

CAPÍTULO III

PROBLEMAS DE CONTATO SEM ATRITO

3.1. O PROBLEMA DE SIGNORINI

Considere-se um sólido contínuo que em sua configuração in deformada ocupa o domínio $\bar{\Omega}$, onde Ω é um aberto, limitado, simplesmente conexo, subconjunto do espaço Euclidiano de pontos tri dimensional, e cujo contorno é suposto regular. O problema de Signorini caracteriza-se pelo fato deste contorno Γ poder ser dividido em 3 partes Γ_u , Γ_f e Γ_c tais que

$$\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_f \cup \bar{\Gamma}_c = \Gamma$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_f = \Gamma_u \cap \Gamma_c = \Gamma_c \cap \Gamma_f = \emptyset$$

Como de costume Γ_u é a parte do contorno onde os deslocamentos estão prescritos (e iguais a zero, por simplicidade) e Γ_f é a par te onde forças de superfície estão prescritas e caracterizadas pelo campo f . A parte do contorno denominada Γ_c é aquela, no dizer de Signorini, com condições de contorno "ambiguas", ou seja, os pontos de Γ_c , após a aplicação das cargas, podem entrar em conta to ou não com uma superfície rígida S ou ainda permanecer em con tato ou separar-se desta mesma superfície. Esta situação é esque matizada na Figura 3.1 onde n é a normal unitária exterior a Γ_c .

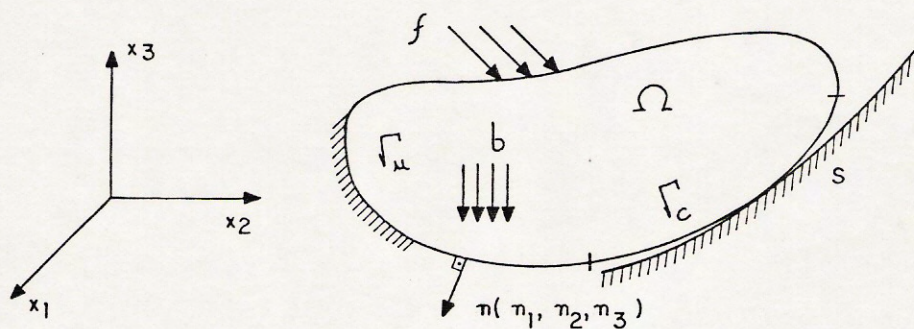


Fig. 3.1

Define-se ainda a função s que dá a distância, medida ao longo da normal n , entre os pontos de Γ_c e de S .

Num contexto de deformações infinitesimais, a condição (linearizada) de não-interpenetração entre o corpo e a superfície rígida se escreve

$$u(x) \cdot n(x) - s(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c$$

Denotando com os índices n e t as componentes normal e tangencial, respectivamente, de um campo vetorial tem-se de maneira mais compacta

$$u_n - s \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_c$$

Por outro lado, naqueles pontos que permaneceram (ou entraram) em contato com a superfície surge uma reação

$$r = r_n n \quad r_n \leq 0$$

segundo a normal (o atrito foi suposto nulo) e dirigida para fora da superfície S . A restrição introduzida no problema se expressa em termos de desigualdades sendo por isto denominada uni-

lateral:

$$\text{se } u_n - s < 0 \quad \text{então } r_n = 0$$

$$\text{se } u_n - s = 0 \quad \text{então } r_n \leq 0$$

Estas expressões podem ser re-escritas na forma

$$u_n - s \leq 0$$

$$r_n \leq 0$$

$$(u_n - s)r_n = 0 \quad \forall x \in \Gamma_c$$

a última delas conhecida como relação de complementaridade entre $(u_n - s)$ e r_n .

Devido à ausência de atrito, as tensões tangenciais $(\sigma(u)n)_t$ devem ser nulas em Γ_c :

$$\sigma(u)n = (\sigma(u)n \cdot n)n$$

O problema de equilíbrio pode ser formulado então como o problema de valor de contorno

$$\text{div } \sigma(u) + b = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u$$

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma(u)n)_t = 0 \\ r_n = \sigma(u)n \cdot n \leq 0 \\ u_n - s \leq 0 \\ r_n(u_n - s) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{em } \Gamma_c$$

(3.1-7)

Observa-se ainda que Γ_c não é conhecido "a priori", fazendo par-

te portanto da solução do problema.

Para se obter uma formulação variacional do problema, de Signorini define-se o conjunto dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis

$$\mathbb{K} = \{w: w \text{ é suf. regular, } w=0 \text{ em } \Gamma_u, w \cdot n \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}. \quad (3.8)$$

Da definição segue que \mathbb{K} não é um espaço vetorial. Entretanto, para $w_1, w_2 \in \mathbb{K}$ tem-se

$$\theta w_1 + (1-\theta)w_2 = w \in \mathbb{K} \quad \forall \theta \in [0,1]$$

ou seja, \mathbb{K} é um conjunto convexo.

Tomando-se $v \in \mathbb{K}$ arbitrário e multiplicando-se (3.1) por v , integrando-se em Ω , aplicando o teorema da divergência e usando (3.2) tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

Aplicando a expressão acima para $v=u$, solução do problema e subtraindo uma da outra vem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega &= \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

A última integral não pode ser calculada por não se conhecer Γ_c . Entretanto, levando-se em conta (3.4) tem-se

$$\begin{aligned}
 \sigma \cdot (v-u) &= r_n(v_n - u_n) \\
 &= r_n(v_n - s) - r_n(u_n - s) \\
 &= r_n(v_n - s) \geq 0
 \end{aligned}$$

já que u é solução do problema, $r_n \leq 0$, e $v \in \mathbb{K}$. Assim, se u é solução do problema de valor de contorno (3.1-7) então também satisfaz a inequação variacional

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.9)$$

Mostra-se também que se u satisfaz a inequação variacional (3.9) então u é solução do problema de valor de contorno (3.1-7). Para isto aplica-se o teorema da divergência a (3.9) obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(u) + b) \cdot (v-u) d\Omega &\leq \int_{\Gamma_f} (\sigma(u)n - f) \cdot (v-u) d\Gamma + \\
 &+ \int_{\Gamma_c} \sigma(u)n \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Tomando-se $v = u + w$ com $w \in C_0(\bar{\Omega})$,

$$C_0(\bar{\Omega}) = \{h: h \text{ é suf. regular, } h=0 \text{ em } \Gamma\},$$

tem-se que $v \in \mathbb{K}$ e (3.10) se reduz a

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(u) + b) \cdot w d\Omega \leq 0 \quad \forall w \in C_0(\bar{\Omega})$$

Como $C_0(\bar{\Omega})$ é um espaço vetorial $-w \in C_0(\bar{\Omega})$ e a inequação acima deverá ser válida para w e $-w$ o que acarreta

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(u) + b) \cdot w d\Omega = 0 \quad \forall w \in C_0(\bar{\Omega})$$

Logo, pelo lema fundamental do cálculo das variações, tem-se

$$\operatorname{div} \sigma(u) + b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.11)$$

Um procedimento análogo, porém tomando $w \in C'_0(\bar{\Omega})$,

$$C'_0(\bar{\Omega}) = \{h: h \text{ é suf. regular, } h=0 \text{ em } \Gamma_u \cup \Gamma_c\},$$

leva a

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f. \quad (3.12)$$

Levando em conta (3.11) e (3.12), (3.10) se reduz a

$$\int_{\Gamma_c} \sigma(u)n \cdot (v-u) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.13)$$

Tomando agora $v=u+w$ com $w \in C''_0(\bar{\Omega})$,

$$C''_0(\bar{\Omega}) = \{h: h \text{ é suf. regular, } h_n=0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

tem-se que $v \in \mathbb{K}$ e

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma(u)n)_t \cdot w_t d\Gamma \geq 0 \quad \forall w \in C''_0(\bar{\Omega})$$

De novo, como $-w \in C''_0(\bar{\Omega})$ segue-se que

$$(\sigma(u)n)_t = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (3.14)$$

o que significa que a reação r associada à restrição unilateral imposta pela superfície S deve ser normal a Γ_c :

$$r = r_n n = \sigma(u)n \quad \text{em } \Gamma_c$$

e assim (3.13) se reduz a

$$\int_{\Gamma_c} r_n (v_n - u_n) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.15)$$

Tomando $v = u + w$ com $w \in C_0^{\infty}(\bar{\Omega})$,

$$C_0^{\infty}(\bar{\Omega}) = \{h: h \text{ é suf. regular, não identicamente nulo, } h_n \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

Tem-se que $v \in \mathbb{K}$ e

$$\int_{\Gamma_c} r_n w_n d\Gamma \geq 0 \quad \forall w \in C_0^{\infty}(\bar{\Omega})$$

acarreta

$$r_n \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (3.16)$$

Finalmente, considerando campos $v^1, v^2 \in \mathbb{K}$ em (3.15) tais que $v_n^1 = s$ e $v_n^2 = 2u_n - s$ tem-se

$$\int_{\Gamma_c} r_n (u_n - s) d\Gamma = 0$$

o que, juntamente com (3.16) e o fato que $u \in \mathbb{K}$ fornece

$$r_n (u_n - s) = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (3.17)$$

Os resultados (3.11), (3.12), (3.14), (3.16) e (3.17) mostram que, havendo regularidade suficiente, a solução u da inequação variacional (3.9) é também solução do problema de valor de contorno (3.1-7).

3.2. O PROBLEMA DE INDENTAÇÃO RÍGIDA

Uma classe especial de problemas de contato corresponde

aquela em que um sólido se deforma sob a ação de um outro sólido - rígido - que é contra ele pressionado por forças externas dadas, como esquematizado na Figura 3.2.

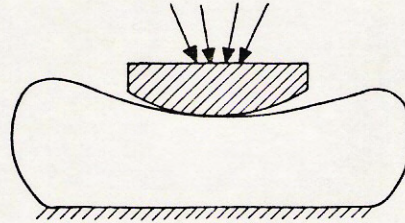


Fig. 3.2

Por simplicidade, serão tratados apenas problemas planos. Considere-se então um sólido que na sua configuração indeformada ocupa o domínio $\bar{\Omega}$ onde Ω é aberto, limitado e simplesmente conexo. Seu contorno Γ é suposto regular e dividido em 3 regiões, Γ_u , Γ_f , Γ_c tais que

$$\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_f \cup \bar{\Gamma}_c = \Gamma$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_f = \Gamma_u \cap \Gamma_c = \Gamma_c \cap \Gamma_f = \emptyset$$

Como de costume, Γ_u e Γ_f são as regiões em que deslocamentos e forças, respectivamente, são prescritos e, por simplicidade, serão aqui assumidos nulos. A parte do contorno denominada Γ_c é aquela onde o sólido deformável pode vir a entrar em contato com o sólido rígido por ocasião da aplicação das cargas sobre este. Para o problema bidimensional estas cargas podem ser reduzidas a uma resultante $P(P_1, P_2)$ e um momento M como mostrado na Figura 3.3.

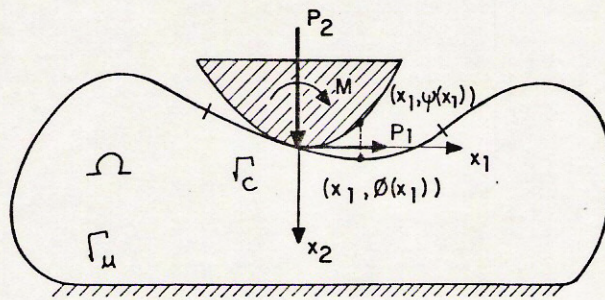


Fig. 3.3

A geometria do sólido rígido fica definida pela curva

$$x_2 = \psi(x_1)$$

enquanto a do sólido deformável será descrita pela curva

$$x_2 = \phi(x_1)$$

A configuração deformada do sistema fica caracterizada pela quadrupla $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u)$ onde (α_1, α_2) é a posição, após a deformação, do ponto do sólido rígido inicialmente na origem, θ é a rotação do sólido rígido em torno deste mesmo ponto e u é o campo de deslocamentos do sólido deformável. O deslocamento de um ponto $x(x_1, \psi(x_1))$ do contorno do sólido rígido fica, após uma translação (α_1, α_2) e um giro θ infinitesimais, dado por

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -\psi(x_1) \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Assim, num contexto de deformações infinitesimais, a condição linearizada de não-interpenetração entre os dois sólidos se escre-

ve

$$u(x_1, x_2) \cdot n(x_1, x_2) - \begin{pmatrix} \alpha_1 - \theta \psi(x_1) \\ \alpha_2 + \theta x_1 \end{pmatrix} \cdot n(x_1, x_2) \leq \\ \leq (\phi(x_1) - \psi(x_1)) n_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_C \quad (3.18)$$

ou

$$u_n - \alpha_j n_j + \theta(\psi(x_1)n_1 - x_1 n_2) \leq (\phi(x_1) - \psi(x_1)) n_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_C$$

onde $n(n_1, n_2)$ é o vetor unitário normal exterior a Γ_C , conforme esquematizado na Figura 3.4

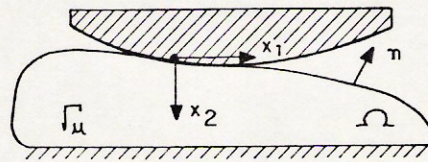


Fig. 3.4

Por comodidade, introduz-se as funções $m(x_1)$ e $s(x_1)$:

$$m(x_1) = \psi(x_1)n_1 - x_1 n_2$$

$$s(x_1) = (\phi(x_1) - \psi(x_1))n_2$$

Como o atrito não é levado em conta, a tensão que surge na região em contato com o sólido rígido é normal a Γ_C

$$r = r_n n = \sigma(u)n$$

e tem-se portanto

$$\text{se } u_n - \alpha_j n_j + \theta m < s \quad \text{então } r_n = 0$$

$$\text{se } u_n - \alpha_j n_j + \theta m = s \quad \text{então } r_n \leq 0$$

o que evidencia uma relação de complementaridade entre $u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s$ e r_n

$$u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s \leq 0$$

$$r_n \leq 0$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \Gamma_C$$

$$r_n (u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s) = 0$$

Tendo em vista as hipóteses assumidas aqui pode-se escrever finalmente o seguinte problema de valor de contorno

$$\operatorname{div} \sigma(u) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$\sigma(u)n = 0 \quad \text{em } \Gamma_f$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u$$

$$(\sigma(u)n)_t = 0$$

$$r_n = \sigma(u)n \cdot n \leq 0$$

$$u_n - \alpha_i n_i + \theta(\psi(x_1)n_1 - x_1 n_2) - s \leq 0$$

$$r_n [u_n - \alpha_i n_i + \theta(\psi(x_1)n_1 - x_1 n_2) - s] = 0$$

em Γ_C

$$\int_{\Gamma_C} \sigma(u) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} d\Gamma = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$-\int_{\Gamma_C} r_n (n_1 \psi(x_1) - n_2 x_1) d\Gamma = M \quad (3.19-28)$$

onde as duas últimas equações representam o equilíbrio do sólido rígido e Γ_C é, de novo, desconhecido "a priori".

Para se obter uma formulação variacional para o problema (3.19-28) define-se o conjunto dos elementos $(\beta_1, \beta_2, \omega, w)$ cinema-

ticamente admissíveis

$$\mathbb{K} = \{(\beta_1, \beta_2, \omega, w) : \beta_i, \omega \in \mathbb{R}, w \text{ suf. regular, } w=0 \text{ em } \Gamma_u, w_n - \beta_i n_i + \omega m \leq s \text{ em } \Gamma_c\} \quad (3.29)$$

o qual apresenta a propriedade de convexidade.

Tomando $(\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$, multiplicando (3.19) por v , integrando-se em Ω , aplicando o teorema da divergência e levando em conta (3.20) tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot v d\Gamma \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$$

Aplicando a expressão acima para $(\beta_1, \beta_2, \omega, v) = (\alpha_1, \alpha_2, \theta, u)$ solução do problema e subtraindo uma da outra vem

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega = \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \quad (3.30)$$

Tendo em vista (3.22) tem-se

$$\begin{aligned} \sigma n \cdot (v-u) &= r_n (v_n - u_n) \\ &= r_n [v_n - \beta_i n_i + \omega m - s] - \\ &\quad - r_n [u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s] + \\ &\quad + r_n [(\beta_1 - \alpha_1) n_1 + (\beta_2 - \alpha_2) n_2 - (\omega - \theta) m] \end{aligned}$$

Já que $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u)$ é a solução de (3.19-28), a segunda parcela se anula devido a (3.25). Como $r_n \leq 0$ e $(\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$ a primeira parcela é não-negativa e pode-se escrever (3.30) como

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq \int_{\Gamma_c} r_n [(\beta_1 - \alpha_1) n_1 + (\beta_2 - \alpha_2) n_2 - (\omega - \theta) m] d\Gamma \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$$

A integral em Γ_c vale

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} r_n [(\beta_1 - \alpha_1)n_1 - (\beta_2 - \alpha_2)n_2 - (\omega - \theta)m] d\Gamma &= (\beta_1 - \alpha_1) \int_{\Gamma_c} r_n n_1 d\Gamma + \\ &+ (\beta_2 - \alpha_2) \int_{\Gamma_c} r_n n_2 d\Gamma + (\omega - \theta) \int_{\Gamma_c} r_n m d\Gamma = \\ &= (\beta_1 - \alpha_1)P_1 + (\beta_2 - \alpha_2)P_2 + (\omega - \theta)M \end{aligned}$$

levando em conta (3.26-28). Assim, se $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u)$ é solução do problema de valor de contorno (3.19-28) então também satisfaz a inequação variacional

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \epsilon(v-u) d\Omega \geq P_1(\beta_1 - \alpha_1) + P_2(\beta_2 - \alpha_2) + M(\omega - \theta) \\ \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \quad (3.31) \end{aligned}$$

que relaciona o trabalho das tensões internas $\sigma(u)$ associado às deformações virtuais $\epsilon(v-u)$ com o trabalho virtual das cargas externas $P(P_1, P_2)$ e M .

Mostra-se também que se $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u)$ é solução de (3.30) então também satisfaz a (3.19-28). Para isto aplica-se o teorema da divergência a (3.31) obtendo-se

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma n \cdot (v-u) d\Gamma \geq \sum_{i=1}^2 P_i (\beta_i - \alpha_i) + \\ + M(\omega - \theta) \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \quad (3.32) \end{aligned}$$

Tomando-se o elemento $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u+w)$ $\in \mathbb{K}$ com $w \in C_0(\bar{\Omega})$ suficientemente regular e que se anula em Γ tem-se

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot w \, d\Omega \geq 0 \quad \forall w \in C_0(\bar{\Omega}) .$$

Como $w \in C_0(\bar{\Omega})$ a integral acima deverá ser nula e, do cálculo das variações, segue-se que

$$\operatorname{div} \sigma(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.33)$$

Um procedimento análogo porém tomando w que não mais se anula em Γ_f leva a

$$\sigma(u)n = 0 \quad \text{em } \Gamma_f \quad (3.34)$$

Levando-se em conta (3.33) e (3.34), (3.32) se reduz a

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n \cdot (v-u) \, d\Gamma \geq \sum_{i=1}^2 P_i(\beta_i - \alpha_i) + M(\omega - \theta) \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \quad (3.35)$$

Tomando agora $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u+w) \in \mathbb{K}$ com $w \in C_0''(\bar{\Omega})$ regular e tal que $w_n = 0$ em Γ_c chega-se, de maneira análoga a

$$(\sigma(u)n)_t = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (3.36)$$

o que significa que

$$\sigma(u)n = r_n n \quad \text{em } \Gamma_c$$

e (3.35) se reduz a

$$\int_{\Gamma_c} r_n (v_n - u_n) \, d\Gamma \geq \sum_{i=1}^2 P_i(\beta_i - \alpha_i) + M(\omega - \theta) \quad \forall (\beta_1, \beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K} \quad (3.37)$$

Escolhendo $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u+w) \in \mathbb{K}$ com $w \in C_0'''(\bar{\Omega})$,

$$C_0'''(\bar{\Omega}) = \{h: h \text{ é regular, não-ident. nulo, } h_n \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\} ,$$

chega-se a

$$r_n \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_C \quad (3.38)$$

Aplicando (3.37) para dois elementos de \mathbb{K} , $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, v^1)$ e $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, v^2)$ tais que

$$\begin{aligned} v_n^1 &= \alpha_i n_i - \theta m + s \\ v_n^2 &= 2u_n - [\alpha_i n_i - \theta m + s] \end{aligned}$$

chega-se a

$$\int_{\Gamma_C} r_n [u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s] d\Gamma = 0$$

o que juntamente com (3.38) e o fato que $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u) \in \mathbb{K}$ fornece

$$r_n [u_n - \alpha_i n_i + \theta m - s] = 0 \quad \text{em } \Gamma_C \quad (3.39)$$

Finalmente, tomando-se os dois elementos

$$\begin{aligned} (0, \alpha_2, \theta, u+w) \quad &\text{com } w \text{ tal que } w_n = -\alpha_1 n_1 \text{ em } \Gamma_C \text{ e} \\ (2\alpha_1, \alpha_2, \theta, u+w) \quad &\text{com } w \text{ tal que } w_n = \alpha_1 n_1 \text{ em } \Gamma_C, \end{aligned}$$

vê-se que ambos pertencem a \mathbb{K} e, substituindo-os em (3.37), chega-se a conclusão que

$$\int_{\Gamma_C} r_n n_1 d\Gamma = P_1 \quad (3.40)$$

que é equivalente a (3.26).

Repetindo o procedimento com os elementos

$$\begin{aligned} (\alpha_1, 0, \theta, u+w) \quad &\text{com } w \text{ tal que } w_n = -\alpha_2 n_2 \text{ em } \Gamma_C \text{ e} \\ (\alpha_1, 2\alpha_2, \theta, u+w) \quad &\text{com } w \text{ tal que } w_n = \alpha_2 n_2 \text{ em } \Gamma_C \end{aligned}$$

e levando-os em (3.37) chega-se a

$$\int_{\Gamma_C} r_n n_2 d\Gamma = P_2 \quad (3.41)$$

que é equivalente a (3.27).

Um procedimento análogo, escolhendo os elementos

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, 0, u+w) & \quad \text{com } w \text{ tal que } w_n = \theta m \text{ em } \Gamma_C \text{ e} \\ (\alpha_1, \alpha_2, 2\theta, u+w) & \quad \text{com } w \text{ tal que } w_n = -\theta m \text{ em } \Gamma_C \end{aligned}$$

e levando-os em (3.37) acarreta

$$-\int_{\Gamma_C} r_n^m d\Gamma = M \quad (3.42)$$

que é equivalente a (3.28).

Fica assim mostrado que, havendo regularidade suficiente, a solução da inequação variacional (3.31) é também solução do problema de valor de contorno (3.19-28).

Neste ponto é interessante observar que somente um elemento de cada par (α_1, P_1) , (α_2, P_2) e (θ, M) pode vir a ser prescrito ficando o outro a ser determinado como parte da solução. Assim se $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ a equação de equilíbrio do corpo rígido segundo a direção x_1 (3.26) é abandonada e a formulação variacional do problema fica

$$\mathbb{K} = \{(\beta_2, \omega, v) : \beta_2, \omega \in \mathbb{R}, v \text{ regular}, v=0 \text{ em } \Gamma_U, \\ v_n - \alpha_2 n_2 + \theta m - s - \bar{\alpha}_1 n_1 \leq 0 \text{ em } \Gamma_C\}$$

$$(\alpha_2, \theta, u) \in \mathbb{K} : \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq P_2(\beta_2 - \alpha_2) + M(\omega - \theta)$$

$$\forall (\beta_2, \omega, v) \in \mathbb{K}$$

Para o caso $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$ tem-se, analogamente,

$$\mathbb{K} = \{(\beta_1, \omega, v): \beta_1, \omega \in \mathbb{R}, v \text{ regular}, v=0 \text{ em } \Gamma_u, \\ v_n - \alpha_1 n_1 + \theta m - s - \bar{\alpha}_2 n_2 \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

$$(\alpha_1, \theta, u) \in \mathbb{K}: \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq P_1(\beta_1 - \alpha_1) + M(\omega - \theta)$$

$$\forall (\beta_1, \omega, v) \in \mathbb{K}$$

O caso da rotação prescrita, $\theta = \bar{\theta}$, fica portanto

$$\mathbb{K} = \{(\beta_1, \beta_2, v): \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, v \text{ regular}, v=0 \text{ em } \Gamma_u, \\ v_n - \alpha_i n_i - s + \bar{\theta} m \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, u) \in \mathbb{K}: \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega \geq \sum_{i=1}^2 P_i(\beta_i - \alpha_i) \quad \forall (\beta_1, \beta_2, v) \in \mathbb{K}$$

O cálculo da força (ou momento) associado ao deslocamento (ou rotação) prescrito é feito com a equação de equilíbrio correspondente que havia sido abandonada.

3.3. O CONTATO ENTRE DOIS SÓLIDOS

Considere-se dois sólidos que em sua configuração indefor-
mada ocupem os domínios $\bar{\Omega}^a$ e $\bar{\Omega}^b$, com Ω^a e Ω^b disjuntos, abertos,
limitados, simplesmente conexos e com contornos regulares Γ^a e
 Γ^b . Os dois corpos encontram-se fixos ao longo das partes dos con-
tornos denotadas por Γ_u^a e Γ_u^b respectivamente e estão submetidos
a distribuições de forças f_a e f_b ao longo das partes dos contor-
nos denotadas por Γ_f^a e Γ_f^b respectivamente. Finalmente, as regiões
dos contornos dos corpos que podem entrar em contato sob a ação
das forças aplicadas denotam-se por Γ_c^a e Γ_c^b respectivamente. Co-

mo de costume tem-se

$$\bar{\Gamma}_u^s \cup \bar{\Gamma}_c^s \cup \bar{\Gamma}_f^s = \Gamma^s$$

$$\Gamma_u^s \cap \Gamma_f^s = \Gamma_u^s \cap \Gamma_c^s = \Gamma_c^s \cap \Gamma_f^s = \emptyset \quad s=a,b$$

Por simplicidade serão tratados apenas problemas planos e, a fim de apresentar as condições cinemáticas de contato, referir-se-á à Figura 3.5.

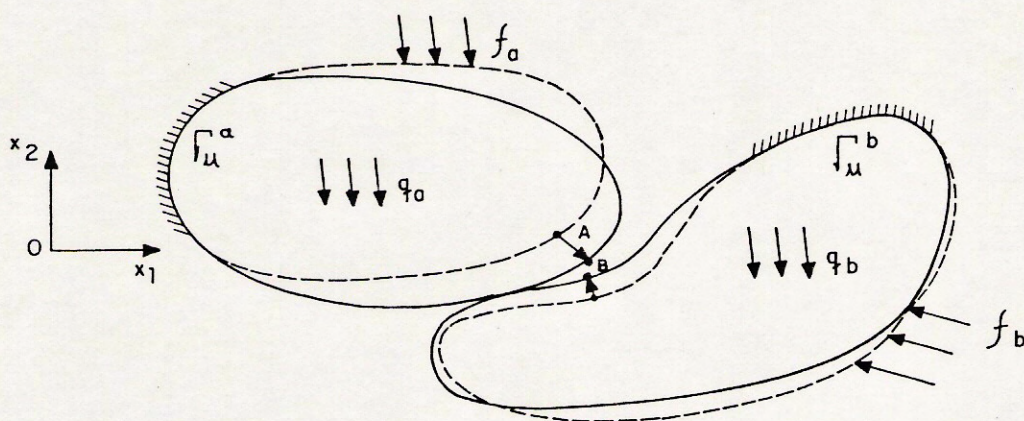


Fig. 3.5

A geometria da região do contato fica definida pelas curvas

$$x_2 = \phi_a(x_1) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_c^a$$

$$x_2 = \phi_b(x_1) \quad , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_c^b$$

supostas, por enquanto, diferenciáveis.

Tomando-se dois pontos materiais $A \in \Gamma_c^a$ e $B \in \Gamma_c^b$ cujas posições iniciais são, respectivamente, $x^a = (x_1^a, \phi_a(x_1^a))$ e $x^b = (x_1^b, \phi_b(x_1^b))$, tais que a coordenada x_1 de ambos é a mesma após a deformação, pode-se escrever a condição de não-interpenetração

$$x_1^a + u_1^a(x_1^a, \phi_a(x_1^a)) = x_1^b + u_1^b(x_1^b, \phi_b(x_1^b)) \quad (3.43)$$

$$\phi_a(x_1^a) + u_2^a(x_1^a, \phi_a(x_1^a)) \geq \phi_b(x_1^b) + u_2^b(x_1^b, \phi_b(x_1^b)) \quad (3.44)$$

Assumindo deformações infinitesimais tem-se a aproximação

$$\begin{aligned} u_1^a(x_1^a, \phi_a(x_1^a)) &= u_1^b(x_1^b - x_1^a + x_1^a, \phi_b(x_1^b - x_1^a + x_1^a)) \\ &= u_1^b(x_1^a, \phi_b(x_1^a)) + \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^b(x_1^a)(x_1^b - x_1^a) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} u_1^b(x_1^a) \phi_b'(x_1^a)(x_1^b - x_1^a) + \dots \\ &\cong u_1^b(x_1^a, \phi_b(x_1^a)) \end{aligned}$$

De maneira análoga pode-se obter aproximações similares para u_2^a e u_2^b bem como escrevê-las também em função de x_1^b . Resumindo tem-se

$$\begin{aligned} u_i^a(x_1^a, \phi_a(x_1^a)) &= u_i^b(x_1^a, \phi_b(x_1^a)) \\ u_i^a(x_1^b, \phi_a(x_1^b)) &= u_i^b(x_1^b, \phi_b(x_1^b)) \quad i=1,2 \end{aligned}$$

e para simplificar a notação escreve-se

$$u_i^s(x_1^t, \phi_s(x_1^t)) = u_i^s(x_1^t) \quad i=1,2 \quad s=a,b \quad t=a,b$$

Por outro lado tem-se

$$\begin{aligned} \phi_a(x_1^a) &= \phi_a(x_1^b) + \phi_a'(x_1^b)(x_1^a - x_1^b) + \dots \\ &\cong \phi_a(x_1^b) + \phi_a'(x_1^b)(u_1^b(x_1^b) - u_1^a(x_1^b)) \end{aligned}$$

e também

$$\phi_b(x_1^b) \cong \phi_b(x_1^a) - \phi_b'(x_1^a)(u_1^b(x_1^a) - u_1^a(x_1^a))$$

que levadas em (3.42) fornecem

$$\phi^r(x_1^b) - \phi_a'(x_1^b)u_1^r(x_1^b) + u_2^r(x_1^b) \geq 0 \quad (3.45)$$

$$\phi^r(x_1^a) - \phi_b'(x_1^a)u_1^r(x_1^a) + u_2^r(x_1^a) \geq 0 \quad (3.46=)$$

onde

$$\phi^r(\cdot) = \phi_a(\cdot) - \phi_b(\cdot)$$

$$u_i^r(\cdot) = u_i^a(\cdot) - u_i^b(\cdot) \quad i=1,2$$

Introduzindo os vetores unitários normais exteriores a Γ_c^a e Γ_c^b

$$n^a = (n_1^a, n_2^a) = (\phi_a', -1) / \sqrt{1 + (\phi_a')^2}$$

$$n^b = (n_1^b, n_2^b) = (-\phi_b', 1) / \sqrt{1 + (\phi_b')^2}$$

as relações (3.45) e (3.46) podem ser reescritas

$$\phi^r(x_1^b)n_2^a(x_1^b) + u_i^r(x_1^b)n_i^a(x_1^b) \leq 0 \quad (3.47)$$

$$-\phi^r(x_1^a)n_2^b(x_1^a) - u_i^r(x_1^a)n_i^b(x_1^a) \leq 0 \quad (3.48)$$

Considerando-se as aproximações

$$u_i^r(x_1^b)n_i^a(x_1^b) \cong u_i^a(x_1^a)n_i^a(x_1^a) + u_i^b(x_1^a)n_i^b(x_1^a)$$

$$u_i^r(x_1^a)n_i^b(x_1^a) \cong -u_i^a(x_1^a)n_i^a(x_1^a) - u_i^b(x_1^a)n_i^b(x_1^a)$$

e

$$\phi^r(x_1^b)n_2^a(x_1^b) \cong \phi_a(x_1^a)n_2^a(x_1^a) + \phi_b(x_1^a)n_2^a(x_1^a)$$

$$\phi^r(x_1^a)n_2^b(x_1^a) \cong -\phi_a(x_1^a)n_2^a(x_1^a) - \phi_b(x_1^a)n_2^b(x_1^a)$$

válidas para deformações infinitesimais, levando-as a (3.47-48) e somando membro a membro as duas desigualdades obtem-se uma aproximação para as relações (3.47-48)

$$u_i^a n_i^a + u_i^b n_i^b \leq \phi_a n_2^a + \phi_b n_2^b \quad \forall (x_1^a, \phi_a(x_1^a)) \in \Gamma_C^a \quad (3.49)$$

que \bar{e} a adotada por KIKUCHI e ODEN (1). Admitindo-se que as normais a Γ_C^a e Γ_C^b possam ser confundidas, ou seja

$$n^a = -n^b = n(n_1, n_2)$$

a condição de contato (3.49) se simplifica ainda mais

$$u_i^r n_i \leq (\phi_a - \phi_b) n_2 \quad \forall (x_1^a, \phi_a(x_1^a)) \in \Gamma_C^a \quad (3.50)$$

que \bar{e} a forma adotada aqui.

Observe-se que se o corpo $\bar{\Omega}^b$ é rígido e fixo em Γ_u^b segue-se que $u_i^r(x_1^a) = u_i^a(x_1^a)$ e (3.50) reproduz a condição de contato do problema de Signorini. Por outro lado, se o corpo $\bar{\Omega}^b$ é rígido e é pressionado contra o corpo $\bar{\Omega}^a$ de maneira que seu movimento possa ser descrito pelas translações α_1 e α_2 e pela rotação θ (infinitesimais) de acordo com a expressão

$$u^b(x^a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -\phi_b(x_1^a) \\ x_1^a \end{pmatrix}$$

tem-se que (3.50) reproduz a condição de contato relativa ao problema de indentação rígida.

Como o atrito não é levado em conta, a componente tangencial das tensões se anula na região em contato

$$(\sigma^S(u^S(x^S))n^S)_t = 0 \quad x^S \in \Gamma_C^S, \quad s=a,b$$

e tem-se portanto

$$\text{se } u_{ab}^r < \phi_{ab}^r \quad r_{n^s} = \sigma^s(u^s(x^s))n^s \cdot n^s = 0 \quad x^s \in \Gamma_C^s$$

$$\text{se } u_{ab}^r = \phi_{ab}^r \quad r_{n^s} \leq 0 \quad x^s \in \Gamma_C^s, \quad s=a,b$$

com a notação mais compacta

$$u_{ab}^r = u_i^a n_i^a + u_i^b n_i^b$$

$$\phi_{ab}^r = \phi_a n_2^a + \phi_b n_2^b .$$

De novo é evidente uma relação de complementaridade entre $u_{ab}^r - \phi_{ab}^r$ e r_{n^s} :

$$u_{ab}^r - \phi_{ab}^r \leq 0 \quad (3.51)$$

$$r_{n^s} \leq 0 \quad x^s \in \Gamma_C^s, \quad s=a,b \quad (3.52)$$

$$r_{n^s} (u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) = 0 \quad (3.53)$$

Com as hipóteses assumidas aqui pode-se escrever finalmente o seguinte problema de valor de contorno

$$\text{div } \sigma^s(u^s) + q^s = 0 \quad \text{em } \Omega^s$$

$$\sigma^s(u^s)n^s = f^s \quad \text{em } \Gamma_f^s$$

$$u^s = 0 \quad \text{em } \Gamma_u^s$$

$$(\sigma^s(u^s)n^s)_t = 0$$

$$r_{n^s} = \sigma^s(u^s)n^s \cdot n^s \leq 0$$

$$u_{ab}^r - \phi_{ab}^r \leq 0$$

$$r_{n^s} (u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) = 0$$

em Γ_C^s

$s=a,b$

(3.54-60)

que representa a condição de equilíbrio dos dois sólidos deformáveis sob a ação das cargas externas de volume q^a e q^b e de superfície f^a e f^b .

Para se obter uma formulação variacional para o problema (3.54-60) é necessário definir-se o conjunto \mathbb{K} dos elementos (v^a, v^b) cinematicamente admissíveis.

Denotando por Γ_C o trecho da reta $x_2=0$ que contém as projeções de Γ_C^a e Γ_C^b (vide Figura 3.6), ao se especificar um ponto $x=(x_1, 0) \in \Gamma_C$ automaticamente estão definidos os pontos $x^a=(x_1, \phi_a(x_1)) \in \Gamma_C^a$ e $x^b=(x_1, \phi_b(x_1)) \in \Gamma_C^b$.

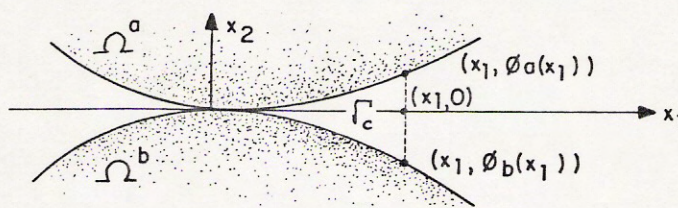


Fig. 3.6

Assim, $x=(x_1, 0) \in \Gamma_C$ implica em $(x_1, \phi_a(x_1)) \in \Gamma_C^a$ e $(x_1, \phi_b(x_1)) \in \Gamma_C^b$ e o conjunto \mathbb{K} pode então ser descrito como

$$\mathbb{K} = \{(v^a, v^b) \in (V^a \times V^b) : v^s = 0 \text{ em } \Gamma_u^s, v_{ab}^r - \phi_{ab}^r \leq 0 \text{ em } \Gamma_C, s=a, b\} \quad (3.61)$$

onde V^a e V^b são os espaços de funções suficientemente regulares definidos em Ω^a e Ω^b respectivamente.

Denotando por (u^a, u^b) a solução do problema de valor de contorno (3.54-60) tem-se, via procedimento já utilizado em itens anteriores e que emprega o teorema da divergência

$$\begin{aligned}
\sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \epsilon^s(v^s - u^s) d\Omega &= \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} q^s \cdot (v^s - u^s) d\Omega + \\
&+ \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} r_n^s (v_n^s - u_n^s) d\Gamma \quad (3.62)
\end{aligned}$$

onde usou-se

$$\sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_c^s} r_n^s (v_n^s - u_n^s) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} r_n^s (v_n^s - u_n^s) d\Gamma$$

Como

$$\begin{aligned}
r_{na} &= r_{nb} = r_n \\
v_{ab}^r &= v_n^a + v_n^b = v_{ni}^a + v_{ni}^b \\
u_{ab}^r &= u_n^a + u_n^b = u_{ni}^a + u_{ni}^b
\end{aligned}$$

a última parcela de (3.62) se escreve

$$\int_{\Gamma_c} r_n (v_{ab}^r - u_{ab}^r) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} r_n (v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) d\Gamma - \int_{\Gamma_c} r_n (u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) d\Gamma$$

Já que (u^a, u^b) é a solução do problema, a última integral se anula devido a (3.60) e, como $(v^a, v^b) \in \mathbb{K}$, tem-se que a primeira integral é não-negativa devido a (3.58). Assim, de (3.62) segue que a solução do problema de valor de contorno (3.54-60) satisfaz a inequação variacional

$$(u^a, u^b) \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^a} \sigma^a(u^a) \cdot \varepsilon^a(v^a - u^a) d\Omega + \int_{\Omega^b} \sigma^b(u^b) \cdot \varepsilon^b(v^b - u^b) d\Omega \geq \\ & \geq \int_{\Omega^a} q^a \cdot (v^a - u^a) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega^b} q^b \cdot (v^b - u^b) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_f^a} f^a \cdot (v^a - u^a) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_f^b} f^b \cdot (v^b - u^b) d\Omega \quad \forall (v^a, v^b) \in \mathbb{K} \quad (3.63) \end{aligned}$$

que relaciona o trabalho das tensões internas $\sigma^S(u^S)$ associado às deformações virtuais $\varepsilon^S(v^S - u^S)$ com o trabalho das ações externas associado ao deslocamento virtual $v^S - u^S$. Mostra-se também, admitindo-se regularidade suficiente na solução da inequação (3.63), a equivalência entre as duas formulações (3.54-60) e (3.63).

Um problema especial de contato entre dois sólidos corresponde ao caso de um corpo apoiado sobre uma fundação horizontal deformável sendo de grande interesse em engenharia estrutural. Como muitas vezes o interesse maior é na resposta da fundação sob a ação das forças transmitidas por contato pelo corpo que nela se apoia e não no estado de tensões no seu interior, surge a conveniência de se buscar modelos matemáticos relativamente simples para descrever com precisão razoável o comportamento da fundação na região do contato.

O modelo mais simples para uma fundação elástica contínua é o de Winkler, que relaciona a pressão vertical p exercida so-

bre a fundação no ponto (x,y) da superfície $(z=0)$ com a deformação vertical w neste mesmo ponto pela relação

$$p(x,y) = kw(x,y)$$

onde $k > 0$ é a constante característica da fundação. Outro modelo de interesse é o de Pasternak, definido pela relação

$$p(x,y) = -\text{div}(\mu \nabla w(x,y)) + kw(x,y)$$

e que engloba o modelo de Winkler como caso particular quando a constante μ se anula.

Outra possibilidade é modelar a fundação como um sólido elástico contínuo semi-infinito. É possível, utilizando soluções disponíveis na literatura, construir uma expressão do tipo

$$w(x,y) = T[p(x,y)] \quad (3.64)$$

onde T é um operador linear, normalmente na forma de uma integral.

Estes e outros modelos para fundações são discutidos, por exemplo, por KEER (38).

Serão considerados, por simplicidade, problemas bidimensionais, conforme esquematizado na Figura 3.7,

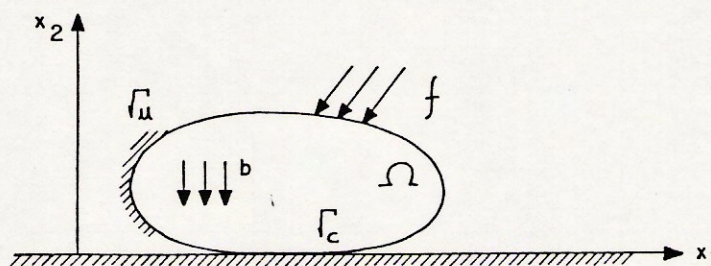


Fig. 3.7

e a fundação será suposta descrita por uma relação como (3.64)

$$w(x_1) = T[p(x_1)]$$

ou, na forma inversa, por

$$p(x_1) = T^{-1}[w(x_1)]$$

Uma maneira de analisar o problema consiste em introduzir a reação da fundação no equilíbrio do sólido. O problema se escreve então como

$$\operatorname{div} \sigma(u) + b = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u$$

(3.65-69)

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma(u)n)_t = 0 \\ \sigma(u)n \cdot n = -T^{-1}[(u_n - s)^+] \end{array} \right\} \text{em } \Gamma_c$$

onde $(\cdot)^+$ denota o operador parte positiva

$$(a)^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ a & \text{se } a > 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

e caracteriza a resposta unilateral da fundação. A função s mede a distância entre os pontos de Γ_c e a fundação.

A fim de se obter uma formulação variacional para este problema introduz-se o espaço de deslocamentos cinematicamente admissíveis

$$V = \{v: v \text{ suf. regular em } \Omega, v=0 \text{ em } \Gamma_u\},$$

multiplica-se (3.65) pelo elemento $v-u \in V$, (u é a solução do pro

blema) integra-se no domínio Ω , aplica-se o teorema da divergência e, tendo em vista (3.69), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_c} T^{-1}[(u_n-s)^+](v_n-u_n) d\Gamma = \\ = \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall v \in V \quad (3.70) \end{aligned}$$

que é uma equação variacional onde $T^{-1}[(u_n-s)^+]$ é um termo não-linear mesmo quando T^{-1} é um operador linear.

Outra maneira de abordar o problema é considerar que a fundação é o segundo corpo no problema de contato entre 2 corpos e incluir na formulação o campo w de deslocamentos verticais na sua superfície bem como o trabalho da fundação associado ao deslocamento virtual $(z-w)$ da superfície

$$\int_{\Gamma_c} -T^{-1}(w)(z-w) d\Gamma$$

Assim a inequação variacional correspondente a (3.63) é

$$(u, w) \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v-u) d\Omega - \int_{\Gamma_c} T^{-1}(w)(z-w) d\Gamma \geq \int_{\Omega} q \cdot (v-u) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall (v, z) \in \mathbb{K} \quad (3.71) \end{aligned}$$

onde a solução passa a ser o par (u, w) pertencente ao conjunto dos deslocamentos admissíveis \mathbb{K} que leva em conta a condição de não-interpenetração entre o sólido e a fundação

$$v \cdot n_2 - z \leq s$$

e que se escreve

$$\mathbb{K}\{(v, z) \in (V, Z): v \cdot n_2 - z \leq s \text{ em } \Gamma_c, v=0 \text{ em } \Gamma_u\} \quad (3.72)$$

onde V e Z são os espaços de funções suficientemente regulares definidas sobre Ω e Γ_c respectivamente.

3.4. PRINCÍPIOS DE MÍNIMO, EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Como nada foi dito a respeito da natureza dos materiais que constituem os corpos envolvidos nos problemas até aqui tratados, as inequações variacionais obtidas são válidas, dentro do regime de deformações e deslocamentos infinitesimais, para qualquer tipo de material. Adotando uma lei constitutiva do tipo elástica linear pode-se introduzir, como no Capítulo 2, uma função densidade de energia de deformação Φ , quadrática nas componentes do tensor de deformações ϵ , de maneira que a relação constitutiva se escreve

$$\sigma(u) = \frac{\partial \Phi(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \mathbb{D}\epsilon(u) \quad (3.73)$$

Da convexidade de Φ segue-se que

$$\Phi(\epsilon(v)) - \Phi(\epsilon(u)) \geq \mathbb{D}\epsilon(u) \cdot \epsilon(v-u) \quad (3.74)$$

Levando (3.73) e (3.74) à inequação variacional (3.9) do problema de Signorini tem-se

$$\int_{\Omega} [\Phi(\epsilon(v)) - \Phi(\epsilon(u))] d\Omega \geq \int_{\Omega} b \cdot (v-u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v-u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

Introduzindo o funcional energia potencial total

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\epsilon(v) \cdot \epsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma \quad (3.75)$$

vê-se que a solução u da inequação variacional é tal que

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in K$$

ou seja, u minimiza a energia potencial total Π no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis K definido em (3.8).

Levando (3.73) e (3.74) à inequação variacional (3.31) do problema de indentação rígida chega-se a conclusão que a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, u)$ deste problema é tal que minimiza a energia potencial total Π , que neste caso se escreve

$$\Pi(\beta_1, \beta_2, \omega, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\epsilon(v) \cdot \epsilon(v) d\Omega - \sum_{i=1}^2 P_i \beta_i - M\omega \quad (3.76)$$

no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis K definido em (3.29).

Para o caso do contato entre dois sólidos, definindo-se o funcional Π como em (3.75) para cada corpo isoladamente chega-se de maneira análoga à conclusão que a solução (u^a, u^b) minimiza a energia potencial total

$$\Pi(v^a, v^b) = \Pi^a(v^a) + \Pi^b(v^b) \quad (3.77)$$

no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis K definido em (3.61).

Para o problema de contato entre um sólido elástico linear e uma fundação deformável que admite uma função densidade de energia de deformação quadrática nos deslocamentos de sua superfície, pode-se novamente estabelecer um paralelo com o problema de contato entre dois corpos. Assim a solução do problema (u, w) minimiza, no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis K (3.72), a energia potencial total do sistema corpo + fun

dação:

$$\Pi(u, w) \leq \Pi(v, z) = \Pi^a(v) + U^f(z) \quad \forall (v, z) \in \mathbb{K} \quad (3.78)$$

onde

$$U^f(z) = \frac{1}{2} \int_L kz^2 dx_1 \quad \text{p/ a fundação de Winkler, e}$$

$$U^f(z) = \frac{1}{2} \int_L [kz^2 + \mu(z')^2] dx_1 \quad \text{p/ a fundação de Pasternak, e}$$

L é o comprimento da fundação.

Os problemas de contato vistos até aqui podem ser colocados em forma unificada como uma inequação variacional

$$u \in \mathbb{K}: a(u, v-u) \geq \ell(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.79)$$

ou ainda como um problema de minimização do funcional energia total Π :

$$\inf_{v \in \mathbb{K}} \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) \quad (3.80)$$

Em relação aos problemas clássicos de elasticidade linear onde as restrições são bilaterais, observa-se que a introdução de restrições unilaterais (como as de contato vistas aqui) levam a uma inequação (em vez de equação) variacional ou à minimização sobre um conjunto convexo (em vez de um espaço vetorial).

Os primeiros resultados relativos à existência e unicidade de soluções para a inequação variacional (3.79) são devidos a FICHERA (3), no seu estudo do problema de Signorini e a STAMPACCHIA (4).

É importante observar que, no contexto da elasticidade li

near aqui considerado (vide Cap. 2), o funcional Π é convexo e diferenciável no sentido de Gateaux e, assim, sempre que o conjunto convexo de configurações cinematicamente admissíveis \mathbb{K} for limitado o teorema de Weierstrass generalizado garante a existência de soluções para o problema de minimização (3.80). Ressalte-se entretanto que, na maioria das aplicações, o conjunto \mathbb{K} não é limitado e outras condições deverão ser satisfeitas para que o problema fique bem posto.

Por comodidade, cada um dos problemas de contato discutidos anteriormente será considerado, a seguir, em separado.

a) Problema de Signorini - É conveniente considerar, como foi feito no Cap. 2, duas situações distintas no que diz respeito às condições de contorno do problema. A primeira delas corresponde ao caso em que o sólido está fixo em Γ_u de maneira a impedir movimentos de corpo rígido, ou seja

$$\mathbb{K} \cap R = \{0\} .$$

Neste caso a primeira desigualdade de Korn e o fato do tensor constitutivo \mathbb{D} ser positivo-definido garantem a coercividade da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$

$$\exists c > 0: a(v, v) \geq c \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

e o teorema de Stampacchia assegura a existência e unicidade da solução do problema.

No segundo caso, a possibilidade de movimentos rígidos

$$\mathbb{K} \cap R \neq \{0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{K} \cap R \neq \emptyset$$

destrói a coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ em \mathbb{K} e acarretará exigências

adicionais para que o problema seja bem-posto. Assim, denotando por \mathbb{P}_r o operador que dá a projeção ortogonal dos elementos de V sobre o sub-espço dos movimentos rígid \bar{a} s R (núcleo da forma quadrática $a(\cdot, \cdot)$) introduz-se (FICHERA (3)) o conceito de semi-coercividade:

$$\exists c_1 > 0: a(v, v) \geq c_1 \|v - \mathbb{P}_r v\|^2 \quad \forall v \in V$$

que, graças a 2ª desigualdade de Korn, se verifica para o problema de Signorini.

Com as hipóteses: (i) a é semi-coerciva e (ii) R tem dimensão finita, o teorema de Fichera dá, como condição necessária para a existência de soluções para (3.79), que as cargas externas aplicadas sejam tais que

$$\ell(v) \leq 0 \quad \forall v \in R \cap \mathbb{K}$$

ou, em termos mecânicos, que realizem trabalho não-positivo para qualquer deslocamento rígid \bar{a} admissível.

Definindo o conjunto dos deslocamentos rígid \bar{a} s admissíveis bilaterais

$$R^* = \{v: \pm v \in R \cap \mathbb{K}\}$$

uma condição suficiente para a existência de soluções é dada por

$$\ell(v) \leq 0 \quad \forall v \in R \cap \mathbb{K}$$

$$\ell(v) = 0 \iff v \in R^*$$

Além disso, se u é uma solução do problema, qualquer outra solução u' é dada por $u' = u + \rho$ onde

$$\rho \in R, \quad \ell(\rho) = 0 \quad \text{e} \quad u + \rho \in \mathbb{K}$$

Resultados adicionais, inclusive em relação à regularidade das soluções, são dados por FICHERA (3). Alguns resultados mais recentes sobre inequações variacionais não-coercivas são enunciados em BAIIOCHI, GASTALDI e TOMARELLI (39).

Uma alternativa para caracterizar a existência de soluções para o problema de Signorini é considerar o sólido sem vínculos e sob a ação do sistema de cargas ativas ℓ e das reações de apoio r . Para que o problema admita solução, o sistema de cargas ℓ deve ser tal que o conjunto de reações de apoio r despertadas em Γ_u e Γ_c capazes de equilibrá-lo

$$\mathbb{K}^r = \{r: \ell(u, v-u) + r(u, v-u) = 0 \quad \forall v-u \in \mathbb{K} \cap R\} \quad (3.81)$$

seja não-vazio. Em (3.81) $r(u, v-u)$ denota o trabalho virtual das reações, na configuração u , para uma variação rígida admissível $v-u$.

Uma observação importante a ser feita aqui diz respeito ao conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathbb{K} . Como os deslocamentos são assumidos infinitesimais, por uma questão de consistência os valores assumidos pela função s que descreve a folga existente entre o sólido e a fundação rígida deverão ser também infinitesimais. Optou-se por escrever a condição de contato na forma

$$u \cdot n - s \leq 0$$

tendo em vista, por um lado, que a consideração de um dado s finito pode ser útil em aplicações práticas e, por outro, que $s \neq 0$ não trará nenhum ônus adicional do ponto de vista computacional.

Uma consequência de se tomar $s \equiv 0$ é que o conjunto convexo

$$\mathbb{K} = \{v \in V: v=0 \text{ em } \Gamma_u \text{ e } v \cdot n \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

passa a ser um cone e, neste caso, uma propriedade interessante pode ser observada.

Se u é a solução do problema de Signorini para as cargas (b, f) tem-se evidentemente

$$u \in \mathbb{K} \quad \text{e} \quad a(u, v-u) \geq \lambda(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

com λ associado a (b, f) . Dessa relação segue-se, para $\lambda \geq 0$, que

$$a(\lambda u, \lambda v - \lambda u) \geq \lambda \lambda(v - \lambda u) \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

Como \mathbb{K} é um cone, $\lambda v = v^* \in \mathbb{K}$ e daí tem-se

$$\lambda u \in \mathbb{K} \quad \text{e} \quad a(\lambda u, v^* - \lambda u) \geq \lambda \lambda(v^* - \lambda u) \quad \forall v^* \in \mathbb{K}$$

ou seja, λu é a solução do problema para o caso do carregamento proporcional $(\lambda b, \lambda f)$ para todo $\lambda \geq 0$.

b) O problema da indentação rí gida - Tendo em vista a inequação variacional (3.31) fica claro que, de uma maneira geral, os problemas de indentação rí gida considerados aqui correspondem a: (i) um convexo de configurações admissíveis \mathbb{K} não-limitado e (ii) uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ positiva semi-definida.

Esta última característica se deve à possibilidade de existência de movimentos rí gidos. De fato, o conjunto de movimentos rí gidos

$$R = \{v = (\beta_1, \beta_2, \omega, w) \in V: \int_{\Omega} \mathbb{D}\epsilon(v) \cdot \epsilon(v) d\Omega = 0\}$$

é um sub-espaco de V cuja dimensão varia de 0 a 6 para os problemas planos considerados aqui: 3 graus de liberdade para o sólido

rígido e 3 para o sólido deformável. Assim, apenas no caso de $R=\{0\}$ tem-se coercividade e o teorema de Stampacchia pode ser utilizado para garantir a existência e unicidade da solução. Nos demais casos pode-se esperar que a existência de soluções dependa do carregamento aplicado. De fato, referindo-se à Figura 3.8, é fácil ver que não há solução para o problema se se tem, por exemplo, $P_1 > 0$ e $P_2 < 0$.

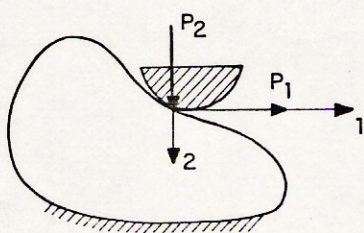


Fig 3.8

Na realidade o que deverá necessariamente ocorrer para uma dada solução é que tanto o sólido deformável quanto o rígido deverão estar em equilíbrio. Isto acarreta que as forças aplicadas a este último não são totalmente arbitrárias pois deverão ser equilibradas pelas reações desenvolvidas na região do contato. Em outras palavras, levando em conta o equilíbrio no sólido rígido, tem-se que o sistema (P_1, P_2, M) deve ser tal que o conjunto de reações capazes de equilibrá-lo

$$\mathbb{K}^r = \{q: q \geq 0, \int_{\Gamma_C} q n_i d\Gamma = P_i, i=1,2 \text{ e } \int_{\Gamma_C} q(n_2 x - n_1 \psi(x)) d\Gamma = M\}$$

seja não-vazio.

Para o caso simples em que as superfícies de contato são planas, Figura 3.9, as relações

$$P_1 = 0, \quad P_2 > 0$$

$$P_2 d_1 < M < P_2 d_2 \quad \text{com } d_1 < 0 \text{ e } d_2 > 0$$

devem ser verificadas para que (P_1, P_2, M) possa ser equilibrado por reações unilaterais de contato dirigidas no sentido negativo do eixo vertical.

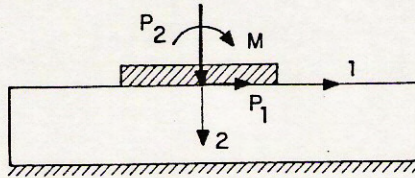


Fig. 3.9

Resumindo, do ponto de vista mecânico é natural esperar-se uma solução para o problema desde que as condições de contorno, a geometria e as cargas aplicadas sejam compatíveis, no sentido do equilíbrio do corpo rígido (e do sólido deformável) poder ser satisfeito por algum $q \in \mathbb{K}^r$.

Um exemplo de condição de compatibilidade das cargas suficiente para assegurar coercividade, numa situação específica, é dado em KIKUCHI e SONG (40).

c) O problema de contato entre dois corpos - Este caso pode ser analisado a partir das observações feitas aos itens a) e b) anteriores. Assim, na ausência de movimentos rígidos, $R=\{0\}$, o problema tem solução única devido à coercividade. Em caso contrário, a condição de compatibilidade a ser exigida do sistema de cargas externas aplicadas é que os dois corpos possam ficar em equilíbrio sob a ação de tal sistema e das reações de contato despertadas entre os dois corpos.

Um exemplo do estudo dessas condições numa situação específica (viga elástica apoiada sobre fundação de Pasternak) pode

ser encontrado em MACERI, TOSCANO e MACERI (41).

3.5. O TRATAMENTO DO CONJUNTO DE RESTRIÇÕES

Como já foi visto, os problemas de contato aqui analisados dão origem a uma inequação variacional (3.79) ou, equivalentemente, a um problema de minimização com restrições (3.80). Embora este último problema possa ser atacado diretamente, como se verá no Capítulo 5, alternativas existem a fim de se evitar a imposição de restrições ao conjunto dos deslocamentos admissíveis. Duas idéias serão comentadas aqui: (i) Funcionais de Penalização e (ii) Multiplicadores de Lagrange.

i) Funcionais de Penalização

Tendo em mente o problema de minimização

$$\inf_{v \in K} \Pi(v) \quad (3.82)$$

dois tipos de métodos de penalização são usualmente considerados: a) Penalização Externa e b) Penalização Interna.

a) Penalização Externa - Neste caso, o funcional Π é substituído pelo funcional penalizado

$$\Pi_{\zeta} = \Pi + \frac{1}{\zeta} P \quad (3.83)$$

onde ζ é um número positivo arbitrário e P um funcional de penalização exterior com a propriedade

$$P(v) \begin{cases} = 0 & \text{se } v \in K \\ > 0 & \text{se } v \notin K \end{cases}$$

A idéia é que quanto "mais violado" o conjunto de restrições K ,

maior seja o valor da penalidade a ser paga por isto. Assim, em geral, P é tal que $P(v)$ cresce à medida que v se afasta de K . O problema original (3.82) de minimização com restrições fica então substituído pela minimização, em todo o espaço V , do funcional penalizado

$$\inf_{v \in V} \Pi_{\zeta}(v) \quad (3.84)$$

À medida que $\zeta \rightarrow 0$ obtem-se uma sequência de minimizantes $\{u_{\zeta}\}$ que, sob condições adicionais sobre Π e P , convergirã para a solução u do problema original (3.82). O termo "exterior" deriva do fato dos elementos da sequência minimizante $\{u_{\zeta}\}$ serem externos (não pertencentes) ao conjunto K .

b) Penalização Interna - Neste caso o funcional Π é substituído pelo funcional penalizado

$$\Pi_{\zeta} = \Pi + \zeta B \quad (3.85)$$

onde B é um funcional de "barreira" com a propriedade

$$B(v) \begin{cases} \text{positivo, limitado} & \text{se } v \in \text{int } K \\ = +\infty & \text{se } v \notin \text{int } K \end{cases}$$

e destinado a impedir que os elementos da sequência minimizante $\{u_{\zeta}\}$ deixem o conjunto K .

Sob condições adicionais sobre Π e B , a solução u_{ζ} do problema de minimização sem restrições

$$\inf_{v \in V} \Pi_{\zeta}(v) \quad (3.86)$$

converge para a solução do problema original (3.82) mantendo-se sempre "interior" (pertencente) ao conjunto K .

Em ambos os casos a) e b), tomando-se funcionais P e B convexos vê-se que o problema de otimização resultante embora convexo e sem restrições pode, no entanto, deixar de ser diferenciável se P ou B não o forem.

A fim de ilustrar a aplicação da idéia de penalização, considere-se o problema de Signorini na forma (3.82) com

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\epsilon(v) \cdot \epsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma$$

e

$$\mathbb{K} = \{v: v \in V, v \cdot n - s \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

Um funcional de penalização externa neste caso seria

$$P(v) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} [(v \cdot n - s)^+]^2 d\Gamma \quad (3.87)$$

e o problema passa a ser minimizar

$$\Pi(v) + \frac{1}{\zeta} P(v)$$

em todo o espaço V.

Da diferenciabilidade de Π e P tem-se que o elemento minimizante u_{ζ} é caracterizado pela equação variacional

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\epsilon(u_{\zeta}) \cdot \epsilon(v) d\Omega + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_c} (u_{\zeta} \cdot n - s)^+ v \cdot n d\Gamma &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.88)$$

que é não-linear devido à presença do operador parte positiva $(\cdot)^+$.

A interpretação mecânica do esquema de penalização acima

fica evidente quando se verifica que substituindo-se o suporte rígrado por uma distribuição contínua de molas de constante elástica ζ^{-1} o funcional P dá a energia associada à deformação dessas molas devido à penetração $(v \cdot n - s)^+$. Em outras palavras, o suporte rígrado é aproximado por um suporte elástico, do tipo Winkler, de constante ζ^{-1} . Fica evidente também que as soluções aproximadas u_ζ violam as restrições

$$u_\zeta \notin \text{IK}$$

mas pode-se mostrar neste caso (ver KIKUCHI e SONG (42)) a convergência de u_ζ à medida que $\zeta \rightarrow 0$.

Ainda com referência ao problema de Signorini, um possível funcional de penalização interna seria (vide ODEN e KIM(43))

$$B(v) = \begin{cases} - \int_{\Gamma_c} \log_e (s - v \cdot n) d\Gamma & \text{se } v \in \text{IK} \\ +\infty & \text{se } v \notin \text{IK} \end{cases}$$

Levando em conta a diferenciabilidade de Π e de B

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial B(u + \alpha v)}{\partial \alpha} = \int_{\Gamma_c} \frac{v \cdot n}{(s - u \cdot n)} d\Gamma$$

tem-se que o elemento u_ζ que minimiza o funcional penalizado

$$\Pi(v) + \zeta B(v)$$

em todo o espaço V é caracterizado pela equação variacional não-linear

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(u_\zeta) \cdot \varepsilon(v) d\Omega + \zeta \int_{\Gamma_c} \frac{v \cdot n}{s - u_\zeta \cdot n} d\Gamma &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.89)$$

Em ambos os exemplos as pressões de contato são avaliadas "a posteriori" utilizando as expressões aproximadas

$$\sigma_n(u_\zeta) = -\frac{1}{\zeta} (u_\zeta \cdot n - s)^+ \quad (3.90a)$$

$$\sigma_n(u_\zeta) = \zeta (u_\zeta \cdot n - s)^{-1} \quad (3.90b)$$

respectivamente para o primeiro e segundo exemplos.

Esquemas de penalização externa são utilizados também em ASCIONE e GRIMALDI (44).

ii) Multiplicadores de Lagrange

Como é sabido, a introdução de multiplicadores de Lagrange possibilita a transformação de problemas de minimização com restrições em problemas de ponto de sela. Tomando o problema de Signorini como exemplo, vê-se que, como

$$\sup_{\rho \geq 0} \int_{\Gamma_c} \rho (v \cdot n - s) d\Gamma = \begin{cases} +\infty & \text{se } v \notin \text{IK} \\ 0 & \text{se } v \in \text{IK} \end{cases}$$

a formulação em termos de minimização (3.82) é equivalente ao problema de ponto de sela

$$\inf_{v \in V} \sup_{\rho \geq 0} L(v, \rho)$$

onde o lagrangeano L é

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \rho (v \cdot n - s) d\Gamma$$

O par (u, λ) com $u \in V$ e $\lambda \geq 0$ é um ponto de sela de L se

$$L(u, \rho) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda) \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad \forall \rho \geq 0$$

e deverá satisfazer então as condições

$$\frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial v}(v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial L(u, \lambda)}{\partial \rho}(\rho - \lambda) \leq 0 \quad \forall \rho \geq 0 \quad (3.92)$$

ou seja, no ponto (u, λ) as derivadas de Gateaux do lagrangeano L em relação a cada um de seus argumentos v e ρ devem ser, respectivamente, nula em todas as direções $v \in V$ e não-positiva na direção $\rho - \lambda$ para todo $\rho \geq 0$.

As relações (3.91) e (3.92) se escrevem respectivamente como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_c} \lambda v \cdot n d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\int_{\Gamma_c} (\rho - \lambda)(u \cdot n - s) d\Gamma \leq 0 \quad \forall \rho \geq 0 \quad (3.94)$$

e a segunda delas \bar{e} equivalente a

$$\begin{aligned} u \cdot n - s \leq 0 \\ \lambda(u \cdot n - s) = 0 \end{aligned} \quad \text{em } \Gamma_c \quad (3.95)$$

Observando-se (3.93) e (3.95) fica clara a interpretação física do multiplicador de Lagrange: ele representa a distribuição de tensões normais na região de contato Γ_c . Além disso, a eq. variacional (3.93) descreve o equilíbrio do corpo sob a ação das cargas aplicadas (b, f) e das reações de contato $(-\lambda)$ aplicadas em Γ_c .

Neste ponto algumas observações gerais podem ser feitas

em relação às alternativas (i) e (ii) apresentadas para contornar o problema das restrições cinemáticas. Nos esquemas de penalização não há necessidade de introduzir-se variáveis adicionais. As pressões de contato são avaliadas facilmente "a posteriori". Entretanto, o problema correspondente a um dado ζ constitui-se numa aproximação do problema original e, além disso, envolve a resolução de um sistema de equações não-lineares ou a resolução de um problema de programação não-linear sem restrições (eventualmente não-diferenciável). Na alternativa (ii), o multiplicador introduzido, devido a sua identificação com as tensões normais de contato, é de interesse prático para o analista e, além disso, quando da obtenção de soluções numéricas (Capítulo 5) será possível aproximar independentemente deslocamentos e multiplicadores o que acarreta maior precisão na avaliação das tensões de contato em relação à sua obtenção via diferenciação do campo de deslocamentos.