CAPÍTULO II

PRELIMINARES

2.1. INTRODUÇÃO

Antes de se iniciar a análise dos problemas de contato é conveniente tecer algumas considerações a respeito do problema do equilíbrio em Elasticidade Linear para o caso mais simples em que as restrições sobre o campo de deslocamentos são do tipo bilateral (descritas por igualdades). Assim, no item 2.2 as formulações forte (diferencial) e fraca (variacional) do problema de equilíbrio em regime de deformações infinitesimais são revistas. No item 2.3 são evidenciadas algumas propriedades do funcional energia potencial total em Elasticidade Linear tendo em vista sua utilização posterior no Capítulo 3. Finalmente, no item 2.4, considera-se uma formulação abstrata para o problema em termos de uma equação variacional ou da minimização de um funcional.

2.2. O PROBLEMA DO EQUILÍBRIO

Considere-se um sólido contínuo que na sua configuração indeformada ocupa o domínio $\bar{\Omega}$ onde Ω é aberto, limitado, simplesmente conexo, sub-conjunto do espaço Euclidiano de pontos tridimensional, conforme esquematizado na Figura 2.1.

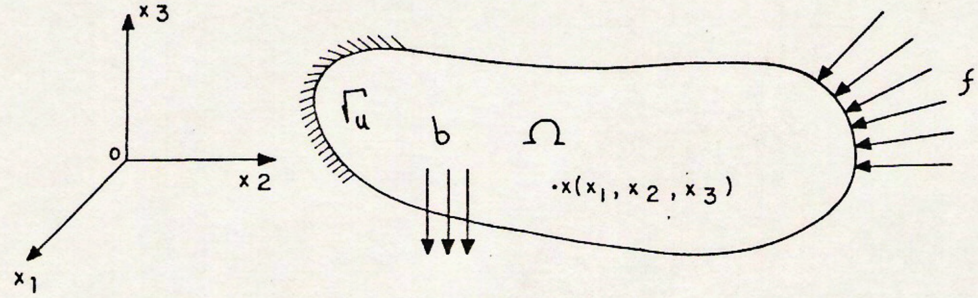

Fig.2.1

Assume-se que o contorno Γ de Ω seja regular e composto de duas partes abertas Γ_u e Γ_f tais que

$$\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_f = \Gamma$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset \qquad (\emptyset \text{ é o conjunto vazio})$$

onde são prescritos, respectivamente, o campo de deslocamentos u e o campo de forças de superfície f.

Deve-se ter em mente que a condição $\Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset$ corresponde a um abuso de notação visto que, em geral, para todo $x \in \Gamma$ o que ocorre é que se a componente $u_i(x)$, i=1,2,3, do campo de deslocamentos u estiver prescrita então a correspondente componente do campo de forças de superfície $f_i(x)$ não poderá estar prescrita.

Para simplificar a apresentação, supõe-se que o corpo esteja fixado em Γ_u, ou seja

$$u(x) = 0 \qquad \forall x \in \Gamma_u \tag{2.1}$$

O carregamento externo a que o corpo está submetido fica definido pelo par (b,f) onde b é um campo de forças definido em

Ω.

Diz-se que o campo de tensões internas σ está em equilíbrio com o carregamento externo (b,f) se

$$\mathrm{div}\ \sigma + b = 0 \qquad \text{em } \Omega \tag{2.2a}$$

$$\sigma n = f \qquad \text{em } \Gamma_f \tag{2.2b}$$

ou, em notação com índices,

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \qquad \text{em } \Omega \tag{2.2a}$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_i \qquad \text{em } \Gamma_f \qquad i,j=1,2,3 \tag{2.2b}$$

onde n é o vetor unitário normal exterior ao contorno Γ_f, a vírgula denota derivação e vale a convenção da soma sobre os índices repetidos.

Considere-se o espaço vetorial V formado por todos os campos de deslocamentos com regularidade suficiente para que as operações a serem efetuadas a seguir com seus elementos façam sentido. Considere-se ainda o subespaço $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K} = \{v \in V:\ v(x)=0 \quad \forall x \in \Gamma_u\}$$

formado pelos deslocamentos cinematicamente admissíveis do sólido da Figura 2.1.

Multiplicando-se escalarmente a Eq. (2.2a) pelo campo de deslocamentos $v \in \mathbb{K}$, integrando-se sobre o domínio Ω e levando em conta que

$$\mathrm{div}\ (\sigma v) = \mathrm{div}\ \sigma \cdot v + \sigma \cdot \nabla v$$

onde ∇ denota o operador gradiente e o ponto indica produto escalar vem

$$-\int_\Omega \sigma\cdot\nabla v \; d\Omega + \int_\Omega div(\sigma v) d\Omega + \int_\Omega b\cdot v \; d\Omega = 0 .$$

Aplicando-se o teorema da divergência à segunda parcela da equação acima e levando em conta a simetria do tensor de tensões σ e a condição de contorno (2.2b) tem-se

$$\int_\Omega \sigma\cdot \frac{1}{2} (\nabla v+\nabla v^T) d\Omega = \int_\Omega b\cdot v \; d\Omega + \int_{\Gamma_f} f\cdot v \; d\Gamma \tag{2.3}$$

onde $(\cdot)^T$ denota transposição.

Assumindo-se deformações infinitesimais, o tensor de deformações ε é dado pela parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos

$$\varepsilon(v) = \frac{1}{2} (\nabla v+\nabla v^T) \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} (v_{i,j}+v_{j,i})$$

e a Eq. (2.3) é a **Equação do Trabalho Virtual**

$$\int_\Omega \sigma\cdot\varepsilon(v) d\Omega = \int_\Omega b\cdot v \; d\Omega + \int_{\Gamma_f} f\cdot v \; d\Gamma \tag{2.4}$$

satisfeita para todo campo de deslocamentos $v \in \mathbb{K}$ desde que σ esteja em equilíbrio com as forças externas (b,f).

Reciprocamente, assumindo que os campos σ, b e f satisfaçam à Equação do Trabalho Virtual (2.4) para qualquer campo de deslocamentos $v \in \mathbb{K}$, mostra-se que σ está então em equilíbrio com (b,f). Partindo-se de (2.4) e perfazendo as operações em sentido contrário chega-se a

$$\int_{\Omega} (\text{div } \sigma + b) \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} (f - \sigma n) \cdot v \, d\Gamma = 0 \qquad (2.5)$$

Como (2.5) é válida para qualquer $v \in \mathbb{K}$, em particular deverá ser válida também para qualquer v tomado no subespaço $C_o(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{K}$

$$C_o(\bar{\Omega}) = \{w: w \text{ contínua}, \ w(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma\}$$

e assim

$$\int_{\Omega} (\text{div } \sigma + b) \cdot v \, d\Omega = 0 \qquad \forall v \in C_o(\bar{\Omega})$$

o que acarreta (2.2a):

$$\text{div } \sigma + b = 0 \qquad \text{em } \Omega \ . \qquad (2.6)$$

Tomando-se agora v no subespaço $C'_o(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{K}$

$$C'_o(\bar{\Omega}) = \{w: w \text{ contínua}, \ w(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_u\}$$

e levando em conta (2.6) segue-se, de maneira análoga, (2.2b):

$$\sigma n = f \qquad \text{em } \Gamma_f$$

As Eqs. (2.2) são ditas de equilíbrio **local** e constituem a chamada caracterização **forte** do equilíbrio, enquanto a Eq.(2.4) representa o equilíbrio **global** e constitui a caracterização dita **fraca** ou integral. Observe-se ainda que a equivalência entre(2.2) e (2.4) fica condicionada à regularidade do campo de tensões σ que, se não for atendida, torna a formulação local sem sentido.

Até aqui nada foi dito a respeito da natureza do material do qual o corpo é formado. Considerando então que as tensões sejam função do tensor de deformações infinitesimais ε pode-se admitir a existência de uma relação da forma

$$\sigma = \sigma(\varepsilon(u)) \tag{2.7}$$

Assim, o problema do equilíbrio do sólido da Fig. 2.1 consiste em achar o par (u,σ) tal que: (i) u satisfaça a condição de contorno geométrica (2.1); (ii) σ esteja em equilíbrio com (b,f) e (iii) σ e u estejam ligados pela relação constitutiva (2.7). Tem-se então o problema de valor de contorno

$$\operatorname{div} \sigma(\varepsilon(u)) + b = 0 \qquad \text{em } \Omega \tag{2.8a}$$

$$\sigma(\varepsilon(u))n = f \qquad \text{em } \Gamma_f \tag{2.8b}$$

$$u = 0 \qquad \text{em } \Gamma_u \tag{2.8c}$$

que representa o problema do equilíbrio expresso em termos do campo de deslocamentos u.

Tendo em mente (2.7) e aplicando a Equação do Trabalho Virtual (2.4) uma vez para $v \in \mathbb{K}$ e outra para $v=u$ solução do problema (2.8), obtem-se uma caracterização para a solução u

$$u \in \mathbb{K}: \int_\Omega \sigma(\varepsilon(u))\cdot\varepsilon(v-u)d\Omega = \int_\Omega b\cdot(v-u)d\Omega + \int_{\Gamma_f} f\cdot(v-u)d\Gamma \qquad \forall v \in \mathbb{K} \tag{2.9}$$

que corresponde a uma equação variacional.

2.3. O FUNCIONAL ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Tendo em mente uma equação constitutiva do tipo elástica linear, pode-se introduzir uma função densidade de energia de deformação Φ quadrática nas componentes do tensor de deformações infinitesimais ε

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\,\mathbb{D}\varepsilon\cdot\varepsilon = \frac{1}{2}\,\mathbb{D}_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell}\varepsilon_{ij} \,.$$

$\mathbb{D}$ é o tensor (de 4ª ordem) constitutivo da Elasticidade Linear e que satisfaz as propriedades usuais de simetria e elipticidade

$$\mathbb{D}(x)A\cdot B = A\cdot\mathbb{D}(x)B \tag{2.10}$$

$$\mathbb{D}(x)A\cdot A \geq \alpha\; A\cdot A \tag{2.11}$$

onde $x \in \Omega$, α é positivo e A e B são tensores simétricos de 2ª ordem.

A equação constitutiva se escreve então

$$\sigma = \frac{\partial\Phi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \mathbb{D}\varepsilon \qquad , \qquad \sigma_{ij} = \mathbb{D}_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \tag{2.12}$$

e a equação variacional (2.9) fica

$$u \in \mathbb{K}: \int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v-u)\,d\Omega = \int_\Omega b\cdot(v-u)\,d\Omega \,+$$

$$+ \int_{\Gamma_f} f\cdot(v-u)\,d\Gamma \qquad \forall v \in \mathbb{K} \tag{2.13}$$

Levando em conta a convexidade de Φ e a linearidade de ε segue-se que

$$\Phi(\varepsilon(v)) - \Phi(\varepsilon(u)) \geq \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v-u) \;.$$

Substituindo esta expressão em (2.13) e introduzindo o funcional

$$\Pi(v) = \int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(v)\cdot\varepsilon(v)d\Omega - \int_\Omega b\ v\ d\Omega - \int_{\Gamma_f} f\cdot v\ d\Gamma \qquad (2.14)$$

da **Energia Potencial Total** chega-se à formulação equivalente do problema de equilíbrio:

$$u \in \mathbb{K}: \Pi(u) \leq \Pi(v) \qquad \forall v \in \mathbb{K}$$

que é o conhecido princípio da **Mínima Energia Potencial Total.**

Neste ponto é conveniente evidenciar algumas propriedades úteis do funcional energia potencial total Π. A primeira delas é a **diferenciabilidade** no sentido de Gateaux. Calculando-se $\Pi(u+\zeta v)$, onde ζ é um real positivo, tem-se

$$\Pi(u+\zeta v) = \Pi(u) + \zeta\left[\int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v)d\Omega - \ell(v)\right] +$$

$$+ \frac{\zeta^2}{2}\int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(v)\cdot\varepsilon(v)d\Omega$$

onde introduziu-se o funcional linear contínuo

$$\ell(v) = \int_\Omega b\cdot v\ d\Omega + \int_{\Gamma_f} f\cdot v\ d\Gamma \quad .$$

Assim

$$\lim_{\zeta\to 0} \frac{\partial}{\partial\zeta}\Pi(u+\zeta v) = \int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v)d\Omega - \ell(v)$$

é um funcional linear contínuo para todo v e é a derivada de Gateaux do funcional Π no ponto u na direção v. O gradiente de Π em u é o operador

$$\Pi'(u,\cdot) = \int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(\cdot)d\Omega - \ell(\cdot)$$

A segunda propriedade é a **convexidade. De fato,**

$$\Pi(\theta u+(1-\theta)v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [\theta^2\mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)+2\theta(1-\theta)\mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v)+$$

$$+(1-\theta)^2\mathbb{D}\varepsilon(v)\cdot\varepsilon(v)]d\Omega - \theta\ell(u) - (1-\theta)\ell(v) \quad (2.15)$$

Como $\mathbb{D}$ é assumido positivo-definido

$$\mathbb{D}\varepsilon(v-u)\cdot\varepsilon(v-u) \geqq 0 \quad (2.16)$$

e daí

$$\frac{1}{2}[\mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)+\mathbb{D}\varepsilon(v)\cdot\varepsilon(v)] \geqq \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v)$$

que levado em (2.15) fornece

$$\Pi(\theta u+(1-\theta)v) \leqq \frac{1}{2}\theta\int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)d\Omega - \theta\ell(u) +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-\theta)\int_\Omega \mathbb{D}\varepsilon(v)\cdot\varepsilon(v)d\Omega-(1-\theta)\ell(v)$$

ou

$$\Pi(\theta u+(1-\theta)v) \leq \theta\Pi(u) + (1-\theta)\Pi(v)$$

que é a condição de convexidade. Como a igualdade em (2.16) só ocorre para um campo de deslocamentos v-u de corpo rígido

$$\varepsilon(v-u) = 0$$

segue-se que o funcional Π é **estritamente convexo** quando o corpo está fixo em Γ_u de maneira a excluir movimentos rígidos, ou seja

$$\mathbb{K} \cap R = \{0\}$$

com

$$R = \{w \in V: \varepsilon(w)=0\}$$

Outra propriedade útil é a **coercividade**. A fim de verificá-la é necessário estabelecer algumas relações importantes (vide KIKUCHI e ODEN (1)).

Inicialmente observa-se que para a avaliação do funcional $\Pi(v)$ é suficiente considerar campos de deslocamentos $v \in H(\Omega)$, onde

$$H(\Omega) = \{v=(v_1,v_2,v_3):\ v_i \in H^1(\Omega),\ i=1,2,3,\ v=0 \text{ em } \Gamma_u\}$$

e $H^1(\Omega)$ é o espaço de Hilbert com produto interno e norma dados respectivamente por

$$(u,v)_1 = \int_\Omega (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j})\, d\Omega \qquad \text{e}$$

$$\| u \|_1^2 = (u,u)_1$$

e tomar $b=(b_1,b_2,b_3)$ e $f=(f_1,f_2,f_3)$ quadrado-integráveis, isto é

$$b_i \in L^2(\Omega) \quad , \quad \| b_i \|_0^2 = \int_\Omega b_i^2\, d\Omega \quad , \quad \| b \|_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \| b_i \|_0^2$$

$$f_i \in L^2(\Gamma_f) \quad , \quad \| f_i \|_{0,\Gamma_f}^2 = \int_{\Gamma_f} f_i^2\, d\Gamma \quad , \quad \| f \|_{0,\Gamma_f}^2 = \sum_{i=1}^{3} \| f_i \|_{0,\Gamma_f}^2$$

Neste caso pode-se mostrar que

$$\left| \int_\Omega b \cdot v\, d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v\, d\Gamma \right| \leq \| b \|_0 \| v \|_1 + c \| f \|_{0,\Gamma_f} \| v \|_1$$

onde c é uma constante positiva, e, usando-se (2.11), tem-se que

$$\Pi(v) \geq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega \varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v)\, d\Omega - [\| b \|_0 + c \| f \|_{0,\Gamma_f}] \| v \|_1$$

Neste ponto deve-se considerar separadamente as duas situações: (i) movimentos rígidos impedidos, ou seja, $V_{ad} \cap R=\{0\}$, onde V_{ad} denota o conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis do problema e (ii) caso contrário.

No caso (i) a 1ª desigualdade de Korn

$$\int_\Omega \varepsilon(v)\cdot\varepsilon(v)d\Omega \geqq c_1 \| v \|_1^2$$

acarreta

$$\Pi(v) \geqq \frac{\alpha}{2} c_1 \| v \|_1^2 - [\| b \|_0 + c \| f \|_{0,\Gamma_f}] \| v \|_1$$

e daí segue-se a coercividade de Π

$$\Pi(v) \to +\infty \qquad \text{se} \qquad \| v \|_1 \to +\infty \qquad \forall v \in V_{ad}$$

No caso (ii) as desigualdades de Korn não se aplicam diretamente e mostra-se (vide DUVAUT-LIONS (6)) que a coercividade de Π fica condicionada ao fato do sistema de cargas (b,f) ser auto-equilibrado

$$\int_\Omega b\cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} f\cdot v \, d\Gamma = 0 \qquad \forall v \in V_{ad} \cap R$$

2.4. FORMULAÇÃO ABSTRATA

De uma maneira geral, o problema do equilíbrio de uma estrutura de comportamento elástico linear com restrições bilaterais pode ser escrito em sua formulação forte como

$$\begin{aligned} A(u) &= L && \text{em } \Omega \\ u &= \bar{u} && \text{em } \Gamma_u \\ \sigma(u)n &= f && \text{em } \Gamma_f \end{aligned}$$

A formulação fraca correspondente é dada pela equação variacional

$$u \in V_{ad}:\ a(u,v-u) = \ell(v-u) \qquad \forall v \in V_{ad} \tag{2.17}$$

onde $a: (V_{ad} \times V_{ad}) \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica, positiva e contínua, ou seja

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a(v,u) \\ a(v,v) &\geq 0 \\ \exists c_2>0:\ a(u,v) &\leq c_2 \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u,v \in V_{ad} \end{aligned}$$

e que representa o trabalho das forças internas associado a um deslocamento virtual. O funcional linear ℓ representa o trabalho virtual das forças externas e é contínuo

$$\exists c_3>0:\ \ell(v) \leq c_3 \|v\| \qquad \forall v \in V_{ad}$$

O conjunto V_{ad} dos deslocamentos cinematicamente admissíveis é uma translação do espaço linear V_o

$$V_{ad} = \{v \in V:\ v=u_o+w,\ u_o \in V,\ u_o=\bar{u} \text{ em } \Gamma_u,\ w \in V_o\}$$

onde $\bar{u}$ denota o deslocamento prescrito em Γ_u e $V_o \subset V$ é o sub-espaço das variações admissíveis

$$V_o = \{v \in V:\ v=0 \text{ em } \Gamma_u\}$$

Uma mudança de variáveis (translação) permite entretanto re-escrever o problema na forma (2.17) onde V_{ad} passa a ser um sub-espaço de V. O espaço V com norma $\|\cdot\|$ é formado por campos de deslocamentos suficientemente regulares definidos sobre o domínio Ω.

Mostra-se ainda que a solução da equação variacional (2.17) minimiza em V_{ad} a energia potencial total do sistema

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - \ell(v)$$

Em relação à existência e unicidade da solução para o problema (2.17) o Teorema de Lax-Milgram pode ser utilizado. Nele, embora a simetria de a não seja requerida, a condição de positividade é substituída pela hipótese mais forte de coercividade:

$$\exists c_4 > 0: \; a(v,v) \geq c_4 \|v\|^2 \qquad \forall v \in V_{ad}$$

Assim, deste teorema tem-se que se a é contínua e coerciva o problema (2.17) tem solução única para qualquer funcional ℓ contínuo.

Além disso, da linearidade da equação de equilíbrio e das relações entre σ e ε e ε e u segue-se que se a solução associada ao carregamento externo L é u*, a solução para o carregamento proporcional λL será, evidentemente, λu* para qualquer valor do escalar λ.