

CAPÍTULO V

SOLUÇÕES APROXIMADAS

5.1. PROBLEMAS DISCRETOS

Os problemas de contato formulados em capítulos anteriores envolviam, alternativamente, a solução de uma inequação variacional, a minimização de um funcional ou ainda a busca de um ponto de sela. A fim de se obter soluções para estes problemas os mesmos serão reformulados em espaços de aproximação \tilde{a} dimensão finita onde então algoritmos numéricos serão desenvolvidos para a obtenção de soluções que aproximem, de alguma forma, as soluções dos correspondentes problemas \tilde{a} dimensão infinita.

Os espaços de aproximação considerados serão gerados por um conjunto finito de funções-base as quais, por sua vez, serão funções de interpolação globais construídas pelo Método dos Elementos Finitos a partir de interpolantes locais definidos sobre o domínio de cada elemento finito.

Assim, inicialmente, o MEF introduz uma primeira aproximação que constitui-se na substituição do domínio original do problema Ω , por aquele, Ω^h , formado pela malha de elementos finitos utilizada, com a correspondente aproximação do contorno (Γ_u^h , Γ_f^h e Γ_c^h).

Denotando por $\phi_i^h(x)$ as funções-base construídas pelo MEF, o espaço de aproximação gerado por elas é

$$V^h = \{v^h: v^h = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h(x), \beta_i \in \mathbb{R}, x \in \Omega^h\}$$

e diz-se que a aproximação é interior se

$$V^h \subset V$$

e exterior em caso contrário. (V é o espaço no qual o problema original se formula)

5.1.1. O PROBLEMA DE SIGNORINI

A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ e o funcional linear $\ell(\cdot)$ se aproximam no caso do problema de Signorini por

$$a_h(u, v) = \int_{\Omega^h} \mathbb{D}\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega$$

$$\ell_h(v) = \int_{\Gamma_f^h} f \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega^h} b \cdot v d\Omega$$

A avaliação destas formas em V^h resulta em

$$a_h(u^h, v^h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \int_{\Omega^h} \mathbb{D}\varepsilon(\phi_i^h) \cdot \varepsilon(\phi_j^h) d\Omega$$

$$\ell_h(v^h) = \sum_{j=1}^n \beta_j \left[\int_{\Gamma_f^h} f \cdot \phi_j^h d\Gamma + \int_{\Omega^h} b \cdot \phi_j^h d\Omega \right]$$

e os elementos

$$K_{ij} = \int_{\Omega^h} \mathbb{D}\varepsilon(\phi_i^h) \cdot \varepsilon(\phi_j^h) d\Omega$$

constituem a chamada matriz de rigidez do problema enquanto os elementos f_j dados por

$$f_j = \int_{\Gamma_f^h} f \cdot \phi_j^h d\Gamma + \int_{\Omega^h} b \cdot \phi_j^h d\Omega$$

constituem o chamado vetor de forças nodais equivalentes ao carregamento (b, f) dado.

O funcional da energia potencial total Π se aproxima então por

$$\Pi^h(v^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j K_{ij} - \sum_{j=1}^n \beta_j f_j$$

A aproximação do conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis para o problema de Signorini

$$\mathbb{K} = \{v: v \in V, v \cdot n - s \leq 0 \text{ em } \Gamma_c \text{ e } v = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$$

pode ser feita de várias maneiras. A condição $v^h = 0$ em Γ_u^h é satisfeita exatamente e de maneira trivial no MEF prescrevendo-se como nulos os parâmetros nodais associados ao deslocamento em Γ_u^h . Assim, a condição $v^h = 0$ em Γ_u^h será assumida satisfeita e omitida daqui em diante para simplificar a apresentação.

A condição de não-interpenetração, $v \cdot n - s \leq 0$, em Γ_c pode ser aproximada de várias maneiras. Uma delas seria assegurar que ela fosse satisfeita exatamente em m pontos $x_k \in \Gamma_c^h$, $k=1, 2, \dots, m$. Assim, ter-se-ia

$$\mathbb{K}^h = \{v^h: v^h = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h \text{ com } \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h(x_k) \cdot n^h(x_k) - s^h(x_k) \leq 0, k=1, 2, \dots, m\} \quad (5.1)$$

Um caso particular interessante no MEF seria escolher para esses

m pontos justamente os pontos nodais em Γ_c^h .

Outra maneira de aproximar \mathbb{K} é adotar m funções-peso positivas, linearmente independentes, p_k , definidas em Γ_c^h e aproximar a condição de não-interpenetração de maneira não-local ou seja, impor as condições "globais"

$$\int_{\Gamma_c^h} p_k (v^h \cdot n^h - s^h) d\Gamma \leq 0 \quad k=1,2,\dots,m$$

Neste caso ter-se-ia

$$\mathbb{K}^h = \{v^h : v^h = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h \text{ com } \sum_{i=1}^n \beta_i \left[\int_{\Gamma_c^h} p_k (\phi_i^h \cdot n^h) d\Gamma - \int_{\Gamma_c^h} p_k s^h d\Gamma \right] \leq 0, k=1,2,\dots,m\} \quad (5.2)$$

Pode-se inclusive tomar esta forma como mais geral, desde que se interprete que as funções p_k podem vir a ser também deltas de Dirac que, quando associados aos pontos $x_k \in \Gamma_c^h$, reproduzem a aproximação \mathbb{K}^h definida em (5.1).

Em ambos os casos o conjunto \mathbb{K}^h é descrito por m inequações lineares

$$\sum_{i=1}^n A_{ki} \beta_i \leq b_k \quad k=1,2,\dots,m \quad (5.3)$$

onde os elementos A_{ki} e b_k são definidos via (5.1) ou (5.2).

Outra possibilidade para a solução do problema de Signorini é, como visto no item 3.5, encontrar o ponto de sela (u, λ) do lagrangeano

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_c} \rho(v \cdot n - s) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.4)$$

com a restrição de não-negatividade sobre ρ .

Definindo uma aproximação independente para o multiplicador ρ

$$\rho^h \in T^h = \{\rho^h: \rho^h = \sum_{i=1}^m \gamma_i \psi_i^h(x) \text{ com } \rho^h \geq 0, \gamma_i \in \mathbb{R}, x \in \Gamma_c\} \quad (5.5)$$

o lagrangeano (5.4) se aproxima em $V^h \times T^h$ por

$$\begin{aligned} L^h(v^h, \rho^h) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j K_{ij} - \sum_{j=1}^n \beta_j f_j + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_j \beta_i M_{ij} - \sum_{j=1}^m \gamma_j s_j \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde

$$M_{ij} = \int_{\Gamma_c^h} (\phi_i^h \cdot n^h) \psi_j \, d\Gamma$$

$$s_j = \int_{\Gamma_c^h} \psi_j s^h \, d\Gamma$$

Resumindo, a solução do problema de Signorini discretizado pode ser obtida calculando-se os α_i , $i=1,2,\dots,n$, que satisfazem a inequação variacional

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i K_{ij} (\beta_j - \alpha_j) \geq \sum_{j=1}^n f_j (\beta_j - \alpha_j) \quad \forall \beta_j \in \mathbb{R}, j=1,2,\dots,n$$

ou minimizem o funcional

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i K_{ij} \beta_j - \sum_{j=1}^n \beta_j f_j$$

sob as restrições

$$\sum_{i=1}^n A_{ki} \beta_i \leq b_k, \quad k=1,2,\dots,m$$

ou ainda encontrando o ponto de sela (u^h, λ^h) do Lagrangeano definido em (5.6), no conjunto $V^h \times T^h$.

5.1.2. O PROBLEMA DE INDENTAÇÃO RÍGIDA

Tendo em vista os desenvolvimentos anteriores, o funcional energia potencial total Π se aproxima em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V^h$ por

$$\begin{aligned} \Pi^h(\beta_1, \beta_2, \omega, v^h) &= \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{n+2} \sum_{j=3}^{n+2} \beta_i \beta_j K_{ij} - \sum_{j=3}^{n+2} \beta_j f_j - \\ &- \sum_{j=1}^2 \beta_j P_j - \omega M \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde

$$v^h = \sum_{j=3}^{n+2} \beta_j \phi_{j-2}^h$$

e os elementos K_{ij} constituem a matriz de rigidez do problema com

$$K_{ij} = 0 \quad \text{se } i=1,2 \quad \text{ou } j=1,2$$

Carregamentos externos atuantes sobre o sólido deformável foram incluídos através da segunda parcela do segundo membro.

A aproximação do conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis para o problema

$$\mathbb{K} = \{(\beta_1, \beta_2, \omega, v) : v \cdot n - \sum_{i=1}^2 \beta_i n_i + \omega m \leq s \quad \text{em } \Gamma_c\}$$

pode ser feita de maneira inteiramente análoga ao caso anterior (problema de Signorini), ou seja: satisfazer a condição de não-interpenetração exatamente em m pontos escolhidos ao longo de Γ_C^h ou, de maneira global, através da introdução de m funções-peso p_k definidas convenientemente. Em ambos os casos o conjunto K^h pode ser escrito como:

$$K^h = \{(\beta_1, \beta_2, \omega, v^h) : v^h = \sum_{j=3}^{n+2} \beta_j \phi_{j-2}^h \text{ com } \sum_{i=3}^{n+2} A_{ik} \beta_i - \sum_{i=1}^2 a_{ik} \beta_i + a_{3k} \omega \leq b_k, k=1, 2, \dots, m\} \quad (5.8)$$

Outra formulação para o problema envolve o lagrangeano

$$L(\underline{v}, \rho) = \Pi(\underline{v}) + \int_{\Gamma_C} \rho (v \cdot n - \sum_{i=1}^2 \beta_i n_i + \omega m - s) d\Gamma \quad (5.9)$$

onde $\underline{v} = (\beta_1, \beta_2, \omega, v)$.

Definindo uma aproximação para o multiplicador ρ como em (5.5), o lagrangeano (5.9) se aproxima por

$$\begin{aligned} L^h(\underline{v}^h, \rho^h) &= \Pi^h(\underline{v}^h) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=3}^{n+2} \gamma_j \beta_i C_{ij} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j \beta_i c_{ij} + \omega \sum_{j=1}^m \gamma_j d_j - \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \gamma_j e_j \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde

$$C_{ij} = \int_{\Gamma_C^h} \psi_j^h (\phi_i^h \cdot n^h) d\Gamma$$

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_C^h} \psi_j^h n_i^h d\Gamma$$

$$d_j = \int_{\Gamma_c^h} \psi_j^h m^h d\Gamma$$

$$e_j = \int_{\Gamma_c^h} \psi_j^h s^h d\Gamma$$

e $\Pi^h(\underline{v}^h)$ é dado por (5.7).

A solução do problema de indentação rígida discretizado corresponde portanto a encontrar os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \theta, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+2}$ que minimizem o funcional Π^h , definido em (5.7), no conjunto \mathbb{K}^h , definido em (5.8), ou a encontrar o par $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+2})$ e $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ que caracteriza o ponto de sela do lagrangeano (5.10).

5.1.3. O PROBLEMA DE CONTATO ENTRE DOIS SÓLIDOS

Neste caso, dois conjuntos de funções-base

$$\phi_i^{ah}(x), \quad x \in \Omega_h^a, \quad i=1, 2, \dots, n^a$$

$$\phi_i^{bh}(x), \quad x \in \Omega_h^b, \quad i=1, 2, \dots, n^b$$

devem ser utilizados na construção dos espaços de aproximação do problema. Omitindo o parâmetro h (característico da malha de elementos finitos empregada) a fim de simplificar a notação, tem-se

$$V_h^s = \{v_s^h : v_s^h = \sum_{i=1}^{n^s} \beta_i^s \phi_i^s, \beta_i^s \in \mathbb{R}\}, \quad s=a, b$$

O funcional da energia potencial total de cada corpo se aproxima então por

$$\Pi_S^h(v_S^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^S} \sum_{j=1}^{n^S} \beta_i^S \beta_j^S K_{ij}^S - \sum_{j=1}^{n^S} \beta_j^S f_j^S, \quad s=a,b$$

A aproximação do conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis para o problema

$$\mathbb{K} = \{(v^a, v^b) \in V^a \times V^b : v_{ab}^r - \phi_{ab}^r \leq 0 \text{ em } \Gamma_C\}$$

pode ser feita de maneira a satisfazer a condição de não-interpenetração em m pontos $x_k \in \Gamma_C$

$$\sum_{s=a,b} [u^s(x_k^s) \cdot n^s(x_k^s) - \phi_s(x_k^s) n_2^s(x_k^s)] \leq 0, \quad x_k^s \in \Gamma_C^s, \quad k=1,2,\dots,m$$

o que acarreta

$$\mathbb{K}^h = \{(v_a^h, v_b^h) : v_s^h = \sum_{i=1}^{n^S} \beta_i^S \phi_i^S, \quad s=a,b \text{ com } \sum_{s=a,b} [\sum_{i=1}^{n^S} \beta_i^S A_{ik}^S - b_k^S] \leq 0, \quad k=1,2,\dots,m\} \quad (5.11)$$

com

$$A_{ik}^S = \phi_i^S(x_k^S) \cdot n^S(x_k^S) \quad \text{e} \quad b_k^S = \phi_s(x_k^S) n_2^S(x_k^S)$$

Por procedimento análogo ao utilizado no problema de Signorini, o conjunto \mathbb{K}^h poderia ser construído a partir da imposição da condição de não-interpenetração de maneira global via funções-peso. Neste caso, \mathbb{K}^h ainda poderia ser descrito como em (5.11), com A_{ik}^S e b_k^S apropriados.

Outra formulação para o problema envolve o lagrangeano

$$L[(v^a, v^b), \rho] = \sum_{s=a,b} \Pi^S(v^S) + \int_{\Gamma_C} \rho (v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) d\Gamma \quad (5.12)$$

Definindo uma aproximação para o multiplicador ρ por analogia com (5.5), o lagrangeano (5.12) se aproxima em $(V_h^a \times V_h^b) \times T^h$

por

$$L_h[(v_a^h, v_b^h), \rho^h] = \sum_{s=a,b} \Pi_s^h(v_s^h) + \sum_{s=a,b} \sum_{i=1}^{n^s} \sum_{j=1}^m \gamma_j \beta_i^s M_{ij}^s - \sum_{j=1}^m \gamma_j d_{ab}^j \quad (5.13)$$

onde

$$M_{ij}^s = \int_{\Gamma_c} (\phi_i^s \cdot n^s) \psi_j d\Gamma \quad e \quad d_{ab}^j = \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} \phi_s n_2^s \psi_j d\Gamma \quad (5.14)$$

A solução do problema de contato entre dois sólidos deformáveis em sua forma discretizada corresponde portanto a encontrar os parâmetros $(\alpha_1^a, \alpha_2^a, \dots, \alpha_{n_a}^a)$ e $(\alpha_1^b, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{n_b}^b)$ que minimizem a energia potencial total

$$\Pi_a^h(v_a^h) + \Pi_b^h(v_b^h)$$

submetidos às restrições descritas em (5.11). Alternativamente, pode-se encontrar o par $[(\alpha_1^a, \alpha_2^a, \dots, \alpha_{n_a}^a, \alpha_1^b, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{n_b}^b), (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)]$ que caracterize o ponto de sela do lagrangeano (5.13) em $(V_h^a \times V_h^b) \times T^h$.

5.2. ALGORITMOS NUMÉRICOS

5.2.1. INTRODUÇÃO

Discute-se neste item algoritmos numéricos para a solução dos problemas (a dimensão finita) resultantes do processo de discretização adotado no item anterior.

O primeiro problema a ser abordado é o problema de progra

mação quadrática

$$\min_{u \in K} \frac{1}{2} u'Ku - u'f$$

(a linha denota transposição) onde a restrição $u \in K$ assume em geral a forma

$$Au \leq b \quad (5.15)$$

e, em alguns casos, a forma

$$a \leq u \leq b \quad (5.16)$$

entendendo-se que as desigualdades se aplicam componente a componente.

Inicialmente é importante lembrar que, diferentemente do problema geral de programação não-linear, a programação quadrática admite, além dos algoritmos iterativos, algoritmos com terminação finita, ou seja, aqueles em que o elemento minimizante é encontrado após um número finito - não necessariamente conhecido "a priori" - de operações aritméticas. Neste trabalho, algoritmos de ambos os tipos serão utilizados.

A consideração em separado de restrições que podem ser escritas na forma (5.16) se deve ao fato de que se pode tirar proveito desta forma particular na concepção do algoritmo numérico a ser adotado para a solução do problema, como se verá no item seguinte.

5.2.2. RESTRIÇÕES DA FORMA $A \leq U \leq B$

Neste caso, a possibilidade de decompor o conjunto de res

trições \mathbb{K} na forma

$$\mathbb{K} = \prod_{i=1}^n \mathbb{K}_i \quad \text{com} \quad \mathbb{K}_i = [a_i, b_i]$$

sugere o uso de métodos de relaxação, onde a idéia básica é resolver o problema da busca da solução u^* e \mathbb{K} através de uma sequência de sub-problemas de mesma natureza, porém mais simples, sobre cada um dos conjuntos \mathbb{K}_i . Assim, partindo de um elemento $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \in \mathbb{K}$ e supondo-se u^k conhecido, calcula-se u_i^{k+1} como solução do problema de minimização em uma variável

$$u_i^{k+1} \in [a_i, b_i]$$

$$\Pi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, u_{i+1}^k, \dots, u_n^k) \leq$$

$$\Pi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, v_i, u_{i+1}^k, \dots, u_n^k) \quad \forall v_i \in [a_i, b_i]$$

para $i=1, 2, \dots, n$.

Um algoritmo deste tipo é o de Gauss-Seidel com relaxação e projeção, denotado daqui em diante como GSRP, e que pode ser descrito como

i) Inicialização:

- escolha $u^0 \in \mathbb{K}$: $a \leq u^0 \leq b$
- escolha $\omega \in (0, 2)$

ii) Iteração:

Repita para $k=0, 1, 2, \dots$

para $i=1, 2, \dots, n$ faça:

$$u_i^* = \frac{1}{K_{ii}} \left\{ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} u_j^k \right\}$$

$$u_i^{k+1} = P_i [(1-\omega)u_i^k + \omega u_i^*]$$

at e que $\|u^{k+1} - u^k\| \leq \epsilon$

onde $P_i[\cdot]$   o operador de proje o sobre o intervalo $[a_i, b_i]$, isto  

$$P_i[\alpha] = \min[b_i, \max(a_i, \alpha)] \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ω   o par metro de relaxa o do m todo

$0 < \omega < 1 \rightarrow$ sub-relaxa o

$1 < \omega < 2 \rightarrow$ sobre-relaxa o

e ϵ   uma toler ncia adequada pr -fixada.

Como se v , trata-se de uma generaliza o do algoritmo iterativo cl ssico de Gauss-Seidel para resolu o do sistema de equa es lineares

$$Ku = f$$

que se obtem do GSRP fazendo-se $\omega=1$ e eliminando-se a opera o de proje o.

O crit rio de converg ncia pode alternativamente se escrever

$$\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^k\|} \leq \epsilon$$

e, em ambos os casos, $\|\cdot\|$ denota uma norma em \mathbb{R}^n como, por exemplo,

$$\|u\|_2 = (u^t u)^{1/2}$$

ou

$$\|u\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$$

A convergência do algoritmo é garantida (vide GLOWINSKI, LIONS e TRÉMOLIÈRES (7)) quando a matriz de rigidez K é positiva definida e para $0 < \omega < 2$.

Em princípio, o parâmetro ω pode variar com k e com i a fim de acelerar a convergência. Entretanto, a determinação "a priori" de um parâmetro ω ótimo não é trivial (ver CRYER (58), p. ex.) e uma possibilidade é tentar obter, a baixo custo, uma estimativa para o valor ótimo de ω durante o processo iterativo (ver APELT e ISAACS (59) para o caso da resolução de sistemas de equações lineares).

5.2.3. RESTRIÇÕES DA FORMA $AU \leq B$

A forma mais comum do conjunto K nos problemas considerados aqui é, na realidade, a de um conjunto de m inequações lineares. A fim de se analisar esta situação é interessante considerar o problema de programação quadrática em sua forma padrão

$$\begin{array}{l} \min \frac{1}{2} u'Qu - u'f \\ Au \leq b \\ u \geq 0 \end{array} \quad (5.17)$$

onde a restrição $u \geq 0$ é introduzida e onde Q é uma matriz simétrica positiva semi-definida de ordem n , $u, f \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz retangular $m \times n$ de posto $\min(m, n)$.

Introduzindo os multiplicadores de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\rho \in \mathbb{R}^n$ associados respectivamente às restrições $Au \leq b$ e $u \geq 0$ e a variável de folga $y \in \mathbb{R}^m$, as condições de Kuhn-Tucker (vide

BAZARAA e SHETTY (60)) para o problema (5.17) são

$$\begin{aligned} Au + y &= b \\ -Qu + f - A'\lambda + \rho &= 0 \\ u'\rho = 0 \quad , \quad \lambda'y &= 0 \\ u, \rho, \lambda, y &\geq 0 \end{aligned}$$

e podem ser colocadas na forma de um Problema de Complementaridade Linear (PCL)

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w'z &= 0 \\ w \geq 0 \quad , \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

com

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A' & Q \end{pmatrix} , \quad q = \begin{pmatrix} b \\ -f \end{pmatrix} , \quad w = \begin{pmatrix} y \\ \rho \end{pmatrix} \text{ e } z = \begin{pmatrix} \lambda \\ u \end{pmatrix}$$

O algoritmo aqui adotado para a solução do PCL é devido a Lemke (vide BAZARAA e SHETTY (60)) e está descrito no Apêndice.

Retomando o problema quadrático na forma mais frequente em que ocorre nas situações consideradas aqui

$$\min_{Au \leq b} \frac{1}{2} u'Ku - u'f \quad (5.18)$$

é possível eliminar as restrições através de multiplicadores de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ escrevendo o problema equivalente de busca do ponto de sela (u^*, λ^*)

$$L(u^*, \lambda) \leq L(u^*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n , \quad \forall \lambda \geq 0$$

do Lagrangeano

$$L(u, \lambda) = \frac{1}{2} u'Ku - u'f + \lambda'(Au-b) \quad (5.19)$$

O ponto de sela (u^*, λ^*) de (5.19) deverá satisfazer as condições

$$u' \left. \frac{\partial L}{\partial u} \right|_{(u^*, \lambda^*)} = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda - \lambda^*)' \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right|_{(u^*, \lambda^*)} \leq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

que implicam em

$$Ku^* - f + A'\lambda^* = 0$$

$$Au^* - b \leq 0$$

(5.20-23)

$$\lambda^* \geq 0$$

$$\lambda^{*'}(Au^* - b) = 0$$

onde a primeira delas equivale ao equilíbrio do sistema sob a ação das forças externas f e reações de contato $-A'\lambda^*$ e as demais correspondem, respectivamente, à condição de não-interpenetração, positividade das reações de apoio e complementaridade entre a ausência de contato e a existência de reações.

A solução numérica do problema de ponto de sela pode ser obtida com o uso do algoritmo de Uzawa (vide GLOWINSKI, LIONS e TRÉMOLIÈRES (7)) que, para o caso em questão, se escreve:

i) Inicialização:

- escolher $\lambda^0 \geq 0$

ii) Iteração:

repita para $k=0,1,2,\dots$

- calcule u^k

$$Ku^k = f - A'\lambda^k$$

- determine λ^{k+1}

$$\lambda^{k+1} = [\lambda^k + \gamma(Au^k - b)]^+$$

atē que $\|\lambda^{k+1} - \lambda\| \leq \epsilon$

onde a operação parte positiva $(\cdot)^+$ é efetuada componente a componente e γ é um parâmetro positivo suficientemente pequeno.

Observa-se que, conhecidos os multiplicadores λ^k , os deslocamentos u^k são calculados como solução do problema de minimização irrestrita

$$L(u^n, \lambda^n) \leq L(u, \lambda^n) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Por outro lado a propriedade

$$\lambda^* = [\lambda^* + \rho(Au^* - b)]^+ \quad \forall \rho \geq 0$$

sugere o esquema de cálculo de λ^{k+1} em função de u^k .

Demonstra-se no Apêndice que sob as condições

$$\exists \alpha_1 > 0 : v'Kv \geq \alpha_1 \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists \alpha_2 : \|Av\| \leq \alpha_2 \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$$

$$0 < \gamma < 2\alpha_1/\alpha_2^2$$

a sequência (u^n, λ^n) converge para a solução do problema, (u^*, λ^*) , quando $n \rightarrow \infty$.

Para os casos em que a matriz de rigidez \bar{K} é positiva-definida, da relação (5.20) pode-se explicitar os deslocamentos

$$u = K^{-1}(f - A'\lambda)$$

e após substituição em (5.19) obter o problema de programação quadrática

$$\min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2} \lambda' P \lambda - \lambda' d \quad (5.24)$$

onde P é a matriz simétrica de ordem m

$$P = AK^{-1}A' \quad (5.25)$$

e $d \in \mathbb{R}^m$ é dado por

$$d = AK^{-1}f - b \quad (5.26)$$

Na terminologia da programação matemática, (5.18) é dito o problema primal e (5.24) o seu dual que, neste caso, apresenta propriedades interessantes. De fato, a matriz do problema, P , embora cheia, é positiva-definida e tem ordem bem menor do que K já que, para os problemas tratados aqui, m é bem menor do que n , em geral. Outra característica interessante do problema dual é que o seu conjunto de restrições se apresenta numa forma bem mais simples do que no problema primal. Como consequência, o algoritmo GSRP pode ser aplicado ao problema dual o que não ocorre com o problema primal. Além disso, as condições de otimalidade de (5.24) podem ser escritas como o PCL

$$p - P\lambda = -d$$

$$p \geq 0 \quad \lambda \geq 0$$

$$p'\lambda = 0$$

de ordem m que pode ser resolvido pelo algoritmo de Lemke.

Denotando por λ^* a solução do problema dual (5.24), a solução do problema primal (5.18) é obtida por

$$u^* = K^{-1}(f - A'\lambda^*)$$

5.2.4. ELIMINAÇÃO DAS VARIÁVEIS NÃO-RESTRITAS

Finalmente, é importante salientar que a ordem do problema primal pode ser reduzida eliminando-se as variáveis que não estão restritas. Assim, segregando-se as variáveis não-restritas, u_i , (normalmente associadas ao interior do sólido) das restritas u_c , (associadas ao contorno Γ_c^h) pode-se reescrever o funcional Π como

$$\Pi(u_i, u_c) = \frac{1}{2} (u_i' \ u_c') \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_c \end{pmatrix} - (u_i' \ u_c') \begin{pmatrix} f_i \\ f_c \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Como a minimização em relação a u_i é sem restrições deve-se ter

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0$$

o que acarreta

$$K_{ii}u_i + K_{ic}u_c - f_i = 0$$

Se K_{ii} é positiva-definida, substituindo-se

$$u_i = K_{ii}^{-1}(f_i - K_{ic}u_c) \quad (5.28)$$

em (5.27) obtem-se o problema primal condensado

$$\min_{u_c \in \mathbb{K}_c} \frac{1}{2} u_c' K_{cc}^* u_c - u_c' f_c^* \quad (5.29)$$

onde \mathbb{K}_c é o conjunto de restrições associado à variável u_c e

$$K_{cc}^* = K_{cc} - K_{ci} K_{ii}^{-1} K_{ic} \quad (5.30)$$

$$f_c^* = f_c - K_{ci} K_{ii}^{-1} f_i \quad (5.31)$$

Trata-se do conhecido procedimento de sub-estruturacão, ou condensacão estática, e uma vez encontrada a soluçã u_c^* de (5.29), determina-se o vetor u_i^* através de (5.28).

5.3. PROBLEMAS SEM ATRITO

Fazendo uso dos algoritmos discutidos no item anterior, várias alternativas se apresentam para a soluçã numérica dos problemas de contato sem atrito vistos aqui. É conveniente entretanto a consideracão em separado das restrições da forma especial $a \leq u \leq b$.

a) Restrições da forma $a \leq u \leq b$

Problemas do tipo Signorini podem, como já visto, acarretar um conjunto de restrições dessa forma e, neste caso, duas alternativas serão destacadas aqui:

i) Soluçã do problema primal

$$\min_{a \leq u \leq b} \frac{1}{2} u' k u - u' f$$

via GSRP.

ii) Solução do problema primal condensado

$$\min_{a_c \leq u_c \leq b_c} \frac{1}{2} u_c' K_{cc}^* u_c - u_c' f_c^*$$

via GSRP com K_{cc}^* e f_c^* definidas em (5.30) e (5.31)

b) Restrições da forma $Au \leq b$

Esta é a forma mais usual do conjunto de restrições, ocorrendo sempre para os problemas de contato entre dois corpos e com muita frequência também em problemas do tipo Signorini. Neste caso é interessante introduzir multiplicadores de Lagrange e considerar o problema equivalente de busca de ponto de sela. Uma opção seria portanto

iii) Determinar o ponto de sela (\bar{u}^*, λ^*) de

$$\frac{1}{2} u' K u - u' f + \lambda' (Au - b)$$

resolvendo o sistema (5.20-23) via algoritmo de Uzawa.

A mesma idéia pode ser aplicada efetuando-se porém uma prévia eliminação de variáveis não-restritas, ou seja, partindo-se do problema primal condensado:

iv) Determinar o ponto de sela (u_c^*, λ_c^*) do Lagrangeano "condensado"

$$\frac{1}{2} u_c' K_{cc}^* u_c - u_c' f_c^* + \lambda_c' (A_c u_c - b_c)$$

via algoritmo de Uzawa.

Embora o algoritmo de Lemke pudesse ser aplicado diretamente ao PCL associado ao problema primal, considera-se aqui somente sua

aplicação ao problema condensado:

v) Solução do PCL associado ao problema primal condensado

$$\min_{A_c u_c \leq b_c} \frac{1}{2} u_c' K_{cc}^* u_c - u_c' f_c^*$$

via algoritmo de Lemke.

Uma alternativa atraente, sempre que a matriz de rigidez for positiva-definida, é

vi) Solução do problema dual

$$\min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2} \lambda' P \lambda - \lambda' d$$

com P e d dados por (5.25) e (5.26), via algoritmo de Lemke.

Dada a natureza do conjunto de restrições do problema dual, outra possibilidade é

vii) Solução do problema dual

$$\min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{2} \lambda' P \lambda - \lambda' d$$

via algoritmo GSRP.

No caso da indentação rígida, os procedimentos (vi) e (vii) não podem ser aplicados diretamente visto que a matriz do problema

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

não é positiva-definida. Assim, considerando o Lagrangeano do problema

$$L(\bar{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \bar{u}' K \bar{u} - \bar{u}' \bar{f} + \lambda' (\bar{A} \bar{u} - b) \quad (5.33)$$

onde

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f \\ P_1 \\ P_2 \\ M \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{A} = [A \quad a_1 \quad a_2 \quad a_\theta]$$

a condição de estacionariedade sobre a variável u é

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

o que acarreta

$$u = K^{-1}(f - A'\lambda) \quad (5.34)$$

Levando-se (5.34) em (5.33) obtém-se o problema

$$\min_{\lambda \geq 0} \min_{\alpha_1, \alpha_2, \theta} \frac{1}{2} \lambda' P \lambda - \lambda' d + (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \theta) \left(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_\theta' \end{pmatrix} \lambda \right) \quad (5.35)$$

onde as variáveis primais α_1 , α_2 e θ (graus de liberdade do sólido rígido) podem ser identificados como multiplicadores das restrições de igualdade

$$\begin{cases} P_1 - a_1' \lambda = 0 \\ P_2 - a_2' \lambda = 0 \\ M - a_\theta' \lambda = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

que vêm a ser exatamente as equações de equilíbrio do sólido rígido. Assim, (5.35) é equivalente a

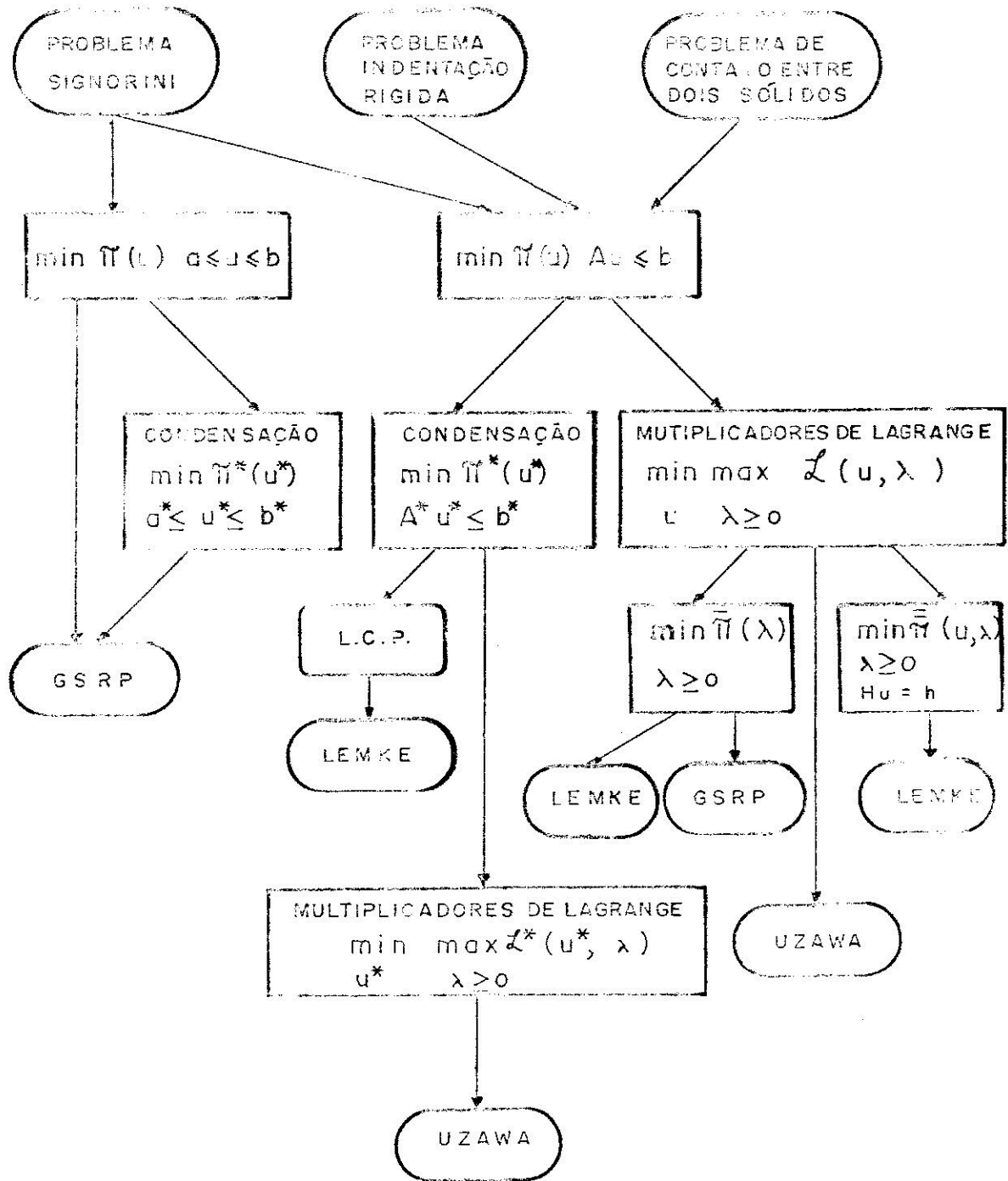


FIG. 5.1

tamente positivas (vide BARBOSA e FEIJÓO (66)).

- b) Como a forma padrão do problema quadrático (5.17) não envolve restrições de igualdade, o problema (5.37) da alternativa (viii) é resolvido transformando-se as restrições $H\lambda=h$ em restrições de desigualdade

$$\begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$$

5.4. PROBLEMAS COM ATRITO

5.4.1. INTRODUÇÃO

Discute-se a seguir algoritmos numéricos para os problemas de contato com atrito. Como se viu, sua solução será obtida num procedimento iterativo envolvendo uma sequência de sub-problemas mais simples. Um destes sub-problemas, P_1 , corresponderá ao problema sem atrito e o outro, P_2 , terá a estrutura do problema de Duvaut-Lions, visto no item 4.3.

Assim, em princípio, qualquer dos algoritmos vistos no item anterior para a solução de problemas de contato sem atrito poderia ser utilizado na solução de P_1 . Entretanto, como a solução do problema seria o limite da sequência de soluções dos sub-problemas, pode-se pensar em não dispendir demasiado esforço na solução de cada sub-problema, P_1 ou P_2 , de "per si", especialmente nas primeiras iterações, visto serem tais soluções apenas aproximações da solução final. Isto, juntamente com o fato de se ter sempre disponível uma aproximação inicial (obtida no sub-problema anterior) para o sub-problema subsequente deve ser levado em

conta na construção dos algoritmos para os problemas com atrito.

Por conveniência apresenta-se separadamente os algoritmos para os problemas de Signorini, indentação rígida e contato entre dois corpos.

5.4.2, PROBLEMA DE SIGNORINI COM ATRITO

A primeira variante do processo de Panagiotopoulos para o problema de Signorini com atrito, vista no item 4.4, pode ser reescrita em termos de problemas de minimização como

1) Dado \bar{F}_t^{k-1} encontrar u^k solução de

$$\inf_{v \in K} \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{\bar{F}_t^{k-1}}(v)$$

2) Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n(u^k)$ e $g = n|\sigma_n(u^k)|$

3) Calcule u^* solução de

$$\inf_{v \in V} \frac{1}{2} a(v, v) + j_g(v) - \ell(v) - \ell_{\bar{F}_n^k}(v)$$

4) Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t(u^*)$

5) Verifique se o critério de convergência foi satisfeito. Se não, $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 1.

As dificuldades envolvidas nos problemas de minimização nos passos 1 e 3 são: (i) a presença do conjunto convexo de restrições K no primeiro deles e (ii) a não-diferenciabilidade do funcional $j_g(\cdot)$ no segundo.

PANAGIOTOPOULOS (32) resolve ambos os problemas via algo-

ritmos de programação não-linear. CAMPOS, ODEN e KIKUCHI (61) levam em conta a restrição $v \in K$ através de uma técnica de penalização e, no segundo problema, regularizam o funcional $j_g(\cdot)$. Outras possibilidades são exploradas por RAOUS (62) e HASLINGER e PANAGIOTOPOULOS (63). A idéia básica usada aqui é a dualidade (vide de GLOWINSKI, LIONS e TREMOLIÈRES (7)).

Como já visto no item 3.5, o primeiro problema é equivalente à busca do ponto de sela

$$\inf_{v \in V} \sup_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{\Gamma_t}^{k-1}(v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_n (v \cdot n - s) d\Gamma \quad (5.38)$$

enquanto o segundo é equivalente (vide item 4.3) a

$$\inf_{v \in V} \sup_{\lambda_t \in \Lambda} \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{\Gamma_n}^k(v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_t \cdot v_t d\Gamma \quad (5.39)$$

com

$$\Lambda = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \leq g^2(x), x \in \Gamma_c \} \quad (5.40)$$

Os multiplicadores de Lagrange introduzidos, λ_n e λ_t , podem ser interpretados, por dualidade, respectivamente como as tensões normal e tangencial, devida ao atrito, ao longo de Γ_c .

Para problemas bidimensionais o seguinte esquema de aproximação pode ser adotado

$$v = \Phi q \quad (5.41)$$

$$\lambda_n = \psi p \quad (5.42)$$

$$\lambda_t = \psi t \quad (5.43)$$

onde Φ é a matriz com as funções de interpolação do MEF para o campo de deslocamentos v em função dos parâmetros nodais q e ψ é uma matriz-linha com as funções de interpolação para os multiplicadores de Lagrange λ_n e λ_t em termos dos parâmetros p e t respectivamente.

Dessa forma, os problemas (5.38) e (5.39) são aproximados respectivamente por

$$\min_q \max_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} q' K q - q' f - q' f_t^{k-1} + q' M p + b' p \quad (5.44)$$

e

$$\min_q \max_{\lambda_t \in \Lambda} \frac{1}{2} q' K q - q' f - q' f_n^k + q' A t \quad (5.45)$$

onde K é a matriz de rigidez usual, f , f_t e f_n são os vetores de cargas nodais equivalentes respectivamente às forças aplicadas, forças tangenciais devidas ao atrito e reações normais na superfície de contato e as matrizes M e A e o vetor b são dados respectivamente por

$$M = \int_{\Gamma_c} \Phi' \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \psi \, d\Gamma \quad (5.46)$$

$$A = \int_{\Gamma_c} \Phi' \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \psi \, d\Gamma \quad (5.47)$$

$$b = \int_{\Gamma_c} \psi' s \, d\Gamma \quad (5.48)$$

Como a minimização em q é irrestrita, assumindo-se K posi

tiva-definida pode-se eliminar a variável q através das condições de estacionariedade

$$Kq - (f+f_t^{k-1}) + Mp = 0 \quad (5.49)$$

e

$$Kq - (f+f_n^k) + At = 0 \quad (5.50)$$

Assim, combinando-se (5.49) com (5.44) e (5.50) com (5.45) obtém-se

$$\min_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

e

$$\min_{\lambda_t \in \Lambda} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

onde

$$P = M' K^{-1} M \quad , \quad T = A' K^{-1} A \quad ,$$

$$d_1^{k-1} = M' K^{-1} (f+f_t^{k-1}) - b \quad e \quad d_2^k = A' K^{-1} (f+f_n^k)$$

Para os problemas bidimensionais tratados aqui, os interpolantes globais foram construídos a partir de interpolantes locais bilineares associados a elementos finitos isoparamétricos quadrilaterais de 4 nós. A interpolação de λ_n e λ_t pode ser feita então através de funções seccionalmente constantes ao longo dos lados dos elementos em Γ_C^h . Neste caso, $p, t \in \mathbb{R}^m$, onde m é o número de elementos em Γ_C^h , e, definindo-se $\bar{g} \in \mathbb{R}^m$ tal que sua i -ésima componente vale η vezes o valor absoluto da tensão normal (prescrita) ao longo do lado do i -ésimo elemento em Γ_C^h , tem-se

$$\lambda_n \geq 0 \iff p \geq 0$$

$$\lambda_t \in \Lambda \iff -\bar{g} \leq t \leq \bar{g}$$

Entretanto, como as matrizes M e A resultam da aproximação das integrais

$$\int_{\Gamma_c} \lambda_n (v \cdot n - s) d\Gamma \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_c} \lambda_t v_t d\Gamma$$

elas podem assumir diferentes formas. De fato, uma outra possibilidade foi considerada aqui e que corresponde a assumir multiplicadores de Lagrange concentrados nos pontos nodais ao longo de Γ_c^h . Neste caso, M, A e b podem ainda ser escritos como em (5.46), (5.47) e (5.48) desde que se admita na matriz-linha ψ , deltas de Dirac associados aos pontos nodais em Γ_c^h .

Os vetores de forças nodais equivalentes f_n^{k-1} e f_t^k podem ser expressos em função dos multiplicadores de Lagrange λ_n^{k-1} e λ_t^k respectivamente, levando-se em conta a equivalência entre o trabalho de f_n^{k-1} e f_t^k e de λ_n^{k-1} e λ_t^k para um deslocamento virtual $v = \phi q$

$$q' f_n^{k-1} = \int_{\Gamma_c} \lambda_n^{k-1} v_n d\Gamma = q' \int_{\Gamma_c} \Phi' \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \psi d\Gamma p^{k-1}$$

$$q' f_t^k = \int_{\Gamma_c} \lambda_t^k v_t d\Gamma = q' \int_{\Gamma_c} \Phi' \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \psi d\Gamma t^k$$

Tendo em vista (5.46) e (5.47), segue-se que

$$f_n^{k-1} = M p^{k-1} \quad \text{e} \quad f_t^k = A t^k$$

A primeira variante do processo iterativo para a solução

do problema bidimensional de Signorini com atrito de Coulomb pode então ser descrita como

1) Dados os multiplicadores t^{k-1} , encontrar p^k solução de

$$\min_{p \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1} \quad (5.51)$$

$$\text{com } d_1^{k-1} = M' K^{-1} f - b + M' K^{-1} A t^{k-1}$$

2) Encontrar os multiplicadores t^k solução de

$$\min_{-\bar{g}^k \leq t \leq \bar{g}^k} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k \quad (5.52)$$

$$\text{com } d_2^k = A' K^{-1} f + A' K^{-1} M p^k \quad \text{e} \quad \bar{g}^k = \eta p^k$$

3) Verificar a convergência dos multiplicadores p e t . Se não atendida: $k \leftarrow k+1$ e voltar ao passo 1.

Dada a estrutura dos conjuntos de restrições dos problemas (5.51) e (5.52) o algoritmo GSRP pode ser utilizado. Além disso, na determinação de p^k ou t^k , usa-se sempre como vetor de partida do processo iterativo os multiplicadores p^{k-1} ou t^{k-1} obtidos na etapa anterior.

Considera-se a seguir a segunda variante do processo de Panagiotopoulos, vista no item 4.4. Nesta variante, o problema P_2 passa a ser escrito como

$$\inf_{v \in K} \frac{1}{2} a(v, v) + j_g(v) - \ell(v) \quad (5.53)$$

e introduzindo-se multiplicadores de Lagrange λ_n para a restrição $v \in K$ e o conjunto Λ definido em (5.40) pode-se reescrever (5.53) como

$$\inf_{v \in V} \sup_{\substack{\lambda_n \geq 0 \\ \lambda_t \in \Lambda}} \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_n (v \cdot n - s) d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_c} \lambda_t \cdot v_t d\Gamma$$

Considerando-se o esquema de interpolação (5.41), (5.42) e (5.43) obtem-se então o problema aproximado

$$\min_q \max_{\substack{p \geq 0 \\ -\bar{g} \leq t \leq \bar{g}}} \frac{1}{2} q' K q - q' f + q' M p + q' A t - p' b \quad (5.54)$$

Como a minimização em q é irrestrita, assumindo-se K positiva-definida pode-se explicitar a variável q na condição de estacionariedade

$$Kq - f + Mp + At = 0$$

e substituir em (5.54).

O processo iterativo correspondente à segunda variante pode se escrever então como

1) Dado o vetor \bar{g}^{k-1} , encontrar p^k e t^k solução de

$$\min_{\substack{p \geq 0 \\ -\bar{g}^{k-1} \leq t \leq \bar{g}^{k-1}}} \frac{1}{2} (p' t') \begin{pmatrix} M' K^{-1} M & M' K^{-1} A \\ A' K^{-1} M & A' K^{-1} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ t \end{pmatrix} - (p' t') \begin{pmatrix} M' K^{-1} f - b \\ A' K^{-1} f \end{pmatrix}$$

2) Verificar a convergência de p e t . Se não atendida fazer

$$\bar{g}^k = \eta p^k, \quad k \leftarrow k+1$$

e voltar ao passo 1.

Vale observar que, para t^{k-1} dado, o problema de minimização da segunda variante se reduz a (5.51) e que, para p^k dado, ele

recai no problema (5.52). Assim, a primeira variante pode ser interpretada como um algoritmo numérico para a resolução do problema original onde os multiplicadores p e t não são obtidos simultaneamente (como na segunda variante) e sim através dos sub-problemas de menor porte (5.51) e (5.52).

5.4.3. O PROBLEMA DE INDENTACÃO RÍGIDA COM ATRITO

O processo iterativo visto no item 4.5 pode ser reescrito em termos de problemas de minimização como

1) Dado \bar{F}_t^{k-1} encontre $\underline{u}^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \theta^k, u^k) \in \mathbb{K}$ solução de

$$\inf_{\underline{v} \in \mathbb{K}} \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - \ell^{k-1}(\underline{v}) - \ell_{\bar{F}_t^{k-1}}(\underline{v}) \quad (5.55)$$

2) Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n(u^k)$ e $g_n = |\sigma_n(u^k)|$

3) Calcule u^* e V solução de

$$\inf_{v \in V} \frac{1}{2} a(v, v) + j^*(v) - \ell(v) - \ell_{\bar{F}_n^k}(v) \quad (5.56)$$

$$\text{com } j^*(v) = \int_{\Gamma_c} g |v_t - \sum_{i=1}^2 \alpha_i^k t_i - \theta^k h| d\Gamma$$

4) Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t(u^*)$

5) Verifique se o critério de convergência foi satisfeito. Se não, $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 1.

onde, para $\underline{v} = (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$, definiu-se

$$\ell^{k-1}(\underline{v}) = \beta_1 p_1^{k-1} + \beta_2 p_2^{k-1} + \omega M^{k-1} + \ell(v)$$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} b \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v \, d\Gamma$$

tendo em vista que as forças e o momento resultantes atuantes no sólido rígido devem ser atualizadas a cada iteração devido à introdução das forças tangenciais \bar{F}_t^{k-1} ao longo de Γ_c

$$P_1^{k-1} = P_1 - \int_{\Gamma_c} \bar{F}_t^{k-1} t_1 \, d\Gamma$$

$$P_2^{k-1} = P_2 - \int_{\Gamma_c} \bar{F}_t^{k-1} t_2 \, d\Gamma$$

$$M^{k-1} = M - \int_{\Gamma_c} \bar{F}_t^{k-1} h \, d\Gamma$$

e incluiu-se forças externas de volume (b) e de superfície (f) aplicadas ao sólido deformável.

O problema (5.55) corresponde ao caso de indentação rígida sem atrito e, a partir do Lagrangeano

$$\begin{aligned} L(\underline{v}, \lambda_n) = & \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - \ell^{k-1}(\underline{v}) - \ell_{\bar{F}_t^{k-1}}(\underline{v}) + \\ & + \int_{\Gamma_c} \lambda_n (v_n - \sum_{i=1}^2 \beta_i n_i + \omega m - s) \, d\Gamma \end{aligned}$$

e do esquema de aproximação (5.41), (5.42) e (5.43) obtém-se o Lagrangeano discretizado

$$L_h(\bar{q}, p) = \frac{1}{2} q' K q - \bar{q}' \bar{f}^{k-1} - q' f_t^{k-1} + \bar{q}' \bar{M} p + p' \bar{b} \quad (5.57)$$

onde

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{f}^{k-1} = \begin{pmatrix} f \\ P_1^{k-1} \\ P_2^{k-1} \\ M^{k-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} C \\ c_1 \\ c_2 \\ c_\theta \end{pmatrix}$$

e

$$C = \int_{\Gamma_c^h} \phi' \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \psi \, d\Gamma$$

$$c_i = \int_{\Gamma_c^h} \psi n_i \, d\Gamma \quad , \quad i=1,2$$

$$c_\theta = \int_{\Gamma_c^h} \psi m \, d\Gamma$$

$$\bar{B} = \int_{\Gamma_c^h} \psi' s \, d\Gamma$$

Seguindo o procedimento usado para se chegar à alternativa (viii), tem-se que a determinação do ponto de sela de (5.57) pode ser feita a partir da solução de

$$\min_{\substack{p \geq 0 \\ Hp = h^{k-1}}} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

com

$$P = C' K^{-1} C \quad , \quad d_1^{k-1} = C' K^{-1} (f + f_t^{k-1}) - \bar{B} \quad ,$$

$$H = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_\theta \end{pmatrix} \quad e \quad h^{k-1} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \end{pmatrix}^{k-1}$$

Como o problema (5.56) tem a mesma estrutura do problema de Duvaut-Lions, introduz-se o Lagrangeano

$$L(v, \lambda_t) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{\bar{F}_n^k}(v) + \\ + \int_{\Gamma_c} \lambda_t (v_t - \sum_{i=1}^2 \alpha_i^k t_i - \theta^k h) \, d\Gamma$$

que, utilizando-se o esquema de aproximação (5.41), (5.42) e (5.43), dá origem a

$$L_h(q, t) = \frac{1}{2} q' K q - q' f - q' f_n^k + q' A t - b_k' t \quad (5.58)$$

onde

$$b_k = \int_{\Gamma_c^h} \psi'(t_1 \ t_2 \ h) d\Gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \theta \end{pmatrix}^k = B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \theta \end{pmatrix}^k$$

Eliminando-se a variável q através da condição de estacionariedade, a determinação do ponto de sela de (5.58) pode ser feita a partir da solução de

$$\min_{-\bar{g} \leq t \leq \bar{g}} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

com

$$T = A' K^{-1} A \quad e \quad d_2^k = A' K^{-1} (f + f_n^k) + b_k$$

Finalmente, o algoritmo para o problema de indentação rígida com atrito se escreve

1) Dado o multiplicador t^{k-1} , encontrar p^k solução de

$$\min_{\substack{p \geq 0 \\ H p = h^{k-1}}} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

$$\text{com } d_1^{k-1} = C' K^{-1} (f + A t^{k-1}) - \bar{B}$$

$$h^{k-1} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \end{pmatrix} - B' t^{k-1}$$

e calcular os multiplicadores α_1^k , α_2^k e θ^k das restrições de igualdade.

2) Encontrar t^k solução de

$$\min_{-\bar{g}^k \leq t \leq \bar{g}^k} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

$$\text{com } d_2^k = A' K^{-1} (f + C p^k) + B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \theta \end{pmatrix}^k$$

$$\bar{g}^k = \eta p^k$$

3) Verificar a convergência dos multiplicadores p e t . Se não atendida: $k \leftarrow k+1$ e voltar ao passo 1.

5.4.4. O PROBLEMA DE CONTATO ENTRE DOIS SÓLIDOS COM ATRITO

O processo iterativo, visto no item 4.6, pode ser reescrito em termos de problemas de minimização como

1) Dado \bar{F}_t^{k-1} encontre $u^k = (u_k^a, u_k^b)$ e \bar{K} solução de

$$\inf_{v \in \bar{K}} \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{\bar{F}_t^{k-1}}(v) \quad (5.59)$$

2) Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n^a(u_k^a) = \sigma_n^b(u_k^b)$ e $g = \eta \bar{F}_n^k$

3) Calcule $u^* = (u_*^a, u_*^b)$ solução de

$$\inf_{v \in V} \frac{1}{2} a(v, v) + j_g(v) - \ell(v) - \ell_{\bar{F}_n^k}(v) \quad (5.60)$$

4) Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t^a(u_*^a) = \sigma_t^b(u_*^b)$

5) Verifique se o critério de convergência foi atendido. Se não: $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 1.

O problema (5.59) corresponde ao caso de contato sem atri-

to e, a partir do Lagrangeano

$$L_1[(v^a, v^b), \lambda_n] = \sum_{s=a,b} \Pi^s(v^s) + \int_{\Gamma_c} \lambda_n (v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) d\Gamma - \\ - \ell_{\bar{F}_t}^{k-1}(v)$$

onde $\Pi^s(v^s)$ é definido como em (3.75), e do esquema de aproximação

$$v^s = \phi_s q_s \quad s=a,b, \quad \lambda_n = \psi p \quad \text{e} \quad \lambda_t = \psi t \quad (5.61-63)$$

análogo a (5.41-43), chega-se ao Lagrangeano discretizado

$$L_1^h(q, p) = \frac{1}{2} q' K_{ab} q - q' f_{ab} + q' M_{ab} p - d'_{ab} p - \\ - q' f_t^{k-1}$$

onde

$$q = \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix}, \quad K_{ab} = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix}, \quad f_{ab} = \begin{pmatrix} f_a \\ f_b \end{pmatrix}, \\ d_{ab} = \begin{pmatrix} d_a \\ d_b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{ab} = \begin{pmatrix} M_a \\ M_b \end{pmatrix}$$

com

$$M_s = \int_{\Gamma_c^h} \phi_s' \begin{pmatrix} n_1^s \\ n_2^s \end{pmatrix} \psi d\Gamma, \quad d_s = \int_{\Gamma_c^h} \psi' \phi_s n_2^s d\Gamma, \quad s=a,b$$

e K_a e K_b matrizes de rigidez dos sólidos a e b respectivamente, f_a e f_b vetores de forças nodais equivalentes aos carregamentos atuantes sobre os sólidos a e b e f_t^{k-1} o vetor de forças nodais

equivalentes à distribuição de forças tangenciais em Γ_c calculadas no passo anterior.

Como no problema de Signornini, assumindo-se K_a e K_b positivas-definidas, elimina-se a variável q utilizando-se as condições de estacionariedade. Chega-se então a

$$\min_{p \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} M'_a & M'_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}$$

$$d_1^{k-1} = \begin{bmatrix} M'_a & M'_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{bmatrix} \{f_{ab} + f_t^{k-1}\} - d_{ab}$$

Com relação ao problema (5.60) introduz-se o Lagrangeano

$$L_2[(v^a, v^b), \lambda_t] = \sum_{s=a,b} \Pi^s(v^s) + \int_{\Gamma_c} \lambda_t v_t^r d\Gamma - \ell_{F_n^k}(v)$$

e, dado o esquema de aproximação (5.61-63), chega-se ao Lagrangeano discretizado

$$L_2^h[q, t] = \frac{1}{2} q' K_{ab} q - q' f + q' A_{ab} t - q' f_n^k$$

com

$$A_{ab} = \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix}, \quad A_s = \int_{\Gamma_c^h} \phi'_s \begin{bmatrix} t_1^s \\ t_2^s \end{bmatrix} \psi d\Gamma, \quad s=a,b$$

e f_n^k o vetor de forças nodais equivalentes à distribuição de forças normais em Γ_c^s calculadas no passo anterior.

De novo, elimina-se a variável q através da condição de estacionariedade do Lagrangeano L_2^h obtendo-se

$$\min_{-\bar{g} \leq t \leq \bar{g}} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

com

$$T = [A_a' \ A_b'] \begin{pmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_a \\ A_b \end{pmatrix}$$

$$d_2^k = [A_a' \ A_b'] \begin{pmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{pmatrix} \{f + f_n^k\}$$

O processo iterativo para a resolução do problema de contato entre dois sólidos deformáveis com atrito de Coulomb se escreve então

1) Dado o multiplicador t^{k-1} encontrar p^k solução de

$$\min_{p \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

$$\text{com } d_1^{k-1} = M_{ab}' K_{ab}^{-1} (f_{ab} + A_{ab} t^{k-1}) - d_{ab}$$

2) Encontrar o multiplicador t^k solução de

$$\min_{-\bar{g}^k \leq t \leq \bar{g}^k} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

$$\text{com } d_2^k = A_{ab}' K_{ab}^{-1} (f_{ab} + M_{ab} p^k) \quad \text{e} \quad \bar{g}^k = \eta p^k$$

3) Verificar a convergência dos multiplicadores p e t . Se não atendida: $k \leftarrow k+1$ e voltar ao passo 1.

ficando evidente sua semelhança com o processo relativo ao problema de Signorini com atrito.