ALGORITMOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE
CONTATO EM ELASTICIDADE

Helio José Corrêa Barbosa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

Prof. Nelson F.F. Ebecken
(Presidente)

Prof. Fernando Venâncio Filho

Prof. Luiz Bevilacqua

Prof. Raúl A. Feijóo

Prof. Augusto Cesar N.R. Galeão

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1986

BARBOSA, HELIO JOSÉ CORRÊA

Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade (Rio de Janeiro) 1986.

ix, 215 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 1986)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Problemas de Contato 2. Elementos Finitos 3. Elasticidade I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Àqueles que, apesar de tudo, dão o melhor de si nas universidades e institutos de pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Raúl A. Feijóo, pelo estímulo constante e pela orientação deste trabalho.

Ao Prof. Nelson F.F. Ebecken, pela amizade e apoio dispensados durante todos esses anos no Programa de Engenharia Civil da COPPE / UFRJ.

Aos colegas do LNCC/CNPq, pela amizade, e em especial a José Karam Filho, pela elaboração de rotinas gráficas e a Míriam B.F. Chaves , pela ajuda valiosa na obtenção dos desenhos no "plotter".

A Lúcio F.P. Maciel e Paulo Faria, pela confecção dos desenhos.

À Cristina Raimundo, pela bela datilografia.

Aos meus pais e irmãos, pela presença e apoio constantes.

Finalmente, devo agradecer à Margareth, pela paciência e por tantas horas, cedidas em nosso dia a dia, para a elaboração deste trabalho.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ALGORITMOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE CONTATO EM ELASTICIDADE

Helio José Corrêa Barbosa

Dezembro de 1986

Orientador: Raúl A. Feijóo
Programa: Engenharia Civil

Discute-se neste trabalho formulações variacionais e algoritmos numéricos para a análise de problemas de contato em elasticidade infinitesimal. O efeito do atrito pode ser levado em conta através da lei de Coulomb.

O método dos elementos finitos é usado na discretização espacial e técnicas de programação matemática são utilizadas na resolução dos problemas de otimização resultantes.

São apresentados vários exemplos numéricos de aplicação dos algoritmos implementados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NUMERICAL ALGORITHMS FOR CONTACT PROBLEMS
IN ELASTICITY

Helio José Corrêa Barbosa

December, 1986

Chairman: Raúl A. Feijóo
Department: Civil Engineering

In this work, variational formulations and numerical algorithms for the analysis of contact problems in infinitesimal elasticity are discussed. Friction can be taken into account through Coulomb's law.

The finite element method is used for spatial discretization and mathematical programming techniques are employed to solve the resulting optimization problems.

Some numerical examples of the application of the implemented algorithms are presented.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O contato entre sólidos deformáveis é um fenômeno corriqueiro em sistemas mecânicos e estruturais. Na verdade, é através do contato entre corpos que grande parte das forças são transmitidas nestes sistemas. Assim, graças ao princípio de Saint-Venant (longe da região em que as forças são aplicadas o estado de tensão pode ser avaliado sem que se conheça com exatidão a distribuição daquelas forças na região de aplicação) as forças transmitidas por contato são frequentemente simplificadas e passam a constituir um dado do problema: as chamadas forças de superfície.

Entretanto, isto nem sempre é desejável. Há situações práticas em que é necessário conhecer o que ocorre na região do contato. Todavia, o problema de contato apresenta dificuldades tanto do ponto de vista da formulação do modelo quanto de sua resolução computacional.

De fato, em geral, não se conhece "a priori" a real superfície de contato nem os deslocamentos e tensões aí existentes o que impede a definição das condições de contorno do problema na forma usual. A condição de contorno de natureza cinemática que se aplica à região - desconhecida "a priori" - do contato corresponde à não-interpenetração dos sólidos em questão e se escreve na forma de desigualdades. A condição de contorno que pode ser escrita em relação à reação de contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida, por exemplo, é que esta reação, se existir, só pode ter um certo sentido - exterior à superfície rígida - sendo expressa também por uma inequação. Restrições deste tipo são denominadas unilaterais, em oposição ao caso usual - descrito por igualdades - bilateral.

Assim, mesmo no caso de materiais elásticos lineares em regime de deformações e deslocamentos infinitesimais, o problema deixa de ser linear. Como se verá mais adiante, o princípio dos trabalhos virtuais assume não mais a forma de uma equação e sim de uma inequação variacional. Além disso, se o atrito entre as superfícies em contato deve ser levado em conta o problema se torna extremamente complexo. É de se esperar portanto que apenas em situações muito particulares seja possível encontrar soluções analíticas exatas, ou mesmo aproximadas, ficando os casos mais gerais na dependência da formulação de modelos e algoritmos adequados à obtenção de soluções numéricas.

O estudo de problemas de contato em elasticidade iniciou-se no século passado com tentativas de Poisson, Saint-Venant e Voight (KIKUCHI e ODEN (1)). Entretanto foi Hertz, em trabalho publicado em 1882, o primeiro a construir um modelo aceitável para alguns problemas de contato em elasticidade. Sua teoria, segundo JOHNSON (2), "sobreviveu ao teste de resistência dos 100 anos", constituindo-se, até hoje, numa boa aproximação para uma série de problemas práticos que passaram então a ser denominados problemas de contato hertzianos.

Já o problema mais geral do equilíbrio de um sólido elástico linear em contato com uma fundação rígida e sem atrito somente foi formulado em 1933 por Signorini, que apresenta um tratamento mais completo do mesmo em 1959 (FICHERA (3)).

A primeira análise rigorosa de uma classe de problemas de Signorini foi apresentada por Fichera em 1963 e envolvia questões de existência e unicidade de soluções das inequações variacionais associadas à minimização de funcionais em conjuntos convexos de espaços de Hilbert. Estes resultados se aplicam a problemas caracterizados por uma forma bilinear simétrica não necessariamente coerciva e estão detalhados em FICHERA (3).

O caso de formas coercivas não-simétricas foi analisado por STAMPACCHIA (4) em 1964 e LIONS e STAMPACCHIA (5) em 1967.

Desde então a teoria de inequações variacionais tem se desenvolvido fornecendo uma base sólida para a formulação e análise de modelos mecânicos, esquemas de aproximação e algoritmos computacionais correspondentes.

Duas obras importantes devem ser ressaltadas aqui: o livro de DUVAUT e LIONS (6), onde vários problemas da mecânica e da física são formulados em termos de inequações variacionais e os dois volumes de GLOWINSKI, LIONS e TRÉMOLIÈRES (7) onde esquemas de aproximação e algoritmos de resolução são apresentados.

Embora soluções analíticas possam ser encontradas na literatura (vide o levantamento de KALKER (8), por exemplo) apenas algumas delas serão consideradas, no capítulo 6, no intuito de proporcionar uma comparação com os resultados numéricos obtidos. Neste trabalho o interesse se concentra em procedimentos numéricos, especialmente aqueles que lançam mão do Método dos Elementos Finitos (MEF) devido à generalidade e difusão do mesmo no meio técnico-científico atual.

A aplicação do MEF a problemas de contato tem-se dado, na maioria dos casos, segundo duas alternativas principais.

A primeira delas consiste em adaptar as formulações usuais - correspondentes a restrições cinemáticas bilaterais e funcionais diferenciáveis - ao caso do contato, que envolve restrições unilaterais e, considerando-se atrito de Coulomb, termos não-diferenciáveis. Os procedimentos resultantes são forçosamente de natureza incremental-iterativa e frequentemente não tem garantia de convergência. Por outro lado, esta classe de procedimento tem o atrativo de não introduzir conceitos novos em relação aos problemas usuais (com restrições bilaterais e diferenciabilidade) da mecânica estrutural. Outra motivação parece ser o desejo de minimizar custos de desenvolvimento através da adaptação de códigos já existentes para problemas não-lineares a essa "nova" classe de problemas de contato unilateral. Nessa alternativa os problemas de contato são tratados como um tipo particular de problema não-linear e, em alguns casos, lança-se mão de elementos especiais de interface projetados para simular as condições de não-interpenetração (e eventualmente atrito) entre as superfícies.

Como exemplos de trabalhos nesta linha pode-se citar WILSON e PARSONS (9) (problemas axissimétricos sem atrito e com superfície de contato conhecida), CHAN e TUBA (10), TSUTA e YAMAJI (11), FRANCAVILLA e ZIENKIEWICZ (12) (posteriormente extendido por SACHDEVA, RAMAKRISHNAN e NATARAJAN (13) e, para o caso com atrito, por SACHDEVA e RAMAKRISHNAN(14)), FREDRIKSSON(15), GAERTNER (16), OKAMOTO e NAKAZAWA (17).

Ainda nesta linha, elementos especiais de interface foram considerados, por exemplo, por SCHÄFER (18), na modelagem de movimentos relativos tangenciais entre duas superfícies em contato (a possibilidade de movimentos relativos na direção normal foi excluída), por STADTER e WEISS (19) em problemas de contato sem atrito e ZOLTI (20) incluindo o atrito.

Para problemas sem atrito pode-se citar ainda os trabalhos de MAHMOUD, SALAMON e MARKS (21) e MAHMOUD, SALAMON e PAWLAK (22).

Embora a grande maioria dos trabalhos utilize modelos de deslocamentos, pode-se citar TSENG e OLSON (23), que utilizam um elemento misto para problemas bidimensionais e PIAN e KUBOMURA (24) que utilizam um modelo híbrido com tensões assumidas.

Finalmente, observa-se também na literatura, algumas aplicações do método dos elementos de contorno ao problema de contato (ANDERSSON e PERSON (25) e PARIS e GARRIDO (26)) que podem ser colocadas nesta mesma linha.

A segunda alternativa - a adotada neste trabalho - parte da formulação, a nosso ver, natural, do problema e que dá origem a inequações variacionais. A construção de espaços de aproximação via MEF gera problemas a dimensão finita aos quais técnicas de programação matemática podem ser aplicadas.

Neste ponto vale ressaltar que nos problemas de contato aqui abordados considera-se materiais do tipo elástico linear e um regime de deformações e deslocamentos infinitesimais.

Do conhecimento do autor os primeiros trabalhos nesta linha datam do ano de 1967. DUPUIS e PROBST (27) consideram modelos estruturais discretos onde condições unilaterais são impostas ao problema que é colocado na forma de minimização de um funcional quadrático a dimensão finita para o qual algoritmos de programação matemática são empregados.

Soluções para expansões com um número reduzido de termos em exemplos simples de vigas com restrições unilaterais são apresentadas por VILLAGIO (28).

Um algoritmo de programação quadrática é utilizado por CONRY e SEIREG (29) na análise de problemas de contato sem atrito.

FREMOND (30), já fazendo uso do MEF, apresenta formulações em termos tanto da minimização de um funcional quanto da busca do ponto de sela de um lagrangeano.

SAYEGH (31) utiliza um algoritmo de programação quadrática especializado para a solução de pórticos com apoios discretos unilaterais.

Em 1975 PANAGIOTOPOULOS (32) propõe para o problema de contato unilateral com atrito um procedimento iterativo que lança mão de sub-problemas resolvidos via técnicas de programação não-linear.

Técnicas de programação quadrática são também utilizadas por CHAND, HAUG e RIM (33), HAUG, CHAND e PAN (34) e HUNG e SAXCÉ (35) para problemas de contato sem atrito e, incluindo o atrito, por FREDRIKSSON, RYDHOLM e SJÖBLOM (36).

Desde então as publicações na área se multiplicam tendo surgido inclusive reuniões específicas sobre o tema de problemas unilaterais em análise estrutural (vide DEL PIERO e MACERI(37)). Assim, oportunamente, nos capítulos seguintes, referências adicionais à literatura serão feitas.

Antes de se considerar os problemas de contato, algumas características do problema usual de elasticidade com restrições bilaterais são revistas no Capítulo 2. No Capítulo 3 os problemas de contato são discutidos sem levar em conta o atrito, deixando para o Capítulo 4 a inclusão do mesmo. Em ambos os casos, através de discretização via MEF, problemas discretos são obtidos e algoritmos numéricos para sua resolução são considerados no Capítulo 5. Finalmente são apresentados, no Capítulo 6, alguns exemplos numéricos de aplicação das formulações e algoritmos de resolução implementados computacionalmente.