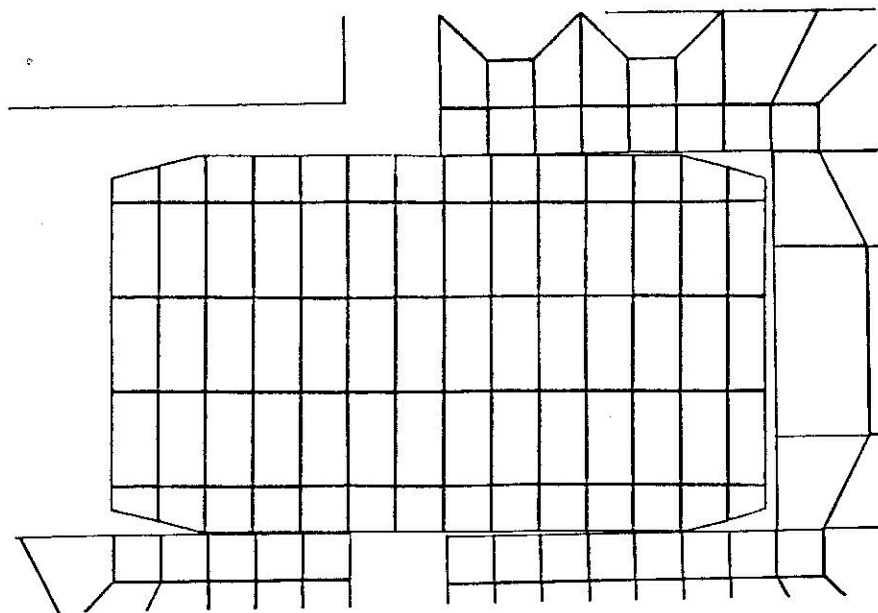


Figura 6.32. Deformação do anel para $\eta=0.25$

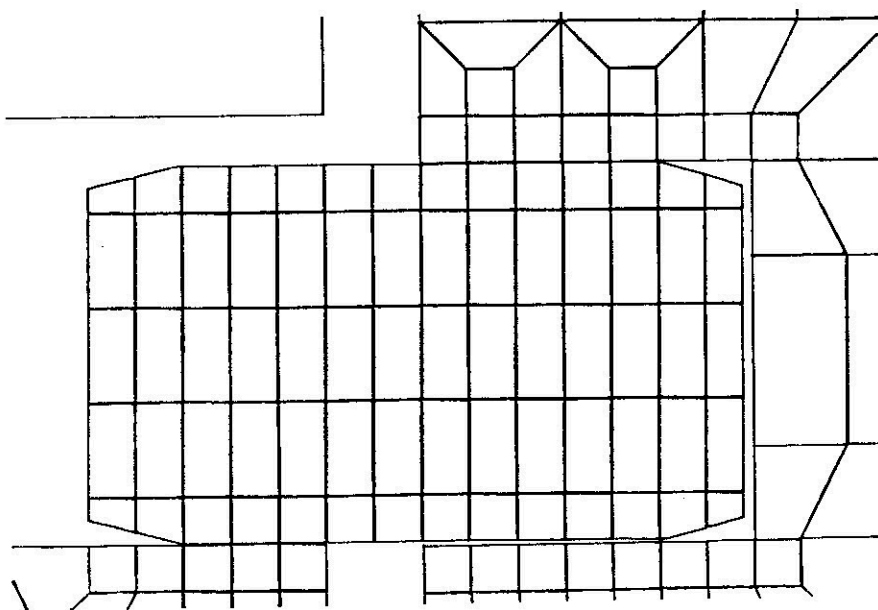


Figura 6.33. Deformação do anel para $\eta=0.50$

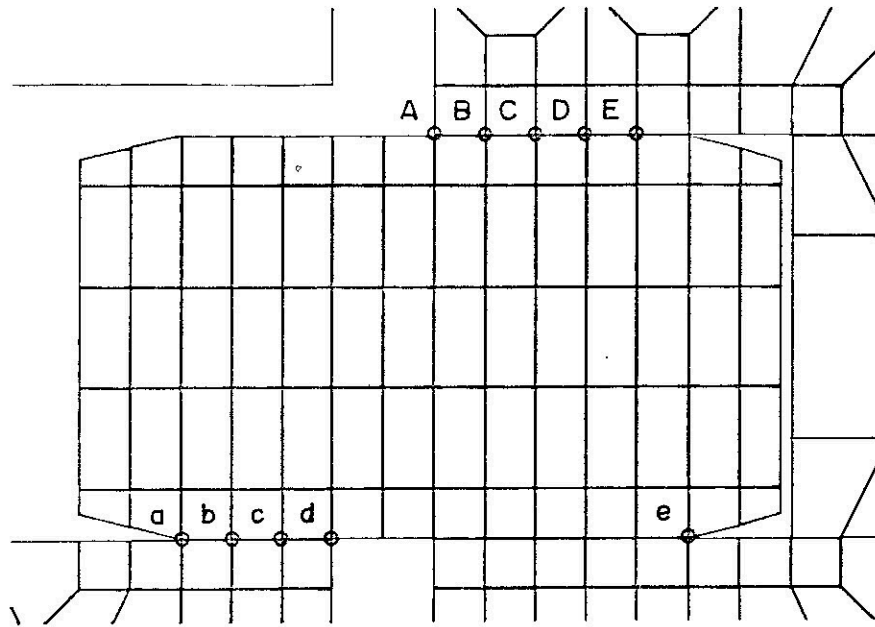


Figura 6.34. Identificação dos nós na região de contato

Tabela 6.15. Forças Nodais na Região de Contato para $r=0.1$

Nó	$\eta=0$	$\eta=0.25$		$\eta=0.50$	
	λ_n	λ_n	λ_t	λ_n	λ_t
a	-	-	-	5.92	2.96
b	-	0.50	0.12	6.92	3.45 *
c	5.24	12.99	3.25	10.80	4.55 *
d	37.18	29.01	7.25	19.10	9.55
A	44.70	30.10	7.53	19.45	9.73
B	17.87	13.89	3.47	10.76	5.38
C	-	2.09	0.52	6.35	3.18
D	-	-	-	3.77	1.88
E	-	-	-	1.01	0.50
e	20.21	4.38	0.86 *	-	-

Tabela 6.16. Forças Nodais na Região de Contato para $r=1$

N \bar{o}	$\eta=0$	$\eta=0.25$		$\eta=0.50$	
	λ_n	λ_n	λ_t	λ_n	λ_t
a	-	-	-	8.18	4.09
b	-	-	-	8.04	4.02
c	1.32	10.46	2.61	11.47	5.74
d	41.07	32.01	8.00	15.13	7.56
A	46.56	34.90	8.73	18.67	9.33
B	12.59	8.40	2.10	12.92	6.46
C	-	-	-	6.90	3.45
D	-	-	-	2.88	1.44
E	-	-	-	-	-
e	16.89	1.63	0.41	-	-

Tabela 6.17. Forças Nodais na Região de Contato para $r=10$

N \bar{o}	$\eta=0$	$\eta=0.25$		$\eta=0.50$	
	λ_n	λ_n	λ_t	λ_n	λ_t
a	-	-	-	12.06	6.03
b	-	3.26	0.81	9.13	4.56
c	8.54	18.86	4.72	10.78	5.39
d	33.90	20.47	5.12	10.97	5.48
A	39.17	25.36	6.34	16.01	7.37 *
B	7.96	16.17	4.04	13.95	6.63 *
C	-	-	-	7.54	3.77
D	-	-	-	3.78	1.89
E	-	-	-	0.04	0.02
e	5.31	-	-	-	-

Tendo em vista a sequência de sub-problemas $P_1 P_2 P_1 \dots$ a serem resolvidos quando se inclui o atrito, pode-se pensar, como já mencionado no item 5.4.1, em não dispendar demasiado esforço na solução de cada sub-problema individualmente buscando reduzir o tempo total de processamento necessário à obtenção da solução final. Uma maneira simples de fazê-lo é limitar o n \bar{u} me-

ro de iterações a serem efetuadas no procedimento iterativo adotado na solução de cada sub-problema. Assim, no presente caso (côntato entre 3 sólidos deformáveis), os sub-problemas P_1 e P_2 serão resolvidos pelo algoritmo GSRP fixando-se um número máximo de iterações. Atingido este limite de iterações passa-se ao sub-problema seguinte independentemente do critério de convergência ter sido satisfeito ou não.

A Tabela 6.18 mostra, para os casos analisados, a influência deste número limite de iterações no tempo de CPU utilizado na solução da sequência $P_1 P_2 P_1 \dots$. Observe-se que o tempo gasto até a decomposição da matriz de rigidez não está incluído (da ordem de 15s para este problema) e nem o cálculo de deslocamentos e tensões (da ordem de 6s, no caso). Adotou-se ainda $\omega=1.2$ e $\epsilon=0.0001$ no algoritmo GSRP.

Tabela 6.18. Tempo de CPU no Processo Iterativo

r	η	Limite de Iterações			
		5	10	20	250
0.1	0	-	-	-	9
	0.25	138	106	98	229
	0.50	267	240	265	662
1	0	-	-	-	8
	0.25	33	31	32	36
	0.50	78	68	74	134
10	0	-	-	-	8
	0.25	19	19	19	19
	0.50	38	31	35	41