

CAPÍTULO IV

PROBLEMAS DE CONTATO COM ATRITO

4.1. INTRODUÇÃO

Nos problemas discutidos até aqui as tensões surgidas na região do contato tinham a direção normal às superfícies em contato devido à hipótese de inexistência de atrito. Neste capítulo tais problemas são formulados sem esta hipótese simplificadora surgindo então a questão da modelagem do fenômeno do atrito.

O fenômeno do atrito é tão corriqueiro quanto importante e, apesar de estar sendo estudado há séculos, carece até hoje de um modelo contínuo satisfatório. Isto se deve evidentemente à sua natureza extremamente complexa, afetada por uma série de fatores tais como a aspereza das superfícies em contato, a presença ou não de lubrificantes e camadas de óxidos e outras impurezas, a história do carregamento, a penetração, desgaste e ruptura dos materiais da interface bem como efeitos térmicos.

Provavelmente as observações mais antigas existentes sobre a questão se encontram nos escritos de Leonardo da Vinci (vide PALMER (45)). Lá, além de desenhos do próprio autor sobre os experimentos realizados com sólidos em forma de paralelepípedos que deslizavam sobre uma superfície plana de inclinação variável, estão as conclusões:

- i) A resistência por atrito é proporcional à aspereza.
- ii) A resistência por atrito dobra quando a carga dobra.
- iii) A resistência por atrito para uma dada carga independe da área de contato: a mesma força era necessária para deslocar o bloco sobre o plano horizontal qualquer que fosse a face sobre a qual ele estivesse apoiado.
- iv) Todo corpo, por atrito, resiste com $1/4$ do seu peso em uma superfície plana polida.
- v) O corpo se move sempre que a inclinação da superfície acarrete que $1/4$ do seu peso atue na direção do movimento.

Entretanto, o primeiro relato a uma audiência de profissionais sobre experimentos de medição da resistência por atrito foi feito por Guillaume Amontons em 1699 na Academia Real de Ciências de Paris. Amontons concluiu que a resistência por atrito:

- i) É proporcional à força que a superfície superior exerce sobre a inferior,
- ii) para os diferentes materiais usados ela vale aproximadamente $1/3$ daquela força e
- iii) é independente da área de contato.

Assim, as primeiras duas, (i) e (iii), das chamadas leis clássicas de atrito foram enunciadas publicamente pela primeira vez por Amontons e basicamente nos mesmos termos empregados hoje.

A contribuição mais celebrada todavia foi dada por Charles Augustin Coulomb (em pesquisa bastante estimulada pela indústria de guerra francesa, TABOR (46)) publicada em 1785. Seu trabalho é importante por:

- i) Distinguir os fatores que controlam a força de atrito estático daqueles que controlam as forças de atrito cinético.
- ii) Confirmar em ambos os casos as leis de Amontons relativas à carga e à área de contato.
- iii) Em ambos os casos a força de atrito depende da natureza dos materiais em contato e do revestimento de suas superfícies.
- iv) A força de atrito estática depende da duração do intervalo de tempo em que as superfícies estiveram em contato.
- v) A força de atrito cinético independe da velocidade.
- vi) Pelo menos parte da força de atrito é devida à coesão de moléculas nas superfícies em contato.

É importante observar que o aparato usado por Coulomb em seus experimentos não era suficientemente preciso e somente com a publicação em 1831 dos cuidadosos experimentos de Arthur Morin é que as conclusões de Coulomb (ii) e especialmente (v) passaram a ter um nível de exatidão e generalidade razoável, maior inclusive do que o suposto pelo próprio Coulomb.

A partir destes estudos pioneiros, efetuados principalmente tendo em mente corpos rígidos e deslocamentos relativos significativos, consolidaram-se as chamadas leis clássicas de atrito. Denotando por F e N as resultantes das forças de atrito e da compressão normal, respectivamente, e por \dot{u}_t a velocidade tangencial relativa tem-se:

- i) A força de atrito, no início e durante o deslizamento, é proporcional à força normal de contato

$$|F| = \mu N$$

O coeficiente de proporcionalidade recebe o nome de coefi -

ciente de atrito e usualmente dois valores são assumidos: um correspondente ao início do deslizamento (coef. estático) e outro (cinético) que se aplica durante o deslizamento.

- ii) O coeficiente de atrito $\bar{\mu}$ é independente da área aparente do contato.
- iii) O coeficiente de atrito estático é maior que o cinético.
- iv) O coeficiente de atrito cinético independe da velocidade.
- v) Quando o movimento tangencial ocorre, a força de atrito age na mesma direção porém em sentido oposto

$$F = -\mu N \frac{u_t}{|u_t|}$$

Hoje, segundo TABOR (46), reconhece-se três elementos básicos envolvidos no atrito de sólidos não lubrificados:

- i) A área de contato real entre as superfícies.
- ii) A natureza da ligação que ocorre na interface onde o contato se dá.
- iii) A maneira pela qual o material nas regiões em contato e suas proximidades sofre cisalhamento e ruptura durante o deslizamento.

Os problemas a serem estudados aqui se enquadram na categoria de atrito seco quasi-estático, segundo a divisão geral sugerida por ODEN e MARTINS (47), e correspondem à aplicação lenta e gradual das cargas externas dando origem a deslocamentos normais e tangenciais infinitesimais. Nesta categoria os principais elementos intervenientes (ODEN e MARTINS (47)) são a deformação plástica das asperezas, a formação de junções elasto-plás

ticas entre as superfícies em contato, o forte acoplamento entre deformações plásticas normais e tangenciais e os mecanismos dissipativos oriundos da deformação (dependente da história) das junções e a possível fratura das mesmas.

Como exemplos (do conhecimento do autor) de modelos propostos para levar em conta, de alguma forma, nestes problemas, o comportamento elasto-plástico da deformação da interface, pode-se citar FREDRIKSSON (15), ODEN e PIRES (48,49), MICHALOWSKI e MROZ (50) e CURNIER (51) sendo que apenas os dois primeiros autores apresentam algoritmos computacionais e exemplos de aplicação em problemas de elasticidade. Na maioria dos estudos da literatura, o atrito é introduzido em problemas de elasto-estática via uma extensão das leis de Amontons e Coulomb aos sólidos deformáveis, postulando sua validade ponto a ponto e substituindo a velocidade relativa pelo deslocamento relativo

$$|\sigma_t(u)| < \eta |\sigma_n(u)| \rightarrow u_t = 0$$

$$|\sigma_t(u)| = \eta |\sigma_n(u)| \rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda \sigma_t(u)$$

Esta será a lei de atrito utilizada aqui e que, apesar de sua aparência relativamente simples, acarreta dificuldades consideráveis como se verá nos itens seguintes.

4.2. O PROBLEMA DE SIGNORINI COM ATRITO

No problema de Signorini (Cap. 3) é feita a hipótese de que a tensão tangencial na parte Γ_c do contorno do corpo em contato com a superfície rígida se anula devido à inexistência de

atrito. A inclusão do atrito altera esta condição. Assim, o problema de Signorini com a consideração do atrito do tipo de Coulomb pode ser escrito em sua forma forte como

$$\operatorname{div} \sigma(u) + b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.1)$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f \quad (4.2)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{se } u \cdot n < s \quad \text{então } \sigma_n &= 0 \\ &\sigma_t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$\text{se } u \cdot n = s \quad \text{então } \sigma_n \leq 0 \quad (4.5)$$

$$\text{se } |\sigma_t| < \eta |\sigma_n| \quad \text{então } u_t = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{se } |\sigma_t| = \eta |\sigma_n| \quad \text{então } \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda \sigma_t \quad (4.7)$$

em Γ_c

onde, para simplificar a notação, σ_n denota o valor algébrico da componente normal da tensão em Γ_c e σ_t denota a componente tangencial da tensão em Γ_c

$$\sigma_n = \sigma(u)n \cdot n$$

$$\sigma_t = \sigma(u)n - \sigma_n n$$

e $|\cdot|$ indica valor absoluto de um real ou módulo de um vetor conforme o caso.

Para se obter uma formulação variacional para o problema define-se o conjunto de campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis

$$K = \{w: w \text{ é suf.regular, } w=0 \text{ em } \Gamma_u, w \cdot n - s \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\} \quad (4.8)$$

Por procedimento idêntico ao do Cap. 2, utilizando-se $v \in \mathbb{K}$, (4.1), (4.2) e o teorema da divergência, tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_c} [\sigma_n(v_n - u_n) + \sigma_t \cdot (v_t - u_t)] d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.9)$$

Por outro lado, pode-se mostrar que a inequação

$$\sigma_t \cdot (v_t - u_t) + \eta |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_c, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.10)$$

é equivalente às condições (4.6) e (4.7). De fato, reescrevendo (4.10) como

$$\sigma_t \cdot v_t + \eta |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|) \geq \sigma_t \cdot u_t$$

e aplicando a desigualdade para $v \in \mathbb{K}$ tal que $v \cdot n = 0$ em Γ_c e $-v \in \mathbb{K}$ tem-se, somando membro a membro

$$\eta |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|) \geq \sigma_t \cdot u_t$$

ou, introduzindo o ângulo θ entre u_t e σ_t

$$\eta |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|) \geq |\sigma_t| |u_t| \cos \theta \quad (4.11)$$

Assim, se $|\sigma_t| = \eta |\sigma_n|$ tem-se

$$|v_t| \geq |u_t| (\cos \theta + 1)$$

o que acarreta $\cos \theta = -1$, ou seja

$$u_t = -\lambda \sigma_t \quad \lambda > 0$$

Se, entretanto, $|\sigma_t| < \eta |\sigma_n|$ tem-se de (4.11) que

$$|v_t| \geq |u_t| \left(1 + \frac{|\sigma_t|}{n|\sigma_n|} \cos \theta\right)$$

o que acarreta $u_t = 0$.

Retomando-se (4.9) e levando em conta (4.10) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega &\geq \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} [\sigma_n(v_n - u_n) - n|\sigma_n|(|v_t| - |u_t|)] d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \sigma_n(v_n - u_n) &= \sigma_n(v_n - s) - \sigma_n(u_n - s) \\ &= \sigma_n(v_n - s) \geq 0 \end{aligned}$$

já que u é a solução do problema e $v \in \mathbb{K}$. Logo, a inequação que governa o problema pode ser escrita

$$u \in \mathbb{K}$$

$$a(u, v-u) + j(u, v) - j(u, u) \geq \ell(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega \\ j(u, v) &= \int_{\Gamma_c} n|\sigma(u)n \cdot n| |v_t| d\Gamma \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma \end{aligned}$$

Mostra-se também que se u satisfaz a inequação (4.12) então u é solução do problema de valor de contorno (4.1-7). Para isto aplica-se o teorema da divergência a (4.12) obtendo-se

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(u) + b) \cdot (v - u) d\Omega \leq \int_{\Gamma_f} (\sigma(u)n - f) \cdot (v - u) d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_c} [\sigma(u)n \cdot (v - u) + \eta |\sigma(u)n| (|v_t| - |u_t|)] d\Gamma$$

$\forall v \in \mathbb{K} \quad (4.13)$

Tomando-se $v = u \pm w$ com w suficientemente regular e que se anula em Γ , chega-se, pelo lema fundamental do cálculo das variações, à equação de equilíbrio em Ω (4.1). Um procedimento análogo com w tal que se anula em $\Gamma_u \cup \Gamma_c$ fornece a condição de contorno em Γ_f (4.2). A inequação (4.13) se reduz agora a

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma_n (v_n - u_n) + \sigma_t \cdot (v_t - u_t) + \eta |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|)] d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.14)$$

e fazendo $v = u + w$ com w tal que em Γ_c sua componente tangencial seja nula e a componente normal seja negativa tem-se

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n w_n d\Gamma \geq 0$$

o que acarreta

$$\sigma_n \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.15)$$

Considerando em (4.14) campos v^1 e v^2 pertencentes a \mathbb{K} tais que $v_n^1 = s$, $v_n^2 = 2u_n - s$ e cujas componentes tangenciais satisficam $v_t^1 = v_t^2 = u_t$ tem-se

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n (u_n - s) d\Gamma = 0$$

o que juntamente com (4.15) e o fato que $u \in \mathbb{K}$ fornece

$$\sigma_n (u_n - s) = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.16)$$

Para derivar as condições de contorno (4.6) e (4.7) toma-se v tal que em Γ_c se tenha $v_n = u_n$ e $v_t = \pm \rho w$ com $\rho \geq 0$ e $w \geq 0$. Fazendo $\rho \rightarrow \infty$ tem-se de (4.14)

$$\int_{\Gamma_c} [\pm \sigma_t \cdot w + \eta |\sigma_n| w] d\Gamma \geq 0 \quad \forall w \geq 0$$

o que acarreta

$$|\sigma_t| \leq \eta |\sigma_n| \quad (4.17)$$

Fazendo agora $\rho = 0$ tem-se de (4.14)

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma_t \cdot u_t + \eta |\sigma_n| |u_t|] d\Gamma \leq 0$$

ou, introduzindo o ângulo θ entre u_t e σ_t

$$\int_{\Gamma_c} \left(\cos \theta + \frac{\eta |\sigma_n|}{|\sigma_t|} \right) |u_t| d\Gamma \leq 0$$

o que, juntamente com (4.17), dá

$$\left(\cos \theta + \frac{\eta |\sigma_n|}{|\sigma_t|} \right) |u_t| = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.18)$$

As relações (4.17) e (4.18) são equivalentes às condições de contorno (4.6) e (4.7).

Fica assim estabelecida a equivalência entre resolver o problema de valor de contorno (4.1-7) e a inequação (4.12). Esta equivalência é formal uma vez que não se especificou rigorosamente a classe de funções onde a solução é procurada.

A questão de existência de soluções para o problema de

Signorini com atrito de Coulomb é uma questão delicada. Do conhecimento do autor, apenas NECAS et al (52) demonstraram a existência de soluções para um problema desta classe. Foi considerada uma faixa infinita em \mathbb{R}^2 ,

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < 1\},$$

com deslocamento prescrito $u = u_0$ em Γ_u ,

$$\Gamma_u = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, x_2 = 1\},$$

apoiada rígida e unilateralmente em Γ_c ,

$$\Gamma_c = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, x_2 = 0\},$$

e submetida a forças de volume b . O material é assumido elástico, linear, isotrópico com constantes de Lamé μ e λ . Os autores mostram que a existência de soluções fica condicionada a um coeficiente de atrito $\eta(x_1)$ suficientemente pequeno

$$\max_{x_1} |\eta(x_1)| < \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda+3\mu}}$$

Entretanto, para o caso geral da inequação (4.12), a questão da existência e unicidade da solução não está resolvida.

A origem da dificuldade em se demonstrar a existência de soluções para (4.12) é que, no caso do corpo tridimensional considerado, o conjunto natural aonde a solução seria procurada consiste dos campos de deslocamentos u quadrado-integráveis com derivadas quadrado-integráveis em Ω , ou seja, é o espaço de Hilbert denotando usualmente por $[H^1(\Omega)]^3$. Ocorre que, neste caso, não se pode garantir regularidade suficiente da componente normal da

tensão em Γ_c de maneira que a operação $|\sigma(u)n \cdot n|$ faça sentido.

Em 1980 DUVAUT (53) sugere regularizar esta componente através de uma transformação linear contínua de $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ em $L_2(\Gamma_c)$ que conserve a positividade. Obtem-se assim o novo problema

$$u \in \mathbb{K}$$

$$a(u, v-u) + \int_{\Gamma_c} \eta |\sigma_n^*| (|v_t| - |u_t|) d\Gamma \geq \ell(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.19)$$

Para este problema, supondo b e f quadrado-integráveis, DUVAUT (53) obtem os resultados seguintes:

- i) O problema (4.19) possui pelo menos uma solução.
- ii) Existe $\bar{\eta}$ tal que se o coeficiente de atrito η satisfaz

$$0 < \eta < \bar{\eta}$$

o problema admite solução única.

- iii) Denotando por u_η a solução de (4.19) para um coeficiente de atrito η , tem-se que se $\eta \rightarrow 0$ então $u_\eta \rightarrow u$ (fracamente) onde u é a solução do problema de Signorini sem atrito.

A regularização proposta por Duvaut corresponde, como se verá, à introdução de uma lei de atrito não-local.

Vale ressaltar aqui que não é somente do ponto de vista matemático que a adoção da lei clássica de Coulomb para problemas de contato entre sólidos deformáveis é questionável. Do ponto de vista físico, reconhece-se que a lei de Coulomb é aplicável a corpos rígidos e deslizamentos relativos finitos. Evidentemente Coulomb não tencionava aplicar sua lei puntualmente em problemas de valor de contorno em elasticidade mesmo porque o

conceito de tensão e as equações da elastostática s̄o se desenvolveram muitas d̄ecadas ap̄os o estabelecimento de sua lei. Al̄em disso, a primeira formulação bem sucedida de um problema de contato em elasticidade s̄o ocorreu mais de um s̄eculo depois de formulada a lei de Coulomb.

Dois aspectos do fen̄omeno real de atrito entre corpos met̄alicos sugerem a adoção de leis alternativas. O primeiro deles ̄e o car̄ater n̄o-local do mecanismo pelo qual tens̄oes normais s̄ao distribuídas: junções formadas por asperezas deformadas e n̄o concentradas em pontos isolados da superfície de contato. Uma lei n̄o-local estabelece que o movimento de um ponto de contato entre dois corpos deform̄aveis ocorrer̄a quando a tens̄ao cizalhante neste ponto atingir um valor crítico proporcional a uma m̄edia ponderada da tens̄ao normal numa vizinhança do ponto.

O segundo aspecto ̄e a evid̄encia experimental da exist̄encia de pequenos deslocamentos tangenciais dos pontos na superfície de contato devido ̄as deformações el̄asticas e elasto-pl̄asticas das junções. Este fen̄omeno n̄o ̄e levado em conta na lei cl̄assica de Coulomb que procura modelar apenas o deslizamento relativo que advem com a ruptura dessas junções.

Assim, denotando por u_t^r a componente tangencial do deslocamento relativo de um ponto $x(x_1, x_2, x_3)$ na superfície de contato entre dois s̄olidos deform̄aveis e por $\sigma_n(u)$ e $\sigma_t(u)$, respectivamente, o valor alḡebrico da componente normal e a componente tangencial do vetor tens̄ao na superfície de contato, associado ao campo de deslocamentos u , ODEN e PIREs (48) prop̄oem a lei n̄o local

$$\text{se } |\sigma_t(u)| < \eta S_\rho(\sigma_n(u)) \text{ então } u_t^r(x) = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{se } |\sigma_t(u)| = \eta S_\rho(\sigma_n(u)) \text{ então } \exists \lambda \geq 0: u_t^r(x) = -\lambda \sigma_t(x)$$

onde $S_\rho: H^{-1/2}(\Gamma_c) \rightarrow L^2(\Gamma_c)$ é o operador integral

$$S_\rho(\sigma_n(u))(x) = \int_{\Gamma_c} \omega_\rho(|x-y|)(-\sigma_n(u(y))) d\Gamma, \quad x, y \in \Gamma_c \quad (4.21)$$

que regulariza a tensão normal e ω_ρ é uma função regular, positiva e cuja integral é igual à unidade. Uma possibilidade considerada para ω_ρ é

$$\omega_\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{\rho^2}{x^2 - \rho^2}\right) & |x| < \rho \\ 0 & |x| \geq \rho \end{cases} \quad (4.22)$$

que é uma função simétrica em relação à origem, infinitamente diferenciável e cujo suporte tende a zero se $\rho \rightarrow 0$. A constante c é fixada de maneira a se ter unitária a integral de ω_ρ .

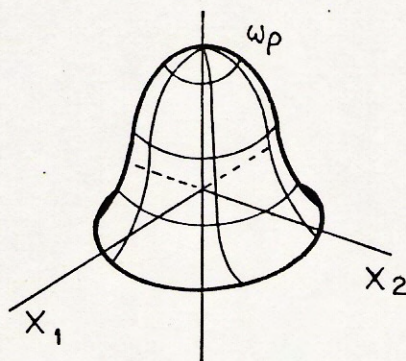


Figura 4.1

Apesar de não-local a lei (4.20) ainda mantém, como a lei clássica de Coulomb, a característica de que não há deslocamento algum de pontos de um corpo em relação ao outro enquanto a ten-

são tangencial na superfície de contato for inferior a um certo valor crítico. Entretanto, os experimentos mostram que por menor que seja a força tangencial (não-nula) aplicada estes deslocamentos sempre existem. Para levar em conta este efeito aqueles autores propõem uma família de leis não-lineares da forma

$$\sigma_t(u) = -g\phi_\zeta(|u_t^r|) \frac{u_t^r}{|u_t^r|} \quad (4.23)$$

onde $\phi_\zeta(\cdot)$ é uma função contínua, monótona, dos reais não-negativos e dependente do parâmetro positivo ζ e tal que satisfaz:

$$\begin{aligned} \text{i) } & 0 \leq \phi_\zeta(r) \leq 1 & r \geq 0 \\ \text{ii) } & \lim_{\zeta \rightarrow 0} \phi_\zeta(r) = 1 & r > 0 \\ \text{iii) } & \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_\zeta(r) = 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Em (4.23) g é uma função não-negativa dos deslocamentos u representando o valor limite que a tensão tangencial pode atingir. No caso de uma lei local tem-se $g = \eta |\sigma_n(u)|$, enquanto que $g = \eta S_\rho(\sigma_n(u))$ no caso não-local.

Como exemplos de possíveis funções ϕ_ζ , ODEN e PIRES (48) fornecem

$$\text{a) } \phi_\zeta(|u_t^r|) = \begin{cases} 1 & \text{se } |u_t^r| > \zeta \\ |u_t^r|/\zeta & \text{se } |u_t^r| \leq \zeta \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\text{b) } \phi_\zeta(|u_t^r|) = \tanh \frac{|u_t^r|}{\zeta} \quad (4.26)$$

Em uma dimensão os gráficos correspondentes seriam

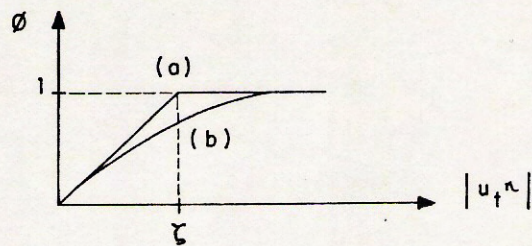


Fig. 4.2

O parâmetro ζ fornece a inclinação das curvas na origem e representa portanto uma medida da rigidez das junções (elasto-plástica no caso (a) e elástica não-linear no caso (b)).

Introduzindo-se o efeito não-local em (4.23) tem-se a forma geral

$$\sigma_t(u) = -\eta S_\rho(\sigma_n(u)) \phi_\zeta(|u_t^r|) \frac{u_t^r}{|u_t^r|} \quad (4.27)$$

O problema de Signorini com a lei de atrito não-local (4.27) consiste portanto, em sua formulação forte, em encontrar o campo de deslocamentos u solução do problema de valor de contorno

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(u) + b &= 0 \\ \sigma(u) &= \mathbb{D}\varepsilon(u) \\ \varepsilon(u) &= \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 && \text{em } \Gamma_u \\ \sigma(u)n &= f && \text{em } \Gamma_f \end{aligned} \right\} \quad (4.28-36)$$

$$\left. \begin{aligned} u \cdot n - s &\leq 0 \\ \sigma_n(u) &\leq 0 \\ \sigma_n(u)(u \cdot n - s) &= 0 \\ \sigma_t(u) &= -\eta S_\rho(\sigma_n(u)) \phi_\zeta(|u_t|) \frac{u_t}{|u_t|} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_c$$

com S_ρ como em (4.21) e ϕ_ζ satisfazendo (4.24).

Introduzindo o funcional

$$j_{\rho,\zeta}(u,v) = \int_{\Gamma_c} \eta S_\rho(\sigma_n(u)) \psi_\zeta(|v_t|) d\Gamma$$

onde ψ_ζ é a primitiva de ϕ_ζ , ($\phi_\zeta = \psi'_\zeta$) ou seja

$$\psi_\zeta |v_t| = \begin{cases} |v_t|^2 / 2\zeta & |v_t| \leq \zeta \\ |v_t| - \zeta / 2 & |v_t| \geq \zeta \end{cases}$$

quando se adota ϕ_ζ de acordo com (4.25) e

$$\psi_\zeta |v_t| = \zeta \log_e \cosh \frac{|v_t|}{\zeta}$$

quando se adota (4.26), ODEN e PIRES (48) estabelecem o problema variacional

$$u \in \mathbb{K}$$

$$a(u, v-u) + j_{\rho,\zeta}(u, v) - j_{\rho,\zeta}(u, u) \geq \ell(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.37)$$

e mostram que se $u \bar{e}$ uma solução suficientemente regular de (4.37) então também satisfaz (4.28-36) e toda solução de (4.28-36) satisfaz (4.37).

Neste ponto é interessante evidenciar alguns casos particulares importantes do problema. O primeiro deles é obtido fazendo $\rho \rightarrow 0$. Neste caso obtem-se o problema de Signorini com a lei local não-linear

$$\sigma_t(u) = -\eta |\sigma_n(u)| \phi_\zeta(|u_t^r|) \frac{u_t^r}{|u_t^r|}$$

e substituindo-se em (4.37) o funcional $j_{\rho,\zeta}(\cdot, \cdot)$ por

$$j_{\zeta}(u, v) = \int_{\Gamma_C} \eta |\sigma_n(u)| \psi_{\zeta}(|v_t|) d\Gamma$$

obtem-se a formulação variacional correspondente.

Fixando $\rho > 0$ e fazendo agora $\zeta \rightarrow 0$ a equação (4.27) é substituída pela lei não-local (4.20) e a formulação variacional equivalente é obtida substituindo-se $j_{\rho, \zeta}(\cdot, \cdot)$ por

$$j_{\rho}(u, v) = \int_{\Gamma_C} \eta S_{\rho}(\sigma_n(u)) |v_t| d\Gamma$$

Finalmente, fazendo-se $\rho \rightarrow 0$ e $\zeta \rightarrow 0$ recupera-se a lei local clássica de Coulomb (4.6-7) e a formulação variacional correspondente (4.12).

Como se verá adiante, um caso particular importante do ponto de vista computacional corresponde a prescrever-se um valor limite g para a tensão tangencial em Γ_C . Duas situações podem ser consideradas então:

- i) fixando-se $\zeta > 0$
- ii) fazendo-se $\zeta \rightarrow 0$

Na primeira situação o problema corresponde a substituir (4.27) pela lei (4.23). A formulação variacional equivalente é

$$u \in \mathbb{K}$$

$$a(u, v-u) + j_{g, \zeta}(v) - j_{g, \zeta}(u) \geq \ell(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (4.38)$$

com

$$j_{g, \zeta}(v) = \int_{\Gamma_C} g \psi_{\zeta}(|v_t|) d\Gamma \quad (4.39)$$

Além disso, mostra-se que a solução da inequação variacional (4.

38) minimiza no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis K o funcional

$$\frac{1}{2} a(v,v) + j_{g,\zeta}(v) - \ell(v)$$

Na segunda situação ($\zeta \rightarrow 0$) as condições

$$\begin{aligned} \text{se } |\sigma_t(u)| < g & \quad \text{então } u_t = 0 \\ \text{se } |\sigma_t(u)| = g & \quad \text{então } \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda \sigma_t \end{aligned} \tag{4.40}$$

substituem (4.27) e a inequação variacional correspondente tem a forma de (4.38) com $j_{g,\zeta}(\cdot)$ substituído pelo funcional

$$j_g(v) = \int_{\Gamma_c} g |v_t| d\Gamma$$

Também neste caso, a solução do problema minimiza em K o funcional

$$\frac{1}{2} a(v,v) + j_g(v) - \ell(v)$$

É importante notar que a lei de atrito empregada (4.40), embora local, não é a lei clássica de Coulomb.

Finalmente, em relação à existência e unicidade de soluções os resultados obtidos pelos autores são

- i) O problema (4.38) com $g \geq 0$ suficientemente regular tem solução única.
- ii) O problema (4.37) com b e f suficientemente regulares tem pelo menos uma solução.
- iii) O problema (4.37) com o coeficiente de atrito η suficientemente pequeno tem solução única.

Mais detalhes podem ser encontrados em ODEN e PIRES (48), DEMKOWICZ e ODEN (54) e COCU (55).

Deve-se notar que o problema correspondente às condições (4.40), porém sem levar em conta as restrições unilaterais de contato, foi o primeiro a ser estudado, em 1971, por DUVAUT e LIONS (56). Devido à importância fundamental que este problema desempenhará na solução numérica dos problemas de contato com atrito, dedica-se o próximo item especialmente à apresentação dos resultados obtidos por Duvaut e Lions.

4.3. O PROBLEMA DE DUVAUT E LIONS

Considere o sólido deformável que ocupa o domínio $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ de fronteira regular Γ que é composta de três partes disjuntas Γ_u , Γ_f e Γ_c onde estão prescritos respectivamente os deslocamentos (supostos nulos por simplicidade), as forças $f \in L^2(\Gamma_f)$ e a tensão normal $\sigma_n = \bar{F}_n$, conforme esquematizado na Figura 4.3.

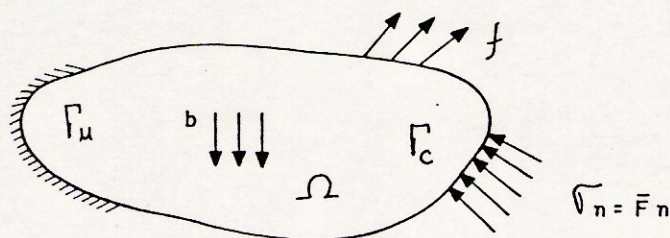


Fig. 4.3

O material do corpo é elástico linear e as deformações e deslocamentos são assumidos infinitesimais. Forças de volume $b \in L^2(\Omega)$ atuam sobre o corpo e em Γ_c o deslocamento tangencial

obedece às condições

$$\text{se } |\sigma_t| < g \quad \text{então } u_t = 0$$

$$\text{se } |\sigma_t| = g \quad \text{então } \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda \sigma_t$$

onde

$$g = \eta |\bar{F}_N|$$

e η é o coeficiente de atrito.

Este problema, que será chamado aqui problema de Duvaut-Lions, não é um problema de contato e, em sua formulação forte, se escreve como

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(u) + b &= 0 \\ \sigma(u) &= \mathbb{D}\varepsilon(u) \\ \varepsilon(u) &= \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^t) \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 & \text{em } \Gamma_u \\ \sigma(u)n &= f & \text{em } \Gamma_f \end{aligned} \right\} \quad (4.41-49)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma(u)n \cdot n &= \bar{F}_N \\ |\sigma_t| < g &\rightarrow u_t = 0 \\ |\sigma_t| = g &\rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda \sigma_t \\ g &= \eta |\bar{F}_N| \end{aligned} \right\} \text{ em } \Gamma_c$$

Por um procedimento análogo ao descrito no item 4.2 mostra-se a equivalência entre o problema de valor de contorno (4.41-49) e a inequação variacional

$$u \in V$$

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_c} g(|v_t| - |u_t|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \bar{F}_N (v_n - u_n) d\Gamma \quad \forall v \in V$$

onde V é o espaço dos deslocamentos cinematicamente admissíveis

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^3 : v=0 \text{ em } \Gamma_u\} .$$

Introduzindo a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ e o funcional linear $\ell(\cdot)$ já definidos anteriormente e os funcionais

$$j_g(v) = \int_{\Gamma_c} g|v_t| d\Gamma \\ \ell_{\bar{F}_N}(v) = \int_{\Gamma_c} \bar{F}_N v_n d\Gamma$$

a inequação variacional do problema se escreve

$$u \in V$$

$$a(u, v-u) + j_g(v) - j_g(u) \geq \ell(v-u) + \ell_{\bar{F}_N}(v-u) \quad \forall v \in V \quad (4.50)$$

Duvaut e Lions mostram que se o problema de valor de contorno (4.41-49) tem uma solução u esta minimiza em V o funcional

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_c} \bar{F}_N v_n d\Gamma + \int_{\Gamma_c} g|v_t| d\Gamma \quad (4.51)$$

O primeiro termo de (4.51) é a energia de deformação, os três termos seguintes o trabalho (com sinal trocado) das forças

externas aplicadas e o último termo o trabalho (com sinal trocado) das forças de atrito, todos associados ao campo de deslocamentos v .

Reescrevendo o funcional (4.51) como

$$F(v) = \Pi(v) + j_g(v)$$

observa-se que $\Pi(v)$

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{\overline{F}_N}(v)$$

é convexo e diferenciável no sentido de Gateaux e $j_g(v)$ é convexo e contínuo (mas não-diferenciável). Assim, todas as hipóteses do teorema de Weierstrass generalizado estão satisfeitas exceto a coercividade.

Neste ponto convém considerar em separado duas situações:

i) Movimentos de corpo rígido impedidos, ou seja

$$V \cap R = \{0\} \quad e$$

ii) Possibilidade de movimentos rígidos, ou seja

$$V \cap R \neq \emptyset \quad e \quad V \cap R \neq \{0\}$$

No primeiro caso a convexidade estrita de $\Pi(v)$ acarreta a existência de um campo de deslocamento u único que minimiza F em V .

No segundo caso Duvaut e Lions mostram que o problema só admite solução se

$$|\ell(r) + \ell_{\overline{F}_N}(r)| \leq j_g(r) \quad \forall r \in R \quad (4.52)$$

onde R é o espaço, de dimensão finita, dos movimentos rígidos in finitesimais do sólido

$$r \in R \rightarrow a(r, r) = 0$$

Sob a hipótese mais forte

$$\exists c > 0 : j_g(r) - |\ell(r) + \ell_{F_N}(r)| \geq c \left[\int_{\Omega} r \cdot r \, d\Omega \right]^{1/2} \quad \forall r \in R \quad (4.53)$$

os autores mostram a coercividade de F em V e, conseqüentemente, a existência do elemento u que minimiza F em V .

Em relação à unicidade da solução eles mostram que se u_1 e u_2 são elementos distintos que minimizam F então tem-se

$$u_1 - u_2 \in R$$

e, como consequência, os campos de deformações e tensões são unicos.

Deve-se observar que a não-diferenciabilidade do funcional F dificulta a obtenção de soluções numéricas. De fato, a aplicação direta de um processo de discretização como o método dos elementos finitos dará origem a um problema de minimização, em \mathbb{R}^n , de uma função não diferenciável. Uma maneira de contornar esta dificuldade consiste em utilizar uma aproximação $j_g^r(\cdot)$ para o funcional $j_g(\cdot)$ que seja convexa, diferenciável no sentido de Gateaux e que se aproxime de $j_g(\cdot)$ à medida que o parâmetro r tenda a zero.

A título de ilustração a Figura 4.4 mostra um exemplo de regularização do funcional não-diferenciável $x \rightarrow |x|$ para $x \in \mathbb{R}$.

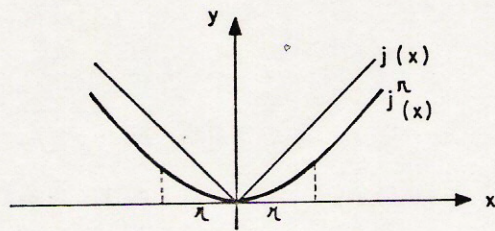


Fig. 4.4

$$j(x) = |x|$$

$$j^r(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & |x| \leq r \\ |x| - \frac{r}{2} & |x| \geq r \end{cases}$$

Substituindo portanto $j_g(\cdot)$ por $j_g^r(\cdot)$ o elemento que minimiza o funcional regularizado

$$F^r(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j_g^r(v) - \ell(v) \quad (4.54)$$

no espaço vetorial V fica caracterizado pela equação variacional, em geral não-linear,

$$u^r \in V$$

$$a(u^r, v) + \langle D_{j_g^r}(u^r), v \rangle = \ell(v) \quad \forall v \in V \quad (4.55)$$

onde

$$\langle D_{j_g^r}(u), v \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha} j_g^r(u + \alpha v) \quad (4.56)$$

Para cada $r > 0$ fixado, os resultados relativos à existência e unicidade do elemento minimizante u^r são os mesmos do caso de $j_g(\cdot)$ não-diferenciável, ou seja, (4.52) e (4.53) com $j_g(\cdot)$ substituído por $j_g^r(\cdot)$.

Mostra-se ainda que a sequência de soluções u^r converge fracamente para a solução u do problema original, a medida que r tende a zero.

Uma outra maneira de contornar o problema da não-diferenciabilidade do funcional $F(\cdot)$ é através da idéia de dualidade (GLOWINSKI, LIONS e TRÉMOLIÈRES (7)). O termo não-diferenciável de F

$$\int_{\Gamma_c} g |v_t| d\Gamma$$

é equivalente a

$$\sup_{\Lambda} \int_{\Gamma_c} \lambda_t \cdot v_t d\Gamma$$

onde

$$\Lambda = \{ \lambda_t \in (L_2(\Gamma_c))^3 : |\lambda_t(x)| \leq g(x) \quad x \in \Gamma_c \} \quad (4.57)$$

é um conjunto convexo fechado formado por multiplicadores de Lagrange. Assim, o problema de minimização de F pode ser substituído pela busca do ponto de sela $(v^*, \lambda_t^*) \in (V \times \Lambda)$

$$L_2(v^*, \lambda_t) \leq L_2(v^*, \lambda_t^*) \leq L_2(v, \lambda_t^*) \quad \forall v \in V, \lambda_t \in \Lambda \quad (4.58)$$

do Lagrangeano

$$L_2(v, \lambda_t) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) - \ell_{F_N}(v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_t \cdot v_t d\Gamma \quad (4.59)$$

4.4. UM PROCESSO ITERATIVO

Em 1975 PANAGIOTOPOULOS (32) propôs um procedimento iterativo para a obtenção de uma solução para o problema de Signorini com atrito descrito pela lei clássica de Coulomb. Este procedi -

mento lança mão de dois subproblemas mais simples e já discutidos aqui. São eles:

P_1 : O problema de Signorini sem atrito e com o carregamento adicional de forças prescritas contidas no plano tangente em cada ponto do contorno Γ_C onde o contato pode vir a existir.

Esquemáticamente:

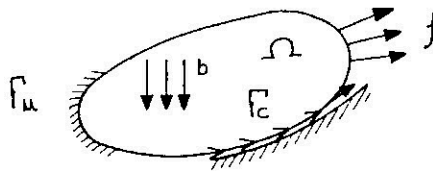


Fig. 4.5

P_2 : O problema de Duvaut-Lions correspondente ao atrito de Coulomb no contorno Γ_C onde uma distribuição de forças normais compressivas \bar{F}_n é suposta dada. Esquemáticamente:

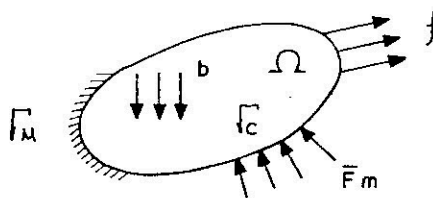


Fig. 4.6

Assim, o problema original fica substituído por uma sequência de subproblemas $P_1 P_2 P_1 P_2 \dots$ definida a seguir

i) Resolver o problema de Signorini sem atrito, P_1 , com uma dada distribuição de forças tangenciais em Γ_C .

Calcular as tensões normais desenvolvidas em Γ_C .

- ii) Resolver o problema de Duvaut-Lions, P_2 , com as tensões normais obtidas em (i) aplicadas como forças externas em Γ_C .
Calcular as tensões tangenciais desenvolvidas em Γ_C .
- iii) Verificar a convergência do processo. Se não atendida voltar ao passo (i).

Introduzindo o funcional

$$\ell_{\bar{F}_t}(v) = \int_{\Gamma_C} \bar{F}_t \cdot v \, d\Gamma$$

onde \bar{F}_t é uma dada distribuição de forças tangenciais em Γ_C , o procedimento descrito anteriormente pode ser escrito como

1. Dado \bar{F}_t^{k-1} encontre u^k solução de P_1

$$u^k \in \text{IK}$$

$$a(u^k, v - u^k) \geq \ell(v - u^k) + \ell_{\bar{F}_t^{k-1}}(v - u^k) \quad \forall v \in \text{IK}$$

2. Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n(u^k)$ e $g = \eta |\sigma_n(u^k)|$

3. Calcule u^* solução de P_2

$$u^* \in V$$

$$a(u^*, v - u^*) + j_g(v) - j_g(u^*) \geq \ell(v - u^*) +$$

$$+ \ell_{\bar{F}_n^k}(v - u^*) \quad \forall v \in V$$

4. Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t(u^*)$

5. Verifique se o critério de convergência foi satisfeito

Se não: $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 1.

É importante salientar aqui que o processo iterativo descrito não tem, do conhecimento do autor, sua convergência provada. Na realidade, situações em que o procedimento falhou já foram relatadas na literatura (vide KALKER (57)).

É possível ainda tentar acelerar o procedimento iterativo em questão fazendo com que no passo 3 tenha-se V substituído por \mathbb{K} . O novo algoritmo se escreve

1. Encontre u^0 solução do problema de Signorini sem atrito

$$u^0 \in \mathbb{K}$$

$$a(u^0, v - u^0) \geq \ell(v - u^0) \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

2. Calcule $g = \eta |\sigma_n(u^k)|$

3. Calcule u^{k+1} solução de

$$u^{k+1} \in \mathbb{K}$$

$$a(u^{k+1}, v - u^{k+1}) + j_g(v) - j_g(u^{k+1}) \geq \ell(v - u^{k+1}) \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

4. Verifique o critério de convergência. Se não atendido faça $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 2.

De acordo com a segunda variante é fácil ver que, denotando

$$u^{k+1} = u(g^k)$$

segue-se que

$$g^{k+1} = S(g^k) = -\eta \sigma_n(u(g^k)) \quad (4.60)$$

e a solução do problema passa a ser definida como aquela em que a distribuição de forças normais em Γ_c , g , é o ponto fixo do ope

rador S.

Observe-se que os dois algoritmos se aplicam ao caso de leis de atrito não-lineares e não-locais bastando substituir o funcional $j_g(\cdot)$ do problema P_2 por $j_{g,\varepsilon}(\cdot)$ definido em (4.39) e calcular o valor limite da tensão tangencial g no passo 2 de acordo com a lei de atrito utilizada. Deve-se ressaltar que no caso de leis de atrito não-locais, como as discutidas no item anterior, com um coeficiente de atrito suficientemente pequeno, o segundo algoritmo converge para a solução única do problema.

Outra observação a ser feita é que pode ocorrer que o problema não admita solução na presença do atrito. Neste caso, para ambos os algoritmos é necessário iniciar o processo com uma distribuição não-nula de forças tangenciais (\bar{F}_t^0) em Γ_c de maneira a tornar possível o equilíbrio. Em muitos casos basta considerar o sólido fixado em Γ_c e tomar \bar{F}_t^0 como a componente tangencial da reação de apoio que aí surge devido ao carregamento considerado.

Do ponto de vista computacional, os problemas correspondentes aos passos 1 e 3 do primeiro algoritmo são mais simples que o correspondente ao passo 3 do segundo algoritmo não se podendo afirmar, "a priori", que este seja superior ao primeiro. De fato, neste trabalho, apenas o primeiro algoritmo foi implementado computacionalmente, por razões que ficarão claras no capítulo seguinte.

4.5. O PROBLEMA DE INDENTAÇÃO RÍGIDA COM ATRITO DE COULOMB

Aborda-se neste item o problema bidimensional de indenta-

ção r̄gida, an̄logo ao do item 3.2, incluindo agora for̄ças de atrito ao longo da regīo de contato. Tendo em vista os desenvolvimentos anteriores, o problema de indentāo r̄gida com atrito de Coulomb se escreve em sua forma forte como

$$\operatorname{div} \sigma(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.61)$$

$$\sigma(u)n = 0 \quad \text{em } \Gamma_f \quad (4.62)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (4.63)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } u \cdot n - \alpha_j n_j + \theta(\psi(x_1)n_1 - x_1 n_2) - s < 0 \\ \text{ent̄o } \sigma_n = 0 \\ \sigma_t = 0 \end{array} \right\} \quad (4.64)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } u \cdot n - \alpha_j n_j + \theta(\psi(x_1)n_1 - x_1 n_2) - s = 0 \\ \text{ent̄o } \sigma_n \leq 0 \end{array} \right\} \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.65)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } |\sigma_t| < \eta |\sigma_n| \quad \text{ent̄o } u_t^r = 0 \\ \text{se } |\sigma_t| = \eta |\sigma_n| \quad \text{ent̄o } \exists \lambda \geq 0 : u_t^r = -\lambda \sigma_t \end{array} \right\} \quad (4.66)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } |\sigma_t| = \eta |\sigma_n| \quad \text{ent̄o } \exists \lambda \geq 0 : u_t^r = -\lambda \sigma_t \end{array} \right\} \quad (4.67)$$

$$\int_{\Gamma_c} \sigma(u) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} d\Gamma = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

$$-\int_{\Gamma_c} [\sigma_n(x_1 n_2 - \psi(x_1)n_1) + \sigma_t(x_1 t_2 - \psi(x_1)t_1)] d\Gamma = M \quad (4.69)$$

onde os vetores unit̄rios n e t , normal exterior e tangente ao contorno Γ_c , tem, respectivamente, componentes n_1 e n_2 e t_1 e t_2 . Al̄m disso,

$$\sigma_n = (\sigma(u)n)_n = \sigma(u)n \cdot n \quad \text{e} \quad \sigma_t = (\sigma(u)n)_t = \sigma(u)n \cdot t$$

e o deslocamento tangencial relativo das superf̄cies em contato \bar{e}

$$u_t^r = u_t - u_t^p \quad (4.70)$$

onde u_t^p é o deslocamento tangencial do corpo rígido associado à translação (α_1, α_2) e ao giro θ , infinitesimais, do mesmo:

$$u_t^p = \alpha_i t_j - \theta(\psi(x_1)t_1 - x_1 t_2) \quad (4.71)$$

Para se obter uma formulação variacional para o problema retoma-se o conjunto dos elementos $(\beta_1, \beta_2, \omega, v)$ cinematicamente admissíveis já visto no Capítulo 3

$$K = \{(\beta_1, \beta_2, \omega, v) : \beta_i, \omega \in \mathbb{R}, v=0 \text{ em } \Gamma_u, v_n - \beta_i n_i + \omega m \leq s \text{ em } \Gamma_c\} \quad (4.72)$$

Através dos mesmos procedimentos utilizados no Cap. 3 conclui-se que a solução do problema $(\beta_1, \beta_2, \omega, u) \in K$ satisfaz

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega = \int_{\Gamma_c} \sigma(u) n \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in K$$

ou ainda

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega = \int_{\Gamma_c} [\sigma_n (v_n - u_n) + \sigma_t (v_t - u_t)] d\Gamma \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in K \quad (4.73)$$

Por outro lado, como visto no Cap. 3, pode-se mostrar a equivalência entre a inequação

$$\sigma_t (v_t^r - u_t^r) + n |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in K$$

e as condições (4.66) e (4.67). Levando em conta (4.70) tem-se

$$\sigma_t (v_t - u_t) \geq -n |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) + \sigma_t (v_t^p - u_t^p)$$

e da equação (4.73) conclui-se que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq \int_{\Gamma_C} [\sigma_n(v_n - u_n) + \sigma_t(v_t^p - u_t^p) - \eta |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|)] d\Gamma$$

$$\forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$$

As duas primeiras parcelas do integrando do 2º membro podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \sigma_n(v_n - u_n) &= \sigma_n[v_n - \beta_i n_i + \omega m - s] - \\ &\quad \sigma_n[u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s] + \\ &\quad \sigma_n[(\beta_1 - \alpha_1)n_1 + (\beta_2 - \alpha_2)n_2 - (\omega - \theta)m] \end{aligned}$$

e

$$\sigma_t(v_t^p - u_t^p) = \sigma_t[(\beta_1 - \alpha_1)t_1 + (\beta_2 - \alpha_2)t_2 - (\omega - \theta)h]$$

onde, por simplicidade, tomou-se

$$h = \psi(x_1)t_1 - x_1 t_2$$

Como $(\beta_1, \beta_2, \omega, u)$ é a solução de (4.61-69) e $(\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$, as condições de contato em Γ_C acarretam

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq \int_{\Gamma_C} [(\sigma_n n_1 + \sigma_t t_1)(\beta_1 - \alpha_1) + (\sigma_n n_2 + \sigma_t t_2)(\beta_2 - \alpha_2) - \\ - (\sigma_n m + \sigma_t h)(\omega - \theta)] d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \eta |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) d\Gamma \end{aligned}$$

$$\forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$$

e as condições de equilíbrio do sólido rígido (4.68) e (4.69) levam finalmente a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_C} \eta |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) d\Gamma \geq (\beta_1 - \alpha_1)P_1 + \\ + (\beta_2 - \alpha_2)P_2 + (\omega - \theta)M \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Logo, a inequação que governa o problema pode ser escrita como

$$\underline{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \theta, u) \in \mathbb{K}$$

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + j(\underline{u}, \underline{v}) - j(\underline{u}, \underline{u}) \geq \ell(\underline{v} - \underline{u}) \quad \forall \underline{v} = (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \quad (4.74)$$

onde

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega$$

$$j(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma_c} \eta |\sigma(u) n \cdot n| |v_t - \beta_i t_i - \omega h| d\Gamma$$

$$\ell(\underline{v}) = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \omega M$$

De maneira análoga ao já efetuado em capítulos anteriores, é possível mostrar que o problema variacional (4.74) é equivalente ao problema de valor de contorno original (4.61-69).

O problema (4.74) tem a mesma estrutura do problema de Signorini com atrito apresentando portanto todas as dificuldades discutidas no item anterior. Buscando um procedimento semelhante ao lá utilizado, introduz-se aqui um problema auxiliar cuja estrutura é a mesma do problema de Duvaut-Lions

$$u \in V$$

$$a(u, v - u) + j^*(v) - j^*(u) \geq \ell_{\bar{F}_n}(v - u) \quad \forall v \in V \quad (4.75)$$

com

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega \quad (4.76)$$

$$j^*(v) = \int_{\Gamma_c} g |v_t - \gamma_i t_i - \xi h| d\Gamma \quad (4.77)$$

$$\ell_{\bar{F}_n}(v) = \int_{\Gamma_c} \bar{F}_n v_n d\Gamma \quad (4.78)$$

e onde γ_1 , γ_2 e ξ são reais dados e g e \bar{F}_n são funções dadas suficientemente regulares e positivas ao longo de Γ_C .

A solução do problema original (4.74) será buscada através de uma sequência de subproblemas mais simples $P_1, P_2, P_1, P_2, \dots$ como no processo de Panagiotopoulos.

P_1 será o problema de indentação rígida sem atrito e com uma dada distribuição adicional de forças tangenciais \bar{F}_t em Γ_C e P_2 será o problema auxiliar (4.75).

O processo iterativo se descreve a seguir:

- i) Resolver o problema de indentação sem atrito, P_1 , com uma dada distribuição de forças tangenciais em Γ_C . Calcular as tensões normais desenvolvidas em Γ_C e os parâmetros α_1, α_2 , e θ do movimento do corpo rígido.
- ii) Resolver o problema auxiliar, P_2 , com γ_1, γ_2 e ξ dados e com as tensões normais obtidas em (i) aplicadas como cargas em Γ_C . Calcular as tensões tangenciais desenvolvidas em Γ_C .
- iii) Verificar a convergência do processo. Se não atendida voltar ao passo (i).

Tomando

$$\ell_{\bar{F}_t}(\underline{v}) = \int_{\Gamma_C} \bar{F}_t v_t \, d\Gamma$$

o processo pode ser escrito como

1. Dado \bar{F}_t^{k-1} encontre \underline{u}^k solução de P_1

$$\underline{u}^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \theta^k, u^k) \in \mathbb{IK}$$

$$a(\underline{u}^k, \underline{v} - \underline{u}^k) \geq \ell(\underline{v} - \underline{u}^k) + \ell_{\bar{F}_t^{k-1}}(\underline{v} - \underline{u}^k) \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{IK}$$

2. Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n(u^k)$ e $g = \eta |\sigma_n(u^k)|$

3. Calcule u^* solução de P_2

$$u^* \in V$$

$$a(u^*, v - u^*) + j^*(v) - j^*(u^*) \geq \xi_{\bar{F}_n} (v - u^*) \quad \forall v \in V$$

com $\gamma_i = \alpha_i^k$ e $\xi = \theta^k$ na definição de j^* .

4. Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t(u^*)$

5. Verifique se o critério de convergência foi satisfeito. Se não $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 1.

4.6. O PROBLEMA DE CONTATO ENTRE DOIS SÓLIDOS COM ATRITO

Tendo em mente os desenvolvimentos anteriores, a introdução do atrito de Coulomb no problema de contato entre dois sólidos deformáveis dá origem ao seguinte problema de valor de contorno

$$\operatorname{div} \sigma^S(u^S) + q^S = 0 \quad \text{em } \Omega^S$$

$$\sigma^S(u^S)n^S = f^S \quad \text{em } \Gamma_f^S$$

$$u^S = 0 \quad \text{em } \Gamma_u^S$$

$$\text{se } u_{ab}^r - \phi_{ab}^r < 0 \quad \text{então } \sigma_n^S(u^S) = 0$$

$$\sigma_t^S(u^S) = 0$$

$$\text{se } u_{ab}^r - \phi_{ab}^r = 0 \quad \text{então } \sigma_n^S(u^S) \leq 0$$

$$\text{se } |\sigma_t^S(u^S)| < \eta |\sigma_n^S(u^S)| \quad \text{então } u_t^r = 0$$

$$\text{se } |\sigma_t^S(u^S)| = \eta |\sigma_n^S(u^S)| \quad \text{então } \exists \lambda \geq 0: u_t^r = -\lambda \sigma_t^S$$

em Γ_c

com a notação do item 3.3, $s=a,b$ e ainda

$$\sigma_n^s(u^s) = \sigma^s(u^s)n^s \cdot n^s, \quad \sigma_t^s(u^s) = (\sigma^s(u^s)n^s)_t$$

$$u_t^r = u_t^a + u_t^b$$

$$\sigma_t = \sigma_t^a(u^a) = \sigma_t^b(u^b)$$

Como já visto, o conjunto de elementos (v^a, v^b) cinematicamente admissíveis para o problema é

$$IK = \{(v^a, v^b) \in (V^a \times V^b): v^s = 0 \text{ em } \Gamma_u^s \text{ e } u_{ab}^r - \phi_{ab}^r \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

com V^a e V^b espaços de funções suficientemente regulares em Ω^a e Ω^b respectivamente.

Denotando por $(u^a, u^b) \in IK$ a solução do problema, tem-se, via procedimento já utilizado em itens anteriores e que emprega o teorema da divergência

$$\begin{aligned} \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \varepsilon(v^s - u^s) d\Omega &= \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} q^s \cdot (v^s - u^s) d\Omega + \\ &+ \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} \sigma^s(u^s) n^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma \end{aligned}$$

$$\forall (v^a, v^b) \in IK \quad (4.79)$$

onde usou-se, como no capítulo anterior,

$$\sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_c^s} (\cdot) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} (\cdot) d\Gamma$$

Utilizando a notação do item 3.3 tem-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=a,b} \sigma^s(u^s) n^s \cdot (v^s - u^s) &= \sigma_n^a(u^a)(v_n^a - u_n^a) + \sigma_t^a(u^a) \cdot (v_t^a - u_t^a) + \\
 &\quad \sigma_n^b(u^b)(v_n^b - u_n^b) + \sigma_t^b(u^b) \cdot (v_t^b - u_t^b) \\
 &= \sigma_n [(v_n^a + v_n^b) - (u_n^a + u_n^b)] + \\
 &\quad + \sigma_t \cdot [(v_t^a + v_t^b) - (u_t^a + u_t^b)] \\
 &= \sigma_n (v_{ab}^r - u_{ab}^r) + \sigma_t \cdot (v_t^r - u_t^r) \\
 &= \sigma_n (v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) + \sigma_n (u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) + \sigma_t \cdot (v_t^r - u_t^r)
 \end{aligned}$$

com

$$\sigma_n = \sigma_n^a(u^a) = \sigma_n^b(u^b) \quad \text{em } \Gamma_c$$

Como (u^a, u^b) é a solução do problema segue-se que

$$\sigma_n (u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.80)$$

e como $(v^a, v^b) \in \mathbb{K}$ tem-se

$$\sigma_n (v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.81)$$

Lembrando que as condições de atrito podem também ser escritas na forma

$$\sigma_t \cdot (v_t^r - u_t^r) + n |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (4.82)$$

a equação variacional (4.79) se transforma, devido a (4.80-82), em

$$\begin{aligned}
\sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \epsilon(v^s - u^s) d\Omega &\geq \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} q^s \cdot (v^s - u^s) d\Omega + \\
&+ \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma + \\
&- \int_{\Gamma_c} \eta |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) d\Gamma \\
&\quad \forall (v^a, v^b) \in \mathbb{K}
\end{aligned}$$

A inequação que governa o problema pode portanto ser escrita como

$$\begin{aligned}
u &= (u^a, u^b) \in \mathbb{K} \\
a(u, v-u) + j(u, v) - j(u, u) &\geq \ell(v-u) \quad \forall v = (v^a, v^b) \in \mathbb{K} \quad (4.83)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \epsilon(v^s) d\Omega \\
j(u, v) &= \int_{\Gamma_c} \eta |\sigma_n| |v_t^r| d\Gamma, \quad \sigma_n = \sigma_n^a(u^a) = \sigma_n^b(u^b) \\
\ell(v) &= \sum_{s=a,b} \left[\int_{\Omega^s} q^s \cdot v^s d\Omega + \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot v^s d\Gamma \right]
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao já efetuado em capítulos anteriores, é possível mostrar a equivalência formal entre o problema de valor de contorno original e a inequação (4.83).

Como o problema (4.83) tem a mesma estrutura do problema de Signorini com atrito, é conveniente, aqui também, introduzir o problema auxiliar, análogo ao problema de Duvaut-Lions

$$u = (u^a, u^b) \in V$$

$$a(u, v-u) + j_g(v) - j_g(u) \geq \ell(v-u) + \ell_{\bar{F}_n}(v-u) \quad \forall v \in V \quad (4.84)$$

onde

$$V = \{(v^a, v^b) \in (V^a \times V^b) : v^s = 0 \text{ em } \Gamma_u^s, s=a,b\}$$

$$j_g(v) = \int_{\Gamma_C} g |v_t^r| d\Gamma$$

$$\ell_{\bar{F}_n}(v) = \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_C^s} \bar{F}_n v_n^s d\Gamma$$

e g e \bar{F}_n são funções dadas suficientemente regulares e positivas.

A solução do problema original (4.83) será buscada via uma sequência de subproblemas mais simples $P_1 P_2 P_1 P_2 \dots$ onde P_1 será o problema de contato entre os dois sólidos deformáveis sem atrito e com uma dada distribuição adicional de forças tangenciais ao longo de Γ_C^a e Γ_C^b e P_2 será o problema auxiliar (4.84).

O processo iterativo pode ser descrito como se segue:

- i) Resolver o problema de contato sem atrito, P_1 , com uma dada distribuição de forças tangenciais ao longo de Γ_C^s , calculando aí as tensões normais de contato.
- ii) Resolver o problema auxiliar, P_2 , com as tensões normais calculadas em (i) aplicadas como cargas adicionais em Γ_C^s . Calcular as tensões tangenciais aí desenvolvidas.
- iii) Verificar a convergência do processo. Se não atendida, voltar ao passo (i).

Tomando

$$l_{\bar{F}_t}(v) = \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_c^s} \bar{F}_t \cdot v_t^s \, d\Gamma$$

o processo pode ser escrito como

1. Dado \bar{F}_t^{k-1} encontre u^k solução de P_1

$$u^k \in \mathbb{IK}$$

$$a(u, v - u^k) \geq l(v - u^k) + l_{\bar{F}_t^{k-1}}(v - u^k) \quad \forall v = (v^a, v^b) \in \mathbb{IK}$$

2. Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n^a(u^{a,k}) = \sigma_n^b(u^{b,k})$ e $g = \eta \bar{F}_n^k$

3. Calcule u^* solução de P_2

$$u^* \in V$$

$$a(u, v - u^*) + j_g(v) - j_g(u^*) \geq l(v - u^*) + l_{\bar{F}_n^k}(v - u^*) \quad \forall v = (v^a, v^b) \in V$$

4. Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t^a(u^{a*}) = \sigma_t^b(u^{b*})$

5. Verifique se o critério de convergência foi satisfeito. Se não, $k \leftarrow k+1$ e volte ao passo 1.