

MODELAGEM HIERÁRQUICA PARA A EQUAÇÃO DO CALOR EM UMA PLACA
HETEROGÊNEA

Ana Carolina Carius

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE
FORMAÇÃO DE RECURSOS HUMANOS DO LABORATÓRIO NACIONAL
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Alexandre L. Madureira, Ph. D. - orientador

Prof. Jaime Muñoz Rivera, D. Sc.

Prof. Fernando Alves Rochinha, D. Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

MARÇO/2006

CARIUS, ANA CAROLINA

Modelagem Hierárquica para a equação
do calor em uma placa heterogênea
[Petropolis] 2006

ix, 60 p. 29,7 cm (MCT/LNCC), M.Sc.,
Modelagem Computacional, 2006

Dissertação - Laboratório Nacional de
Computação Científica, LNCC

1. Placa Heterogênea, Modelos Hierárquicos,
Elemento Finito Multiescala

I. MCT/LNCC II. Título (série)

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Alexandre Madureira pela paciência durante todo o trabalho. Ao meu esposo Rodrigo Koch de Oliveira e à minha família. Aos meus amigos.

Agradeço também ao apoio institucional do LNCC e ao apoio financeiro da Capes, sem o qual seria impossível desenvolver este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à MCT/LNCC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM HIERÁRQUICA PARA A EQUAÇÃO DO CALOR EM UMA PLACA
HETEROGÊNEA

Ana Carolina Carius

Fevereiro /2006

Orientador: Alexandre Loureiro Madureira

Modelagem Computacional

Neste trabalho, estudamos a equação do calor estacionária em uma placa heterogênea tridimensional. Para a modelagem deste problema, utilizamos uma técnica de redução de dimensão conhecida por Modelagem Hierárquica. Desta forma, geramos um modelo para o problema original em um domínio bidimensional. Com o objetivo de estimar o erro de modelagem, desenvolvemos a expansão assintótica da solução do problema original e da solução aproximada. Comparando as soluções com suas respectivas expansões assintóticas, obtemos uma estimativa para o erro de modelagem. Realizamos alguns experimentos computacionais, desenvolvendo o método Residual Free Bubbles (RFB) e o método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM) para o problema de difusão e para o problema de difusão-reação em um domínio bidimensional, com parâmetros pequenos. Com base nestes experimentos, encontramos algumas soluções numéricas para o problema da placa tridimensional.

Abstract of Thesis presented to MCT/LNCC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

HIERARCHICAL MODELLING FOR THE HEAT EQUATION IN A HETEROGENEOUS
PLATE

Ana Carolina Carius

Março/2006

Advisor: Alexandre Loureiro Madureira

Computational Modelling

In this dissertation, we study the stationary heat equation in a heterogeneous tridimensional plate, using a “dimension reduction” technique called hierarchical modelling and we generate model the original problem in a two-dimensional domain. To estimate the error modelling, we develop an asymptotic expansion for the original problem solution and for the approximate solution. Comparing both solutions with their own asymptotic expansions, we obtain an estimative of the error modelling. We perform some computational experiments, using the Residual Free Bubbles (RFB) Method and the Multiscale Finite Element Method for the diffusion problem and for the diffusion-reaction problem in a two-dimensional domain, with small parameters. Finally, we extend the numeric solutions found the original tridimensional problem.

Conteúdo

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
2 A Equação do Calor em uma placa heterogênea	7
2.1 Modelos Hierárquicos	8
2.2 Expansão assintótica	9
2.3 Estimativas	13
3 Métodos Numéricos	22
3.1 O problema de difusão com coeficientes oscilatórios	22
3.1.1 A formulação variacional	23
3.2 Uma aproximação utilizando o método Residual Free Bubbles (RFB)	24
3.3 Uma aproximação utilizando o Método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM)	29
3.4 Implementação e Testes Numéricos	31
3.4.1 Implementação	31
3.4.2 Testes Numéricos	34
3.5 O problema de difusão-reação com coeficientes oscilatórios	39
3.5.1 Testes Numéricos	40
4 Testes Numéricos para o problema da placa heterogênea	45
4.1 Implementação e Testes Numéricos	45
5 Conclusão	53
Referências Bibliográficas	55
Apêndices	56
A Redução de dimensão através dos Modelos Hierárquicos	56

Lista de Figuras

2.1	Os domínios P^δ e P	10
3.1	Domínio Ω e um elemento K fixo.	32
3.2	Função ϕ , obtida fixando-se um elemento K e resolvendo o problema (3.9) em uma malha de 128×128 elementos quadrados.	35
3.3	Função de base λ , obtida através da definição (3.12).	36
3.4	Curvas de nível da função de base da Figura 3.3.	36
3.5	Cortes na direção diagonal da solução aproximada por RFB, MEFM e Galerkin, comparadas com a solução exata.	37
3.6	Gráfico do $\log \ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para $\epsilon = 1/64$	40
3.7	Função ϕ para $\epsilon = 1/32$	41
3.8	Função de base λ para $\epsilon = 1/32$	42
3.9	Curvas de nível para a função de base da Figura 3.5.1.	42
3.10	Cortes na direção diagonal da solução aproximada por MEFM e Galerkin, comparadas com a solução exata.	43
3.11	Gráfico do $\log \ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para $\epsilon = 1/64$	44
4.1	Cortes na direção diagonal das soluções aproximadas por MEFM e Galerkin para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-1}$ para o problema (1.6).	46
4.2	Cortes na direção diagonal das soluções aproximadas por MEFM e Galerkin para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-1}$ para o problema (1.7).	47
4.3	Solução aproximada por MEFM para o problema da placa heterogênea, considerando $x_3 = \delta$, para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 1/10$	48
4.4	Curvas de nível da solução obtida para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-1}$ da Figura 4.3.	48
4.5	Solução para o problema da placa por MEFM para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-3}$, com $x_3 = \delta$	49
4.6	Curvas de nível para a solução da Figura 4.5.	49
4.7	Cortes na direção diagonal para as soluções aproximadas para o problema de difusão-reação por MEFM e Galerkin, considerando $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-3}$	50
4.8	Cortes na direção diagonal para as soluções aproximadas para o problema da placa heterogênea por MEFM e Galerkin, considerando $x_3 = \delta$, para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-3}$	50
4.9	Solução aproximada pelo método de Galerkin para o problema da placa heterogênea para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-6}$	51

4.10 Curvas de nível da solução da Figura 4.9. 51

4.11 Cortes na direção diagonal para as soluções aproximadas por Galerkin e MEFM para o problema na placa heterogênea para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-6}$ 52

Lista de Tabelas

3.1	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para RFB	38
3.2	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para MEFM	38
3.3	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para Galerkin	38
3.4	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para MEFM	39
3.5	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para MEFM em [7]	39
3.6	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para MEFM	43
3.7	Cálculo de $\ u - u_h\ _{l^2(\Omega)}$ para Galerkin	44

Capítulo 1

Introdução

O nosso trabalho tem como objetivo estudar a equação do calor em uma placa heterogênea tridimensional. Lidar com problemas deste tipo não é uma tarefa fácil. A primeira dificuldade que devemos levar em consideração é a espessura da placa, que torna o domínio difícil de ser discretizado. Além disto, como a placa é heterogênea na direção horizontal, procuramos caracterizar as propriedades do material que a compõe recorrendo à *escala local*. Porém, estamos interessados em resolver o problema na *escala global*, considerando as influências da escala local. Portanto, para a resolução deste problema, consideramos dois parâmetros pequenos: a espessura da placa e as propriedades do material na escala local.

Motivados pelo trabalho de Alessandrini et al. [1], utilizamos uma técnica denominada “redução de dimensão”, que consiste em gerar modelos para o problema original em um domínio bidimensional e depois estender a solução obtida no domínio bidimensional para o problema tridimensional.

A fim de obtermos os modelos no domínio bidimensional, utilizamos uma técnica conhecida por *modelagem hierárquica*.

Desta forma, consideramos uma placa tridimensional $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é

um domínio limitado. Seja $\partial P_L^\delta = \partial\Omega \times (-\delta, \delta)$ a lateral da placa e $\partial P_\pm^\delta = \Omega \times \{-\delta, \delta\}$ correspondendo às partes inferior e superior da placa. Denotamos um ponto de P^δ por $\underline{x} = (\underline{x}, x_3)$, com $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$. De acordo com a notação anterior, podemos escrever $\underline{\nabla} = (\underline{\nabla}, \partial_3) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, onde o operador ∂_i indica a derivada parcial na i -ésima direção. Logo, $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$.

Seja $u^\delta \in H^1(P^\delta)$ a solução fraca para

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\underline{A}\underline{\nabla}u^\delta] &= f^\delta && \text{em } P^\delta, \\ u^\delta &= 0 && \text{em } \partial P_L^\delta, \\ \frac{\partial u^\delta}{\partial n} &= g^\delta && \text{em } \partial P_\pm^\delta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $f^\delta : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}$ e $g^\delta : \partial P_\pm^\delta \rightarrow \mathbb{R}$. A matriz $\underline{A} : P^\delta \rightarrow \mathbb{R}_{\text{SIM}}^{3 \times 3}$ é dada por

$$\underline{A}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} a_{\underline{\approx}}(\underline{x}) & 0 \\ 0 & a_{33}(\underline{x}) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$a_{\underline{\approx}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\text{SIM}}^{2 \times 2}$ e $a_{33} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Neste trabalho, assumiremos as seguintes hipóteses

$$a_{\underline{\approx}} \in C^\infty(\Omega), \quad a_{33} \in C^\infty(\Omega), \quad f^\delta \in C^\infty(P^\delta) \text{ e } g^\delta \in C^\infty(\partial P_\pm^\delta).$$

Note que \underline{A} independe de x_3 . Assumimos ainda que existem constantes positivas α e β tais que

$$\alpha \|\underline{\xi}\|^2 \leq \underline{\xi} \cdot \underline{A}(\underline{x}) \underline{\xi} \quad \text{e} \quad \underline{\xi} \cdot \underline{A}(\underline{x}) \underline{\eta} \leq \beta \|\underline{\xi}\| \|\underline{\eta}\|, \tag{1.3}$$

para todo $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^3$ e todo $\underline{x} \in P^\delta$. Aqui denotamos por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana em \mathbb{R}^3 .

O problema dado por (1.1) e (1.2) modela uma placa heterogênea em equilíbrio térmico, tendo

fonte f no interior da placa e fluxo g nas suas partes inferior e superior. Sem perda de generalidade, assumimos que a temperatura se anula nos bordos laterais.

A heterogeneidade dá-se somente nas direções horizontais. Fisicamente isto poderia representar uma placa reforçada por fibras verticais (desde que a “transição” fosse suave, pois admitiremos alguma regularidade para $\underline{A}(\cdot)$).

Nos testes numéricos realizados, consideramos \underline{a} e a_{33} funções periódicas de período ϵ . Consideremos

$$V(P^\delta) = \{v \in H^1(P^\delta) : v|_{\partial P_L^\delta} = 0\}. \quad (1.4)$$

Os modelos hierárquicos são obtidos minimizando-se o funcional da energia em subespaços de $V(P^\delta)$ compostos por funções que variam polinomialmente na direção transversa. Nos restringiremos a modelos que são lineares em x_3 . Logo, uma aproximação para u^δ através deste método pode ser escrita como

$$\tilde{u}^\delta(\underline{x}, x_3) = w_0(\underline{x}) + w_1(\underline{x})x_3, \quad (1.5)$$

onde w_0 e w_1 são soluções de problemas bidimensionais em Ω (Seção 2.1). Temos que $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca para

$$\begin{aligned} -2\delta \operatorname{div}[\underline{a}(\underline{x}) \nabla w_0] &= \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta(\underline{x}, x_3) dx_3 + g^\delta(\underline{x}, \delta) + g^\delta(\underline{x}, -\delta) && \text{em } \Omega, \\ w_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.6)$$

e $w_1 \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca para

$$\begin{aligned} -\frac{2\delta^3}{3}\operatorname{div}[\underline{a}(\underline{x})\nabla w_1] + 2\delta a_{33}(\underline{x})w_1 &= \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta(\underline{x}, x_3)x_3 \, dx_3 + \delta[g^\delta(\underline{x}, \delta) - g^\delta(\underline{x}, -\delta)] \quad \text{em } \Omega, \\ w_1 &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Gostaríamos, então, de estimar a diferença entre \tilde{u}^δ e u^δ com respeito a δ , para verificar se \tilde{u}^δ é uma aproximação satisfatória. Porém obter esta estimativa não é uma tarefa fácil, uma vez que δ influencia as duas soluções. Para contornar este problema, ao invés de comparar diretamente a solução exata com a aproximada, estimamos a diferença entre as soluções e suas respectivas expansões assintóticas e, posteriormente, estimamos a diferença entre \tilde{u}^δ e u^δ .

Mostramos que, redefinidos no domínio escalonado

$$P = \Omega \times (-1, 1) \tag{1.8}$$

através de uma simples mudança de coordenadas ($\hat{x} = (\underline{x}, \delta^{-1}x_3)$), o erro de modelagem é limitado por $\delta^{3/2}$, isto é, existe constante c independente de δ , mas que pode depender de α , β e Ω tal que

$$\|u(\delta) - \tilde{u}(\delta)\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2},$$

onde definimos $u(\delta)(\hat{x}) = u^\delta(\underline{x}, \delta x_3)$ e $\tilde{u}(\delta)(\hat{x}) = \tilde{u}^\delta(\underline{x}, \delta x_3)$.

Vemos então que o modelo hierárquico aproxima bem a solução exata para placas finas.

Os problemas (1.6) e (1.7) ainda podem ser de difícil resolução numérica. De fato, para materiais muito heterogêneos, os coeficientes $\underline{a}(\cdot)$ e $a_{33}(\cdot)$ são altamente oscilatórios, tornando os métodos tradicionais de elementos finitos ou diferenças finitas ineficientes. Em (1.7) um problema extra surge, pois o problema é singularmente perturbado com respeito à δ . Para

superarmos estas dificuldades, utilizaremos métodos numéricos não tradicionais.

Primeiramente, trabalhamos com o problema que possui apenas o termo de difusão. Para tanto, consideremos o modelo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f && \text{em } \Omega, \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde o operador diferencial \mathcal{L} está definido da seguinte forma

$$\mathcal{L}(\cdot) := -\operatorname{div}[a(x)\nabla(\cdot)], \tag{1.10}$$

u é a solução definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f \in L^2(\Omega)$ é o termo de fonte.

Após obtermos a formulação variacional para o problema (1.9), introduzimos dois métodos numéricos multiescala utilizados na resolução deste problema: Residual Free Bubbles (RFB) e Método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM).

O RFB é descrito por Brezzi e Russo [3] e por Franca et al.[4] e consiste em considerar o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ no qual procuramos as soluções aproximadas como a soma direta do espaço das funções bilineares por partes, $V_P \subset H_0^1(\Omega)$ e V_B , o qual chamamos de espaço das funções bolhas. Este espaço é composto por funções em $H_0^1(\Omega)$ que se anulam no bordo de cada elemento da partição. Portanto procuramos uma aproximação em $V_P \oplus V_B$.

Já o Método de Elementos Finitos Multiescala aparece em Hou e Wu [7]. Neste método, as funções de base são construídas a partir da resolução do problema elíptico homogêneo utilizando o operador (1.10) em cada elemento, e condições de fronteira lineares no bordo de cada elemento.

Após a descrição dos dois métodos, descrevemos a implementação destes e alguns testes numéri-

cos com os métodos. Para a implementação, precisamos fazer algumas adaptações com as integrais que desejamos calcular, uma vez que não dispunhamos de todos os dados necessários. Através de integração por partes, conseguimos contornar o problema e calcular o valor das integrais.

A fim de resolver o problema em cada elemento, foi necessária também uma adaptação do código utilizado, uma vez que este resolvia o problema apenas no domínio original Ω , e não nos elementos.

A seguir, apresentamos uma breve descrição dos capítulos desta dissertação.

No Capítulo 2 geramos um modelo bidimensional para o problema original através de modelagem hierárquica. Detalhamos os cálculos no Apêndice A. Em seguida, obtemos uma expansão assintótica para \tilde{u}^δ e u^δ no domínio escalonado P definido em (1.8) e, posteriormente, descrevemos a análise para se obter uma estimativa da diferença entre \tilde{u}^δ e u^δ em P .

No Capítulo 3, obtemos uma formulação para o problema (1.9) por RFB e MEFM. Descrevemos todo o processo feito para a realização da implementação dos dois métodos e apresentamos alguns resultados numéricos obtidos no caso do problema de difusão e no caso do problema de difusão-reação.

No Capítulo 4, construímos a solução para o problema (1.1) por (1.5), uma vez que encontramos no Capítulo 3 soluções numéricas para os problemas (1.6) e (1.7).

Finalmente, apresentamos as nossas conclusões no Capítulo 5.

Capítulo 2

A Equação do Calor em uma placa heterogênea

Neste capítulo, estudamos a equação do calor em uma placa heterogênea tridimensional, utilizando uma técnica de “redução de dimensão”, conhecida por modelos hierárquicos, para gerar modelos bidimensionais a partir do problema original tridimensional.

Na Seção 2.1, geramos um modelo simples com comportamento linear na direção transversa. Em seguida, na Seção 2.2, derivamos expansões assintóticas da solução original e do modelo, com o objetivo de estimar o erro de modelagem. Finalmente, na Seção 2.3, fazemos a estimativa entre as soluções exata e aproximada, com o auxílio das expansões assintóticas obtidas na Seção 2.2.

2.1 Modelos Hierárquicos

Nesta seção, geramos um modelo para aproximar a solução do problema (1.1). Podemos caracterizar a solução desse problema minimizando o funcional da energia associado, isto é,

$$u^\delta = \arg \min_{v \in V(P^\delta)} \mathcal{I}(v), \text{ onde } \mathcal{I}(v) = \frac{1}{2} \int_{P^\delta} \underline{\nabla} v \cdot \underline{A} \underline{\nabla} v \, d\underline{x} - \int_{P^\delta} f^\delta v \, d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta v \, d\underline{x},$$

e $V(P^\delta)$ é dado por (1.4).

Os modelos hierárquicos são obtidos minimizando-se o funcional da energia em subespaços de $V(P^\delta)$ compostos por funções que variam polinomialmente na direção transversa.

Reescrevendo o problema (1.1) na sua formulação fraca, temos que $u^\delta \in H^1(P^\delta)$ é tal que

$$\int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\nabla} u^\delta \cdot \underline{\nabla} v \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v \, d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta v \, d\underline{x} \text{ para todo } v \in V(P^\delta). \quad (2.1)$$

Seja $V_1(P^\delta) = \{v \in V(P^\delta) : v(\underline{x}, x_3) = v_0(\underline{x}) + v_1(\underline{x})x_3\}$ e seja $\tilde{u}^\delta \in V_1(P^\delta)$ tal que

$$\int_{P^\delta} \underline{A} \underline{\nabla} \tilde{u}^\delta \cdot \underline{\nabla} \tilde{v} \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta \tilde{v} \, d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta \tilde{v} \, d\underline{x} \text{ para todo } \tilde{v} \in V_1(P^\delta). \quad (2.2)$$

Como $\tilde{u}^\delta \in V_1(P^\delta)$, então podemos escrever \tilde{u}^δ como em (1.5), com $w_0, w_1 \in H_0^1(\Omega)$.

No Apêndice A mostramos que para se encontrar a aproximação $\tilde{u}^\delta \in V_1(P^\delta)$, solução aproximada de (1.1), basta resolver os problemas bidimensionais (1.6) e (1.7), sendo que \tilde{u}^δ é dada por (1.5).

2.2 Expansão assintótica

Na seção anterior, obtivemos uma aproximação \tilde{u}^δ para o problema (1.1) através de redução de dimensão. Gostaríamos de estimar a diferença entre \tilde{u}^δ e u^δ com respeito a δ , para verificar se \tilde{u}^δ é uma aproximação satisfatória. Porém, fazer esta estimativa não é uma tarefa fácil, uma vez que δ influencia as duas soluções, e o próprio domínio depende de δ . Para contornar este problema, ao invés de comparar a solução exata com a aproximada, estimamos a diferença entre as soluções e suas respectivas expansões assintóticas. Para desenvolver as expansões assintóticas e concluir estimativas com funções que não dependam de δ , reescrevemos o problema (1.1) no domínio $P = \Omega \times (-1, 1)$. Então, podemos considerar $\partial P_L = \partial\Omega \times (-1, 1)$ e $\partial P_\pm = \Omega \times \{-1, 1\}$. Denotamos um ponto de P por $\hat{x} = (\hat{x}, \hat{x}_3)$ onde $\hat{x} = \tilde{x}$ e $\hat{x}_3 = \delta^{-1}x_3$, como mostra a Figura 2.1. Neste novo domínio, definimos:

$$u(\delta)(\hat{x}) = u^\delta(\underline{x}), \quad f(\hat{x}) = f^\delta(\underline{x}) \text{ e } g(\hat{x}) = \delta^{-1}g^\delta(\underline{x}).$$

Assumimos ainda que $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \partial P_\pm \rightarrow \mathbb{R}$ são funções independentes de δ .

Podemos reescrever (1.1) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [a(\tilde{x}) \tilde{\nabla} u^\delta] + \partial_3 [a_{33}(\tilde{x}) \partial_3 u^\delta] &= -f^\delta \quad \text{em } P^\delta, \\ u^\delta &= 0 \quad \text{em } \partial P_L^\delta, \\ a_{33}(\tilde{x}) \partial_3 u^\delta &= \delta^{-1} x_3 g^\delta \quad \text{em } \partial P_\pm^\delta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

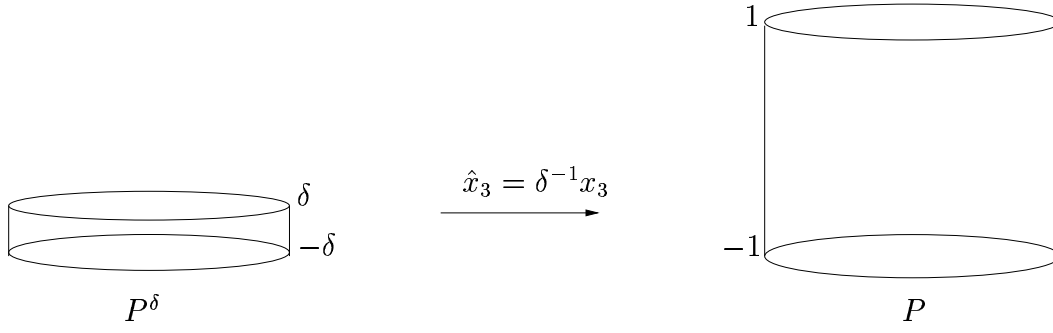


FIGURA 2.1: Os domínios P^δ e P .

A partir de (2.3), utilizando o novo domínio, temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} [\underset{\sim}{a}(\hat{x}) \underset{\sim}{\nabla} u(\delta)] + \delta^{-2} \partial_3 [a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u(\delta)] &= -f \quad \text{em } P, \\
 u(\delta) &= 0 \quad \text{em } \partial P_L, \\
 \delta^{-1} a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u(\delta) &= \delta \hat{x}_3 g \quad \text{em } \partial P_\pm.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Consideremos a expansão assintótica

$$u(\delta) \sim u_0 + \delta^2 u_2 + \delta^4 u_4 + \dots \tag{2.5}$$

Substituindo-a formalmente em (2.4) e agrupando os termos com a mesma potência de δ , temos

$$\begin{aligned}
 \delta^{-2} \partial_3 [a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_0] + \operatorname{div} [\underset{\sim}{a}(\hat{x}) \underset{\sim}{\nabla} u_0] + \partial_3 [a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_2] + \dots &= -f \quad \text{em } P, \\
 \delta^{-1} a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_0 + \delta a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_2 + \dots &= \delta \hat{x}_3 g \quad \text{em } \partial P_\pm.
 \end{aligned}$$

Portanto as equações abaixo devem ser satisfeitas

$$\partial_3 [a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_0] = 0, \tag{2.6}$$

$$\partial_3 [a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_2] = -f - \operatorname{div} [\underset{\sim}{a}(\hat{x}) \underset{\sim}{\nabla} u_0], \tag{2.7}$$

$$\partial_3 [a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_{2k}] = -\operatorname{div} [a(\hat{x}) \nabla u_{2k-2}] \quad \text{para todo } k \geq 2, \quad (2.8)$$

em P . Sobre as condições de fronteira em ∂P_{\pm} , temos

$$\begin{aligned} a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_0 &= 0, \\ a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_2 &= \hat{x}_3 g, \\ a_{33}(\hat{x}) \partial_3 u_{2k} &= 0 \quad \text{para todo } k \geq 2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

As equações (2.6)–(2.9) definem uma seqüência de problemas de Neumann para \hat{x}_3 no intervalo $(-1, 1)$ parametrizados por $\hat{x} \in \Omega$. A fim de facilitar a definição dos termos da expansão assintótica, decompomos

$$u_{2k}(\hat{x}) = \dot{u}_{2k}(\hat{x}) + \zeta_{2k}(\hat{x}) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

onde

$$\int_{-1}^1 \dot{u}_{2k}(\hat{x}, \hat{x}_3) d\hat{x}_3 = 0. \quad (2.11)$$

A partir da condição de Dirichlet em (2.4), gostaríamos de ter $u_k = 0$ em ∂P_L , o que é equivalente a impormos que

$$\zeta_k = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (2.12)$$

$$\dot{u}_k = 0 \quad \text{em } \partial P_L. \quad (2.13)$$

Entretanto, em geral, somente (2.12) pode ser imposta e (2.13) não ocorre. Mais tarde introduziremos corretores para lidar com este problema. Mostraremos que as funções ζ_k , \dot{u}_k e portanto u_k são unicamente determinadas a partir (2.6)–(2.13). De fato, usando (2.6) e (2.9)

podemos concluir que $\dot{u}_0 = 0$. Desde que (2.7) e (2.9) sejam compatíveis, obtemos

$$\int_{-1}^1 \operatorname{div} [a(\hat{x}) \nabla \zeta_0(\hat{x})] d\hat{x}_3 = - \int_{-1}^1 f(\hat{x}, \hat{x}_3) d\hat{x}_3 - [g(\hat{x}, 1) + g(\hat{x}, -1)],$$

e usando (2.12) temos

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{div} [a(\hat{x}) \nabla \zeta_0(\hat{x})] &= - \int_{-1}^1 f(\hat{x}, \hat{x}_3) d\hat{x}_3 - [g(\hat{x}, 1) + g(\hat{x}, -1)] \quad \text{em } \Omega, \\ \zeta_0 &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\dot{u}_0 = 0$, temos que $u_0 = \zeta_0$.

Em geral, utilizando (2.8) e (2.9) para $k \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} [a(\hat{x}) \zeta_{2k-2}(\hat{x})] &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \zeta_{2k-2} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde podemos concluir que $\zeta_{2k-2} = 0$ para todo $k \geq 2$. Utilizando (2.8) e (2.9), concluimos que

$$\begin{aligned} u_0 &= \zeta_0, \\ u_2 &= \dot{u}_2 \neq 0, \\ u_4 &= \dot{u}_4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Então

$$u^\delta \sim \zeta_0 + \delta^2 \dot{u}_2 + \delta^4 \dot{u}_4 + \dots \tag{2.16}$$

Observação 2.2.1 *O primeiro termo da expansão assintótica (2.16) coincide com a função w_0 , que resolve o problema (1.6), ou seja, neste caso $\zeta_0 = w_0$.*

Em geral, \dot{u}_{2k} não se anula na fronteira lateral ∂P_L . Introduzimos, formalmente, o corretor de fronteira

$$U \sim \delta^2 U_2 + \delta^4 U_4 + \dots \quad (2.17)$$

para corrigir os valores de $\dot{u}_2, \dot{u}_4, \dots$ em ∂P_L . Impomos então que $U_{2k} \in H^1(P)$ seja solução do problema

$$\begin{aligned} -\delta^2 \operatorname{div} [\underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{\nabla} U_{2k}] - a_{33}(\underset{\sim}{x}) \partial_{33} U_{2k} &= 0 && \text{em } P, \\ \frac{\partial U_{2k}}{\partial n} &= 0 && \text{em } \partial P_{\pm}, \\ U_{2k} &= \dot{u}_{2k} && \text{em } \partial P_L. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Concluimos finalmente que a expansão assintótica para $u(\delta)$ em P é dada por

$$u(\delta) \sim \zeta_0 + \delta^2 \dot{u}_2 - \delta^2 U_2 + \delta^4 \dot{u}_4 - \delta^4 U_4 + \dots$$

Apresentamos a seguir alguns resultados que serão utilizados para estimar a diferença entre a solução exata e sua expansão assintótica e, posteriormente, estimamos a diferença entre as soluções exata e aproximada.

2.3 Estimativas

O resultado abaixo segue de estimativas clássicas. As constantes abaixo e, no restante deste trabalho, são independentes de δ e podem depender de α, β e Ω . Assumiremos além disto que as constantes podem depender de normas de Sobolev de f e g .

Hipótese de suavidade *Seja ζ_0 definido por (2.14) e \dot{u}_{2k} definida por (2.7), (2.8) e (2.9),*

$k \in \mathbb{N}$. Então existe constante c tal que

$$\|\zeta_0\|_{H^1(\Omega)} \leq c \quad e \quad \|\dot{u}_{2k}\|_{H^1(P)} \leq c. \quad (2.19)$$

Com o objetivo de estimar a diferença entre as soluções \tilde{u}^δ e u^δ no domínio escalonado (1.8), apresentamos alguns resultados que nos serão úteis.

A partir do resultado a seguir, obtemos uma estimativa para a solução do problema (2.20) na norma $\|\cdot\|_{H^1(P)}$.

Lema 2.1 *Seja $F \in L^2(P)$ e seja $\Theta \in H^1(P)$ solução fraca para*

$$\begin{aligned} -\delta^2 \operatorname{div} [\underline{a}(\hat{x}) \underline{\nabla} \Theta] - a_{33}(\hat{x}) \partial_{33} \Theta &= F \quad \text{em } P, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial n} &= 0 \quad \text{em } \partial P_\pm, \\ \Theta &= 0 \quad \text{em } \partial P_L. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então existe constante c tal que

$$\|\Theta\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{-2} \|F\|_{L^2(P)}.$$

Prova: Seja

$$V(P) := \{v \in H^1(P) : v|_{\partial P_L} = 0\}.$$

Reescrevendo o problema (2.20) em sua formulação variacional, temos que $\Theta \in V(P)$ é tal que

$$\delta^2 \int_P [\underline{a}(\hat{x}) \underline{\nabla} \Theta] \cdot \underline{\nabla} v \, d\hat{x} + \int_P a_{33}(\hat{x}) \partial_3 \Theta \partial_3 v \, d\hat{x} = \int_P F v \, d\hat{x} \quad \text{para todo } v \in V(P).$$

Como $\Theta \in V(P)$, então

$$\delta^2 \int_P a(\hat{x}) |\nabla \Theta|^2 d\hat{x} + \int_P a_{33}(\hat{x}) |\partial_3 \Theta|^2 d\hat{x} = \int_P F \Theta d\hat{x}.$$

Logo, usando (1.3), e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\delta^2 \|\nabla \Theta\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Theta\|_{L^2(P)}^2 \leq c \|F\|_{L^2(P)} \|\Theta\|_{L^2(P)}.$$

Como $\Theta|_{\partial P_L} = 0$, então vale a desigualdade de Poincaré e

$$\delta^2 \|\nabla \Theta\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Theta\|_{L^2(P)}^2 \leq c \|F\|_{L^2(P)} (\|\nabla \Theta\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Theta\|_{L^2(P)}^2)^{1/2}.$$

Portanto

$$\|\nabla \Theta\|_{L^2(P)} \leq c \delta^{-2} \|F\|_{L^2(P)}. \quad (2.21)$$

Usando novamente a desigualdade de Poincaré, obtemos o resultado

$$\|\Theta\|_{H^1(P)} \leq c \delta^{-2} \|F\|_{L^2(P)}.$$

■

Consideremos o problema de determinar $\Psi \in H^1(P)$ solução fraca para

$$\begin{aligned} -\delta^2 \operatorname{div} [a(\hat{x}) \nabla \Psi] - a_{33}(\hat{x}) \partial_{33} \Psi &= 0 && \text{em } P, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= 0 && \text{em } \partial P_{\pm}, \\ \Psi &= w && \text{em } \partial P_L, \end{aligned} \quad (2.22)$$

que é da mesma forma que (2.18).

Os dois resultados seguintes foram obtidos tomando-se como base o problema (2.22).

Lema 2.2 *Seja Ψ a solução do problema (2.22). Assuma que $\int_{-1}^1 w(\tilde{x}, \hat{x}_3) d\hat{x}_3 = 0$ em ∂P_L .*

Então

$$\|\Psi\|_{L^2(P)} \leq c \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)} \leq c \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}.$$

Prova: Note que

$$\int_{-1}^1 \partial_{33} \Psi d\hat{x}_3 = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

onde usamos as condições de Neumann em ∂P_{\pm} . Logo, integrando a primeira equação de (2.22) com respeito a \hat{x}_3 , obtemos

$$-\delta^2 \int_{-1}^1 \operatorname{div} [\underline{a}(\tilde{x}) \underline{\nabla} \Psi] d\hat{x}_3 = 0 \quad \text{em } \Omega$$

e portanto,

$$\begin{aligned} -\delta^2 \operatorname{div} [\underline{a}(\tilde{x}) \underline{\nabla} \bar{\Psi}] &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \bar{\Psi} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{\Psi}(\tilde{x}) := \int_{-1}^1 \Psi(\tilde{x}, \hat{x}_3) d\hat{x}_3.$$

Segue-se que $\bar{\Psi} \equiv 0$ em Ω . Vale então a desigualdade de Poincaré para cada $x \in \Omega$ e temos

$$\|\Psi\|_{L^2(P)} \leq c \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}. \quad (2.23)$$

■

Lema 2.3 *Seja Ψ solução do problema (2.22), onde $w \in W^{1,\infty}(P)$. Então*

$$\|\underline{\nabla}\Psi\|_{L^2(P)} \leq c\delta^{-1/2}\|w\|_{W^{1,\infty}}.$$

Prova: Esta demonstração segue Hou [6]. Seja $\chi \in C^\infty(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} \chi(\hat{x}) &\equiv 1 \quad \text{se } \text{dist}(\hat{x}, \partial\Omega) < \delta, \\ \chi(\hat{x}) &\equiv 0 \quad \text{se } \text{dist}(\hat{x}, \partial\Omega) > 2\delta, \end{aligned} \tag{2.24}$$

e tal que

$$\|\chi\|_{L^2(P)}^2 \leq c\delta, \tag{2.25}$$

$$\|\underline{\nabla}\chi\|_{L^2(P)}^2 \leq \frac{c}{\delta}. \tag{2.26}$$

Considere

$$V_w(P) := \{v \in H^1(P) : v|_{\partial P_L} = w\}.$$

Reescrevendo o problema (2.20) em sua formulação variacional, temos que $\Psi \in V_w(P)$ é tal que

$$\delta^2 \int_P \underline{a}(\hat{x}) \underline{\nabla}\Psi \underline{\nabla}v \, d\hat{x} + \int_P a_{33}(\hat{x}) \partial_3\Psi \partial_3v \, d\hat{x} = 0 \quad \text{para todo } v \in V(P). \tag{2.27}$$

Observe que $\Psi - \chi w \in V(P)$. Logo

$$\delta^2 \int_P \underline{a}(\hat{x}) \underline{\nabla}\Psi \underline{\nabla}(\Psi - \chi w) \, d\hat{x} + \int_P a_{33}(\hat{x}) \partial_3\Psi \partial_3(\Psi - \chi w) \, d\hat{x} = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \delta^2 \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)}^2 &\leq c\delta^2 \|w \underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)} \|\underline{\nabla} \chi\|_{L^2(P)} \\ &\quad + \delta^2 \|\underline{\nabla} \Psi \underline{\nabla} w\|_{L^2(P)} \|\chi\|_{L^2(P)} + \|\partial_3 \Psi \partial_3 w\|_{L^2(P)} \|\chi\|_{L^2(P)}. \end{aligned}$$

Utilizando (2.25) e (2.26), temos

$$\delta^2 \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)}^2 \leq c\delta^{3/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)} \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)} + c\delta^{1/2} \|\partial_3 w\|_{L^\infty(P)} \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)},$$

então

$$\delta^2 \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)}^2 \leq c\delta^{1/2} (\delta^2 \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)}^2)^{1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)}.$$

Logo,

$$(\delta^2 \|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)}^2 + \|\partial_3 \Psi\|_{L^2(P)}^2)^{1/2} \leq c\delta^{1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}(P)},$$

donde podemos concluir

$$\|\underline{\nabla} \Psi\|_{L^2(P)} \leq c\delta^{-1/2} \|w\|_{W^{1,\infty}}. \quad (2.28)$$

■

Como aplicação direta do Lema 2.2 e do Teorema 2.3 obtemos uma estimativa para as soluções do problema (2.18).

Corolário 2.1 *Sejam U_{2k} , $k \in \mathbb{N}$, soluções do problema (2.18). Então*

$$\|U_{2k}\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{-1/2}.$$

Estimamos a seguir o resíduo $r = u^\delta - (\zeta_0 + \delta^2 \dot{u}_2)$. Por substituição direta, temos que

$$\begin{aligned} -\delta^2 \operatorname{div} [a(\hat{x}) \nabla r] - a_{33}(\hat{x}) \partial_{33} r &= \delta^4 a_{33}(\hat{x}) \partial_{33} \dot{u}_4 && \text{em } P, \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= 0 && \text{em } \partial P_\pm, \\ r &= -\delta^2 \dot{u}_2 && \text{em } \partial P_L. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Teorema 2.1 *Seja r a função que é solução do problema (2.29). Então existe constante c tal que*

$$\|r\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2}. \tag{2.30}$$

Prova: Observemos que, dos Lemas 2.1, 2.2 e 2.3, temos

$$\|r\|_{H^1(P)} \leq c(\delta^{-1/2} \|\delta^2 \dot{u}_2\|_{W^{1,\infty}(P)} + \delta^{-2} \|\delta^4 a(\hat{x}) \partial_{33} \dot{u}_4\|_{L^2(P)}) \leq c\delta^{3/2}.$$

■

O seguinte resultado apresenta uma estimativa para a diferença entre a solução u^δ no domínio escalonado (1.8) e o primeiro termo de sua expansão assintótica.

Corolário 2.2 *Seja u^δ a solução para o problema (1.5) e ζ_0 a solução do problema (2.14).*

Então

$$\|u^\delta - \zeta_0\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2}.$$

Prova: Somando e subtraindo o termo $\delta^2 \dot{u}^2$ e usando as estimativas (2.19) e (2.30), concluímos que

$$\|u^\delta - \zeta_0\|_{H^1(P)} \leq \|u^\delta - (\zeta_0 + \delta^2 \dot{u}_2)\|_{H^1(P)} + \delta^2 \|\dot{u}_2\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2} + c\delta^2 \leq c\delta^{3/2}.$$

■

A fim de estimarmos o erro de modelagem, necessitaremos do seguinte resultado [1].

Lema 2.4 *Seja $w_1 \in H_0^1(\Omega)$ solução do problema (1.7). Então*

$$\|w_1\|_{H^1(\Omega)} \leq c\delta^{1/2}.$$

Observação 2.3.1 *É também possível mostrar o resultado acima modificando as demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.3.*

Do Lema 2.4, obtemos que $\|\delta \hat{x}_3 w_1\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2}$.

Seja

$$\tilde{u}(\delta)(\hat{x}) = \tilde{u}^\delta(\underline{x}) = \zeta_0(\hat{x}) + \delta \hat{x}_3 w_1(\hat{x}).$$

Logo,

$$\|\tilde{u}(\delta) - u(\delta)\|_{H^1(P)} \leq \|\tilde{u}(\delta) - \zeta_0\|_{H^1(P)} + \|u(\delta) - \zeta_0\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2} + c\delta^{3/2} \leq c\delta^{3/2}.$$

Obtemos assim o resultado a seguir.

Teorema 2.2 *Seja $u(\delta)$ a solução do problema (2.4) e $\tilde{u}(\delta)$ a solução aproximada para o*

problema (2.4) utilizando modelos hierárquicos. Então

$$\|\tilde{u}(\delta) - u(\delta)\|_{H^1(P)} \leq c\delta^{3/2}.$$

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Neste capítulo, estudamos problemas elípticos de segunda ordem com coeficientes oscilatórios e dois métodos numéricos multiescala utilizados na resolução destes problemas numericamente.

A seguir, descrevemos os procedimentos para a implementação destes métodos e apresentamos alguns resultados utilizando os dois métodos.

Para tanto, considere

$$\mathcal{T}_H = \{K\} := \text{partição regular de } \Omega \text{ em elementos finitos quadriláteros,}$$

e K cada elemento de \mathcal{T}_H .

Utilizaremos esta partição na implementação dos dois métodos numéricos.

3.1 O problema de difusão com coeficientes oscilatórios

Nesta seção, obtemos a formulação variacional para o problema (1.9) e posteriormente, apresentamos dois métodos numéricos multiescala para a resolução do problema (1.9).

3.1.1 A formulação variacional

Consideremos a forma bilinear $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(\tilde{x})^t \cdot \underline{a}(\tilde{x}) \nabla v(\tilde{x}) \, d\tilde{x},$$

onde \underline{a} satisfaz (1.3). Provaremos que a é simétrica, contínua e coerciva.

(i) Simetria

Como a matriz $\underline{a}(\tilde{x}) = \{a_{ij}\}$ é simétrica, temos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(\tilde{x}) \cdot \underline{a}(\tilde{x}) \nabla v(\tilde{x}) \, d\tilde{x} = \int_{\Omega} \nabla v(\tilde{x}) \cdot \underline{a}(\tilde{x}) \nabla u(\tilde{x}) \, d\tilde{x} = a(v, u).$$

Logo $a(u, v) = a(v, u)$ e a forma bilinear a é simétrica.

(ii) Continuidade

Como $\underline{a}(\tilde{x})$ é uniformemente limitada, temos

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(\tilde{x})^t \cdot \underline{a}(\tilde{x}) \nabla v(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \leq c \int_{\Omega} \nabla u(\tilde{x})^t \nabla v(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \\ &\leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\tilde{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\tilde{x} \right)^{1/2} \\ &\leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 \, d\tilde{x} \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + |v|^2 \, d\tilde{x} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

donde

$$a(u, v) \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto, a é contínua.

(iii) Coercividade

Note que

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \nabla v(\underline{x})^t \cdot \underline{a}(\underline{x}) \nabla v(\underline{x}) \, d\underline{x} \geq c \int_{\Omega} \nabla v(\underline{x})^t \nabla v(\underline{x}) \, d\underline{x} \\ &\geq \frac{c}{2} \int_{\Omega} \nabla v(\underline{x})^t \nabla v(\underline{x}) \, d\underline{x} + \frac{c}{2} \int_{\Omega} \nabla v(\underline{x})^t \nabla v(\underline{x}) \, d\underline{x}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$a(v, v) \geq c \int_{\Omega} \nabla v(\underline{x}) \nabla v(\underline{x}) \, d\underline{x} + c \int_{\Omega} v(\underline{x}) v(\underline{x}) \, d\underline{x} = c \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + |v|^2 \, d\underline{x} = c \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Logo

$$a(v, v) \geq c \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Então a forma bilinear a satisfaz as hipóteses do Lema de Lax-Milgran, donde a formulação variacional para o problema (1.9)

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ &a(u, v) = (f, v), \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{3.1}$$

tem solução única.

3.2 Uma aproximação utilizando o método Residual Free Bubbles (RFB)

Nesta seção, descrevemos uma aproximação para o problema (3.1) através de um método numérico conhecido por Residual Free Bubbles (RFB). O método consiste em considerar que

o espaço $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ no qual procuramos as soluções aproximadas u_h pode ser definido como

$$V_h = V_P \oplus V_B,$$

onde

$$V_P := \text{espaço das funções bilineares por partes, } V_P \subset H_0^1(\Omega)$$

e

$$V_B := \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{\partial K} = 0, \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_H\}.$$

Portanto, procuramos uma aproximação $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \text{para todo } v_h \in V_P \oplus V_B. \quad (3.2)$$

Como $V_h = V_P \oplus V_B$, então $v_h = v_P + v_B \in V_P + V_B$. Logo

$$a(u_h, v_h) = a(u_h, v_P + v_B) = a(u_h, v_P) + a(u_h, v_B).$$

Então

$$a(u_h, v_P) = (f, v_P), \quad \text{para todo } v_P \in V_P, \quad (3.3)$$

e

$$a(u_h, v_B) = (f, v_B), \quad \text{para todo } v_B \in V_B. \quad (3.4)$$

Desta forma, fixando $K \in \mathcal{T}_H$, escolhemos v_B tal que $v_B = 0$ em $\Omega - K$. Logo

$$a(u_h, v_B) = (f, v_B)$$

que é equivalente a

$$\int_K \nabla_{\tilde{\sim}} u_h^t a(\tilde{\sim}(x)) \nabla_{\tilde{\sim}} v_B \, d\tilde{x} = \int_K f v_B \, d\tilde{x}, \quad \text{para todo } v_B \in H_0^1(K).$$

Utilizando integração por partes, obtemos

$$\int_K -\operatorname{div} [a(\tilde{\sim}(x)) \nabla_{\tilde{\sim}} u_h] v_B \, d\tilde{x} = \int_K f v_B \, d\tilde{x}, \quad \text{para todo } v_B \in H_0^1(K).$$

Então

$$\mathcal{L}u_h = f \quad \text{em } K. \tag{3.5}$$

Mas também $u_h \in V_h = V_P \oplus V_B$. Logo

$$u_h = u_P + u_B, \quad \text{onde } u_P \in V_P \text{ e } u_B \in V_B.$$

Substituindo em (3.5), temos

$$\mathcal{L}(u_P + u_B) = f \quad \text{em } K,$$

e usando a linearidade de \mathcal{L} , concluímos que

$$\mathcal{L}u_B = f - \mathcal{L}u_P \quad \text{em } K,$$

$$u_B = 0 \quad \text{em } \partial K.$$

Consideremos então $u_B = \mathcal{L}_*^{-1}f - \mathcal{L}_*^{-1}\mathcal{L}u_P$, onde

$$\mathcal{L}_*^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow V_B \text{ tal que}$$

se $v = \mathcal{L}_*^{-1}g$, onde $g \in L^2(\Omega)$, então v resolve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v &= g & \text{em } K, \\ v &= 0 & \text{em } \partial K, \end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo K . Substituindo em (3.3), temos

$$a(u_P + u_B, v_P) = (f, v_P), \quad \text{para todo } v_P \in V_P.$$

Então

$$a(u_P + \mathcal{L}_*^{-1}f - \mathcal{L}_*^{-1}\mathcal{L}u_P, v_P) = (f, v_P),$$

que é equivalente a

$$a(u_P - \mathcal{L}_*^{-1}\mathcal{L}u_P, v_P) + a(\mathcal{L}_*^{-1}f, v_P) = (f, v_P), \quad \text{para todo } v_P \in V_P.$$

Portanto, procuramos uma aproximação $u_P \in V_P$ tal que

$$a(u_P - \mathcal{L}_*^{-1}\mathcal{L}u_P, v_P) = (f, v_P) - a(\mathcal{L}_*^{-1}f, v_P), \quad \text{para todo } v_P \in V_P. \tag{3.7}$$

Seja $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ uma base de V_P , onde ψ_i são funções bilineares “usuais”. Então $u_P = \sum_{i=1}^N u_i \psi_i$.

Logo

$$\mathcal{L}_*^{-1}\mathcal{L}u_P = \sum_{i=1}^N u_i \mathcal{L}_*^{-1}\mathcal{L}\psi_i.$$

Definimos, então

$$\phi_i := \mathcal{L}_*^{-1} \mathcal{L} \psi_i$$

donde

$$\mathcal{L}_*^{-1} \mathcal{L} u_P = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i. \quad (3.8)$$

Pela definição (3.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \phi_i &= \mathcal{L} \psi_i & \text{em } K, \\ \phi_i &= 0 & \text{em } \partial K. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Portanto, procuramos um vetor $(u_1, u_2, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\sum_{i=1}^N a(\psi_i - \phi_i, \psi_j) u_i = (f, \psi_j) - a(\mathcal{L}_*^{-1} f, \psi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Definimos

$$\phi^f := \mathcal{L}_*^{-1} f,$$

então, novamente pela definição (3.6), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \phi^f &= f & \text{em } K, \\ \phi^f &= 0 & \text{em } \partial K. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^N a(\psi_i - \phi_i, \psi_j) u_i = (f, \psi_j) - a(\phi^f, \psi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

Definindo

$$\lambda_i := \psi_i - \phi_i, \quad (3.12)$$

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\lambda_i &= 0 && \text{em } K, \\ \lambda_i &= \psi_i && \text{em } \partial K.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Portanto, em termos de λ_i , o sistema torna-se

$$\sum_{i=1}^N a(\lambda_i, \psi_j) u_i = (f, \psi_j) - a(\phi^f, \psi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

3.3 Uma aproximação utilizando o Método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM)

Nesta seção, descrevemos o Método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM) utilizado para aproximar o problema (3.1). Para tanto, consideremos as funções $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$, definidas por (3.12) que satisfazem (3.13). Como na seção anterior, $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ são as funções bilineares por partes e $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ são as funções soluções dos problemas locais (3.9). Para obter um método de elementos finitos, iremos restringir o espaço da formulação variacional (3.1) em um subespaço de dimensão finita. Portanto, consideremos Λ_h um subespaço de dimensão finita de $H_0^1(\Omega)$. Então podemos reescrever o problema (3.1) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\text{Encontrar } u_h &\in \Lambda_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \quad \text{para todo } v_h \in \Lambda_h.\end{aligned}\tag{3.14}$$

O MEFM é definido tomando-se $\Lambda_h = \text{span} \{\lambda_i\}_{i=1}^N$. Então podemos escrever

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \lambda_i.$$

Substituindo em (3.14), obtemos

$$\sum_{i=1}^N a(\lambda_i, \lambda_j) u_i = (f, \lambda_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Como $\lambda_j = \psi_j - \phi_j$, então

$$a(\lambda_i, \lambda_j) = a(\lambda_i, \psi_j) - a(\lambda_i, \phi_j).$$

Pela definição da forma bilinear a , temos

$$a(\lambda_i, \phi_j) = \int_K \nabla \lambda_i^t(x) a(x) \nabla \phi_j(x) dx.$$

Utilizando integração por partes

$$a(\lambda_i, \phi_j) = \int_K \nabla \lambda_i^t(x) a(x) \nabla \phi_j(x) dx = - \int_K \text{div} [a(x) \nabla \lambda_i] \phi_j(x) dx = 0,$$

pois λ_i satisfaz (3.13). Logo

$$a(\lambda_i, \lambda_j) = a(\lambda_i, \psi_j).$$

Novamente, como $\lambda_i = \psi_i - \phi_i$, então

$$a(\lambda_i, \psi_j) = a(\psi_i - \phi_i, \psi_j).$$

Portanto, procuramos um vetor $(u_1, u_2, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\sum_{i=1}^N a(\psi_i - \phi_i, \psi_j) u_i = (f, \psi_j) - (f, \phi_j) \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

Observemos que o sistema (3.15) é semelhante ao sistema (3.11) do método RFB. Os termos da direita variam de um para o outro método, enquanto que os termos da esquerda coincidem. Tal semelhança irá facilitar a implementação dos dois métodos.

3.4 Implementação e Testes Numéricos

Nesta seção, descrevemos o processo utilizado na implementação dos dois métodos descritos acima e apresentamos alguns testes numéricos. Assumiremos que \tilde{a} e a_{33} são funções periódicas de período ϵ .

3.4.1 Implementação

Para realizar a implementação dos dois métodos descritos anteriormente, o RFB e o MEFM, utilizamos a mesma metodologia. Consideremos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e \mathcal{T}_H uma partição em elementos quadrados de lado H , como mostra a Figura 3.1. Por simplicidade, tomamos H múltiplo de ϵ . Nos dois métodos utilizamos as funções bilineares usuais como funções de base para resolver o problema (3.13). A fim de evitar uma nova discretização em cada elemento, fazemos uma mudança de variáveis e trabalhamos apenas em Ω . De fato, para implementarmos o método, precisamos calcular os termos extras $a(\phi_i, \psi_j)$, vide (3.11) e (3.15).

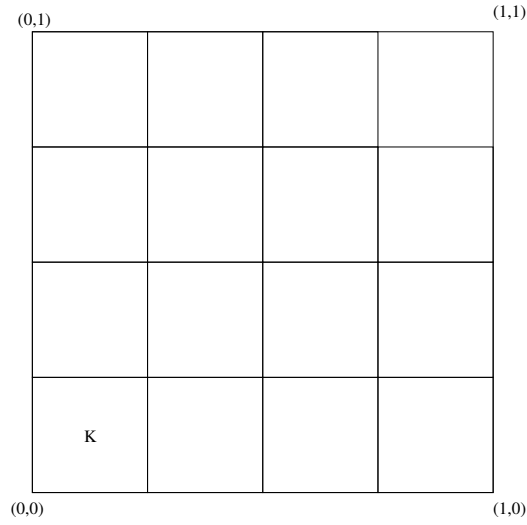


FIGURA 3.1: Domínio Ω e um elemento K fixo.

Sem perda de generalidade, seja $K = (0, H) \times (0, H)$, $\psi_j = \psi = \frac{x_1 x_2}{H^2}$ e $\phi_i = \phi$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi &= \mathcal{L}\psi & \text{em } K, \\ \phi &= 0 & \text{em } \partial K. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para resolver o problema (3.16), introduzimos a seguinte mudança de variáveis

$$X_1 = \frac{x_1}{H} \quad e \quad X_2 = \frac{x_2}{H} \quad (X_1, X_2) \in (0, 1) \times (0, 1). \tag{3.17}$$

Portanto, precisamos encontrar o problema correspondente a (3.9) na nova variável

$$\tilde{X} = (X_1, X_2).$$

Definimos

$$\check{\phi}(X_1, X_2) := \phi(x_1 H, x_2 H),$$

$$\check{\psi}(X_1, X_2) := \psi(x_1 H, x_2 H),$$

e

$$\check{a}(X_1, X_2) := a(x_1 H, x_2 H).$$

Então

$$\mathcal{L}\check{\phi}(X_1, X_2) = H^2 \mathcal{L}\phi(x_1 H, x_2 H) = H^2 \mathcal{L}\psi(x_1 H, x_2 H).$$

Logo, o problema (3.9) na nova variável $\check{X} = (X_1, X_2)$ será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\check{\phi} &= H^2 \mathcal{L}\check{\psi} && \text{em } \Omega, \\ \check{\phi} &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Mudando também de coordenadas na integral temos

$$\int_K \nabla_{\check{x}} \phi(\check{x})^t \cdot \check{a}(\check{x}) \nabla_{\check{x}} \psi(\check{x}) \, d\check{x} = \int_{\Omega} \nabla_{\check{X}} \check{\phi}(\check{X})^t \cdot \check{a}(\check{X}) \nabla_{\check{X}} \check{\psi}(\check{X}) \, d\check{X}. \tag{3.19}$$

Portanto, para calcular a integral em (3.19), precisamos antes resolver (3.18) e depois aplicar uma aproximação via Quadratura Gaussiana.

Note que na integral acima precisamos do valor de $\nabla \check{\phi}$. Porém, através da resolução do problema (3.18) encontramos o valor de $\check{\phi}$ e não o valor de $\nabla \check{\phi}$. Utilizamos integração por partes para eliminar a dependência destes valores da integral. Então

$$\int_{\Omega} \nabla_{\check{X}} \check{\phi}(\check{X})^t \cdot \check{a}(\check{X}) \nabla_{\check{X}} \check{\psi}(\check{X}) \, d\check{X} = \int_{\partial\Omega} \check{a}(\check{X}) \nabla_{\check{X}} \check{\psi}(\check{X}) \check{\phi}(\check{X}) \, d\check{X} - \int_{\Omega} \operatorname{div} [\check{a}(\check{X}) \nabla_{\check{X}} \check{\psi}(\check{X})] \check{\phi}(\check{X}) \, d\check{X}.$$

Como por (3.9), $\check{\phi} = 0$ em $\partial\Omega$, então podemos escrever

$$\int_{\Omega} \nabla_{\check{X}} \check{\phi}(\check{X})^t \cdot \check{a}(\check{X}) \nabla_{\check{X}} \check{\psi}(\check{X}) \, d\check{X} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} [\check{a}(\check{X}) \nabla_{\check{X}} \check{\psi}(\check{X})] \check{\phi}(\check{X}) \, d\check{X}. \tag{3.20}$$

Desta forma, conseguimos calcular o valor da integral que precisamos. Com um procedimento análogo ao anterior, calculamos

$$\int_K \nabla_{\tilde{x}} \phi^f(\tilde{x})^t \cdot \underline{a}(\tilde{x}) \nabla_{\tilde{x}} \psi(\tilde{x}) \, d\tilde{x}. \quad (3.21)$$

O processo descrito acima pode ser aplicado quando fixamos um elemento K e consideramos ψ uma função que vale um em $(0, 0)$, $(0, H)$ ou $(H, 0)$ e zero nos demais nós. Para cada situação, encontramos uma aproximação para ϕ diferente, a qual aplicamos a mesma metodologia descrita anteriormente. Além disto, como $\underline{a}(\cdot)$ é periódico com período ϵ em ambas as variáveis e H é múltiplo de ϵ , a integral em (3.19) independe do elemento K .

3.4.2 Testes Numéricos

Nesta seção, realizamos alguns testes numéricos utilizando o RFB e MEFM. Em cada teste, resolvemos o problema (1.9) escolhendo para $\underline{a}(x_1, x_2)$ uma função periódica em x_1 e x_2 , com periodicidade ϵ . Sejam

$$\underline{a}(x_1, x_2) = \frac{9}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x_1}{\epsilon} \right) \cos \left(\frac{2\pi x_2}{\epsilon} \right) + \frac{11}{2}, \quad (3.22)$$

$$f(\tilde{x}) = 1 \quad e \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.23)$$

a exemplo de Sangalli [9].

Primeiramente, calculamos as funções de base, resolvendo o problema (3.9) e utilizando a definição (3.12). A Figura 3.2 mostra uma função ϕ_h , obtida através da resolução do problema (3.9) em um elemento K fixo, com uma malha de 128×128 elementos quadrados.

A Figura 3.3 mostra uma função base, obtida através da definição (3.12) em um elemento K

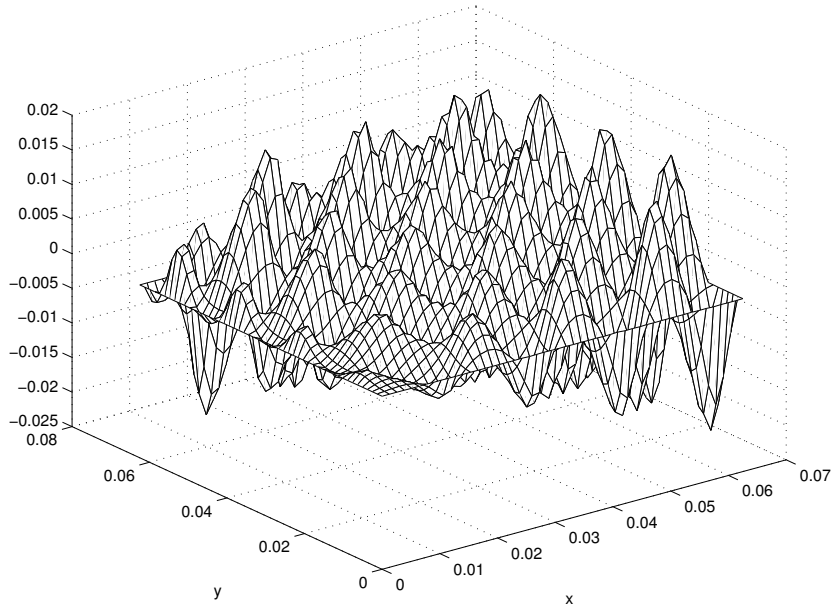


FIGURA 3.2: Função ϕ , obtida fixando-se um elemento K e resolvendo o problema (3.9) em uma malha de 128×128 elementos quadrados.

fixo. A Figura 3.4 mostra as curvas de nível da função de base da Figura 3.3.

Na Figura 3.5, através de cortes na direção diagonal, temos a solução aproximada por três diferentes métodos, comparada com a solução exata. Esta foi obtida através do Método de Galerkin tradicional, porém utilizando uma malha de 512×512 elementos quadrados.

Nas estimativas de erro utilizamos a norma

$$\|u_h\|_{l^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^N u_h(\tilde{x}_i)^2 H^2 \right)^{1/2}, \quad (3.24)$$

como em Hou e Wu [7]. É possível mostrar que a norma $\|\cdot\|_{l^2(\Omega)}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Encontramos este resultado em [2].

Desta forma, calculamos $\|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para RFB, MEFM e Galerkin para diferentes valores de ϵ e H . Estes resultados são apresentados nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. Observemos que os valores do erro para RFB e MEFM na maioria dos casos são melhores que os valores obtidos para Galerkin para ϵ e H correspondentes.

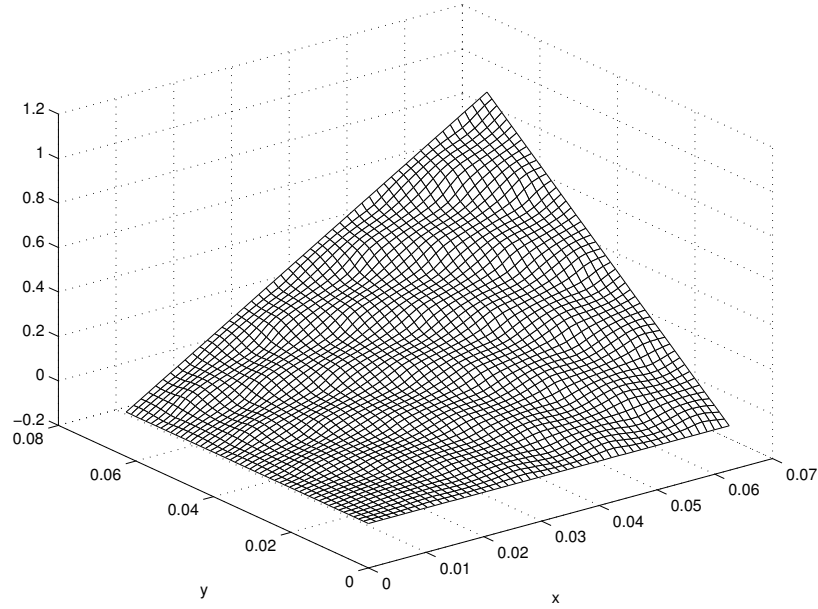


FIGURA 3.3: Função de base λ , obtida através da definição (3.12).

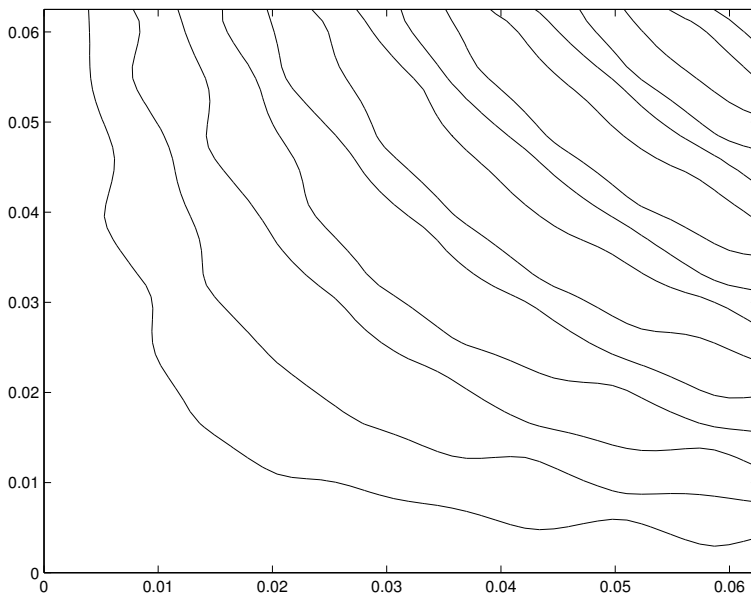


FIGURA 3.4: Curvas de nível da função de base da Figura 3.3.

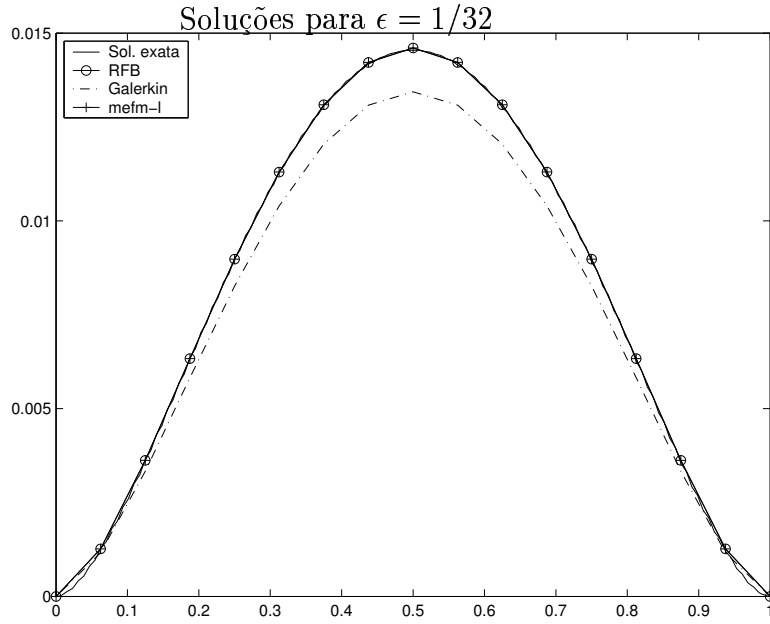


FIGURA 3.5: Cortes na direção diagonal da solução aproximada por RFB, MEFM e Galerkin, comparadas com a solução exata.

Hou, Wu e Cai [8] provaram as seguintes estimativas de erro na norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\frac{H}{\epsilon}\right)^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.25)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq cH^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} + c \left(\frac{\epsilon}{H}\right)^{1/2}, \quad (3.26)$$

e sugeriram por argumentos formais que a estimativa

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq cH^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} + c\epsilon + c\frac{\epsilon}{H} \quad (3.27)$$

é válida.

Em virtude de limitações computacionais, não realizamos testes nos quais $\epsilon \ll H$, o evidenciaria a validade de (3.27).

Na Figura 3.6, temos o gráfico construído mostrando o erro na norma l^2 para RFB, MEFM e Galerkin, com base nos dados obtidos nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 para $\epsilon = 1/64$.

TABELA 3.1: Cálculo de $\|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para RFB

$\epsilon \downarrow H \rightarrow$	1/8	1/16	1/32	1/64
1/16	3.31e-004	1.83e-004		
1/32	3.55e-004	2.25e-004	1.28e-004	
1/64	4.23e-004	3.22e-004	2.50e-004	1.62e-004

TABELA 3.2: Cálculo de $\|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para MEFM

$\epsilon \downarrow H \rightarrow$	1/8	1/16	1/32	1/64
1/16	3.30e-004	1.83e-004		
1/32	3.55e-004	2.25e-004	1.28e-004	
1/64	4.23e-004	3.21e-004	2.50e-004	1.62e-004

A seguir realizamos alguns testes numéricos considerando

$$a_{\approx}(x_1, x_2) = \frac{2 + p \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_1}{\epsilon}\right)}{2 + p \cos\left(\frac{2\pi x_2}{\epsilon}\right)} + \frac{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_2}{\epsilon}\right)}{2 + p \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_1}{\epsilon}\right)}, \quad (3.28)$$

$$f(x) = -1 \quad e \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.29)$$

onde $p = 1.8$, a exemplo de Hou [7]. Os resultados que obtivemos em comparação com os resultados de Hou [7] estão nas Tabelas 3.4 e 3.5.

TABELA 3.3: Cálculo de $\|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para Galerkin

$\epsilon \downarrow H \rightarrow$	1/8	1/16	1/32	1/64
1/16	3.52e-004	4.27e-004	2.08e-004	8.24e-005
1/32	3.64e-004	4.40e-004	4.58e-004	2.20e-004
1/64	3.14e-004	3.89e-004	4.08e-004	4.13e-004

TABELA 3.4: Cálculo de $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ para MEFM

1/H	ϵ	MEFM
1/16	1/32	1.15e-004
1/32	1/64	2.31e-004

TABELA 3.5: Cálculo de $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ para MEFM em [7]

1/H	ϵ	MEFM
1/16	0.04	3.54e-004
1/32	0.02	3.90e-004

3.5 O problema de difusão-reação com coeficientes oscilatórios

Nesta seção, estudamos o problema elíptico de segunda ordem com coeficientes oscilatórios dado por (1.9) com uma modificação. O operador \mathcal{L} será dado por

$$\mathcal{L}(\cdot) := -\operatorname{div}[\underline{a}(\underline{x})\underline{\nabla}(\cdot)] + a_{33}(\underline{x})(\cdot).$$

De maneira semelhante à seção 3.1.1, obtemos a formulação variacional para o problema, considerando a forma bilinear $\bar{a} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{a}(u, v) = \int_{\Omega} \underline{\nabla}u(\underline{x})^t \cdot \underline{a}(\underline{x})\underline{\nabla}v(\underline{x}) + a_{33}(\underline{x})u(\underline{x})v(\underline{x}) \, d\underline{x},$$

onde $\underline{a}(\underline{x})$ e $a_{33}(\underline{x})$ satisfazem (1.3). Analogamente, é possível mostrar que \bar{a} é simétrica, contínua e coerciva, satisfazendo as hipóteses do Lema de Lax-Milgran. Portanto, a formulação

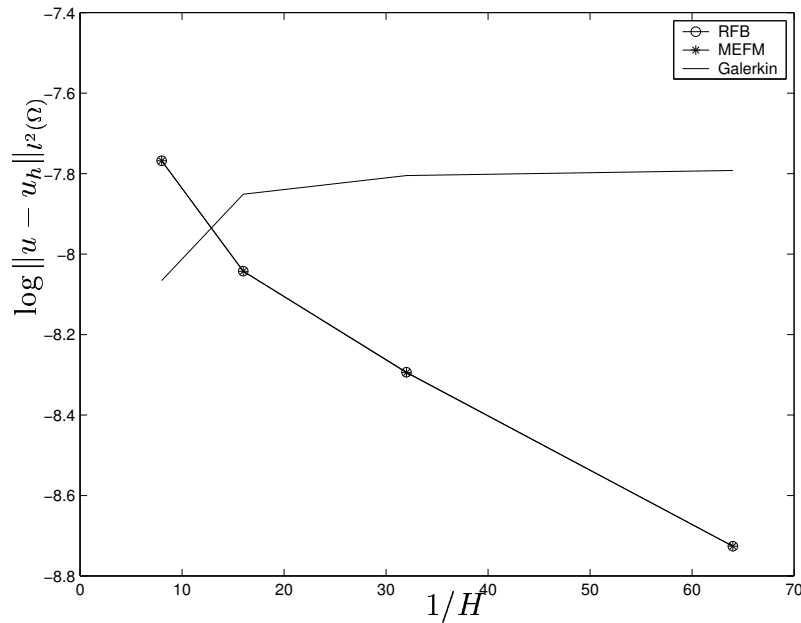


FIGURA 3.6: Gráfico do $\log \|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para $\epsilon = 1/64$.

variacional para o problema (1.9)

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ &\bar{a}(u, v) = (f, v), \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{3.30}$$

tem solução única.

3.5.1 Testes Numéricos

Nesta seção, fazemos alguns testes numéricos com o Método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM), utilizado para aproximar o problema (3.30). Em virtude de dificuldades numéricas, não foi possível a utilização do Método RFB para implementação deste tipo de problema.

Os procedimentos para a implementação do MEFM foram os mesmos. Em cada teste, aproximamos o problema (3.30) escolhendo para $a_{\approx}(x_1, x_2)$ e $a_{33}(x_1, x_2)$ uma função periódica para

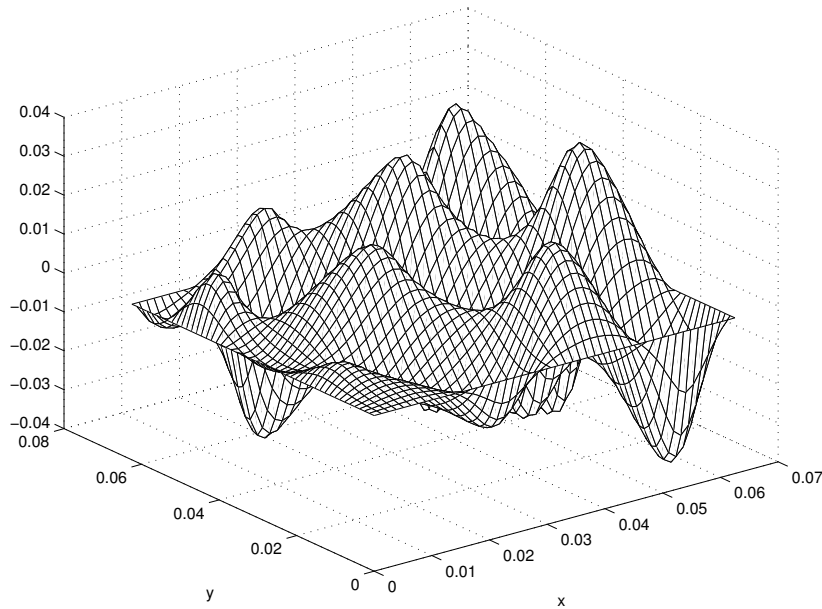


FIGURA 3.7: Função ϕ para $\epsilon = 1/32$.

novamente facilitar a implementação. Logo

$$\tilde{a}(x_1, x_2) = a_{33}(x_1, x_2) = \frac{9}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x_1}{\epsilon} \right) \cos \left(\frac{2\pi x_2}{\epsilon} \right) + \frac{11}{2}, \quad (3.31)$$

$$f(\tilde{x}) = 1 \quad \text{e} \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.32)$$

A Figura 3.5.1 mostra uma função ϕ , obtida através da resolução do problema (3.9) em um elemento K fixo, com uma malha de 128×128 elementos quadrados.

A Figura 3.5.1 mostra uma função de base λ , obtida através da definição (3.12) em um elemento K fixo. A Figura 3.9 mostra as curvas de nível da função de base da Figura 3.5.1.

Na Figura 3.10 temos o corte na direção diagonal da solução aproximada por dois diferentes métodos, comparada com a solução exata, que novamente foi obtida através do Método de Galerkin tradicional utilizando uma malha de 512×512 elementos quadrados.

Nas estimativas de erro, novamente utilizamos a norma (3.24) para MEFM e Galerkin para diferentes valores de ϵ e H . Estes resultados são apresentados nas Tabelas 3.6 e 3.7.

Na Figura 3.11 apresentamos o gráfico construído a partir do erro na norma l^2 para MEFM

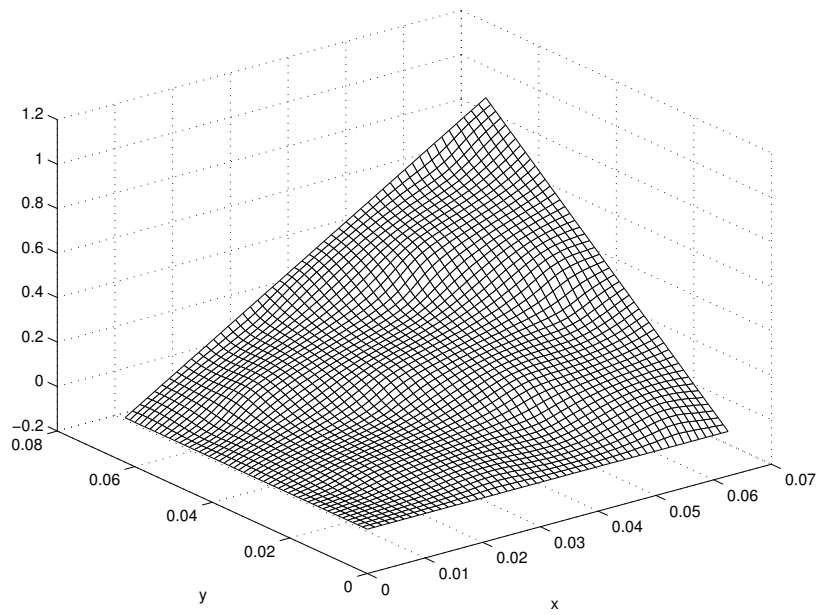


FIGURA 3.8: Função de base λ para $\epsilon = 1/32$

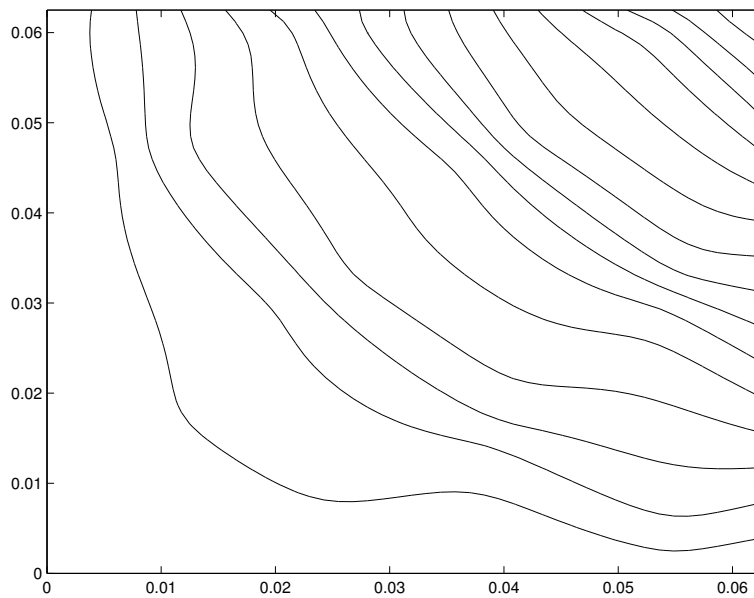


FIGURA 3.9: Curvas de nível para a função de base da Figura 3.5.1.

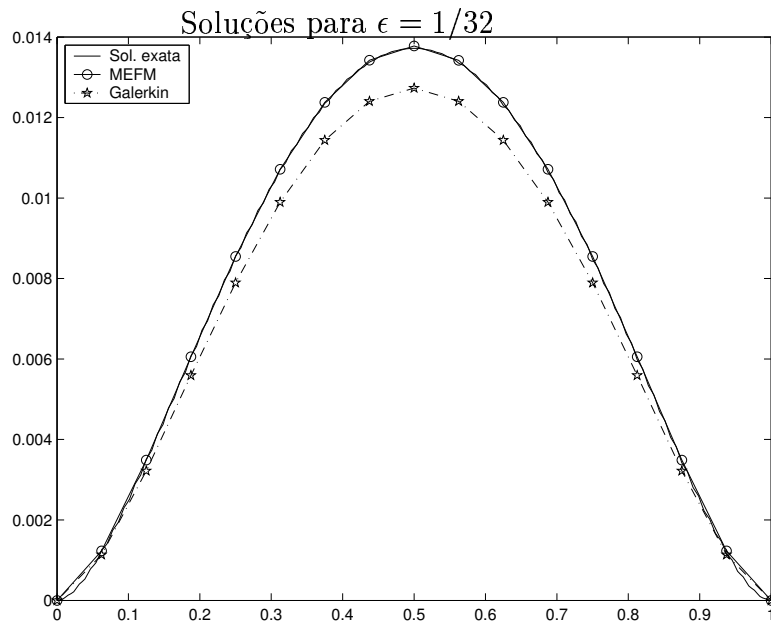


FIGURA 3.10: Cortes na direção diagonal da solução aproximada por MEFM e Galerkin, comparadas com a solução exata.

TABELA 3.6: Cálculo de $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ para MEFM

$\epsilon \downarrow H \rightarrow$	1/8	1/16	1/32	1/64
1/16	3.09e-004	1.67e-004		
1/32	3.31e-004	2.03e-004	1.14e-004	
1/64	3.97e-004	2.95e-004	2.28e-004	1.48e-004

e Galerkin, com base nos dados obtidos nas Tabelas 3.6 e 3.7 para $\epsilon = 1/64$.

TABELA 3.7: Cálculo de $\|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para Galerkin

$\epsilon \downarrow H \rightarrow$	1/8	1/16	1/32	1/64
1/16	3.14e-004	3.89e-004		
1/32	3.24e-004	3.99e-004	4.18e-004	
1/64	2.73e-004	3.49e-004	3.67e-004	3.72e-004

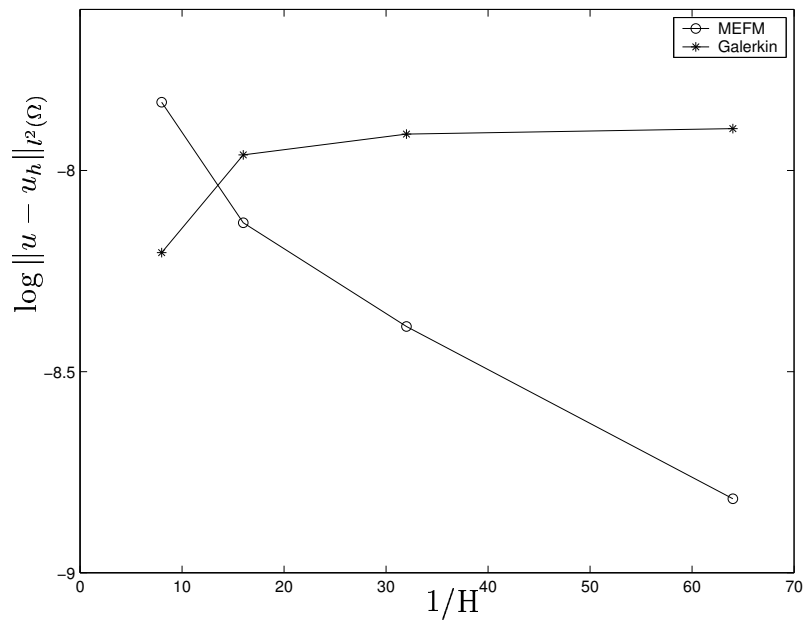


FIGURA 3.11: Gráfico do $\log \|u - u_h\|_{l^2(\Omega)}$ para $\epsilon = 1/64$

Capítulo 4

Testes Numéricos para o problema da placa heterogênea

Neste capítulo realizamos alguns testes numéricos para placas heterogêneas, fazendo variar a espessura δ e o parâmetro ϵ , com o objetivo de encontrar a solução de (1.1), através da resolução dos problemas (1.6) e (1.7).

4.1 Implementação e Testes Numéricos

Para aproximar a solução do problema da placa heterogênea tridimensional, precisamos resolver os problemas (1.6) e (1.7). No Capítulo 3, utilizamos dois métodos numéricos multiescala para resolver o problema (1.6), o RFB e o MEFM, além do método de Galerkin. Na resolução do problema (1.7), utilizamos apenas o MEFM e o método de Galerkin.

Nesta seção, utilizamos o MEFM e o método de Galerkin para obter a solução para o problema da placa heterogênea tridimensional. Novamente consideramos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e escolhemos

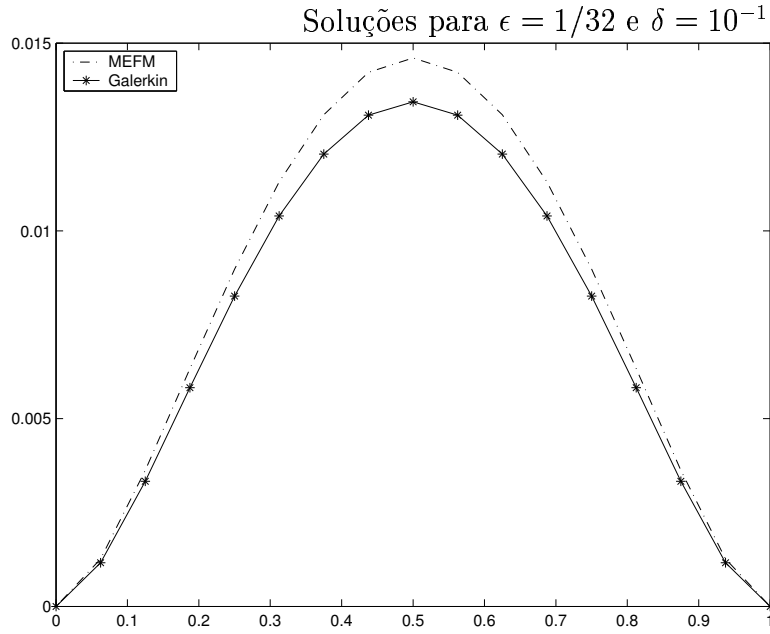


FIGURA 4.1: Cortes na direção diagonal das soluções aproximadas por MEFM e Galerkin para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-1}$ para o problema (1.6).

$\underset{\sim}{a}(x_1, x_2)$ uma função periódica em x_1 e x_2 , com periodicidade ϵ dada por

$$\underset{\sim}{a}(x_1, x_2) = \frac{9}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x_1}{\epsilon} \right) \cos \left(\frac{2\pi x_2}{\epsilon} \right) + \frac{11}{2} \quad (4.1)$$

$$f^\delta(\underset{\sim}{x}) = 0 \quad e \quad g^\delta(\underset{\sim}{x}, -\delta) + g^\delta(\underset{\sim}{x}, \delta) = 2\delta$$

para o problema de difusão e para o problema de difusão-reação, escolhemos $\underset{\sim}{a}(x_1, x_2)$ e $a_{33}(x_1, x_2)$ funções periódicas de período ϵ dadas por

$$\underset{\sim}{a}(x_1, x_2) = a_{33}(x_1, x_2) = \frac{9}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x_1}{\epsilon} \right) \cos \left(\frac{2\pi x_2}{\epsilon} \right) + \frac{11}{2} \quad (4.2)$$

$$f^\delta(\underset{\sim}{x}) = 0 \quad e \quad g^\delta(\underset{\sim}{x}, -\delta) - g^\delta(\underset{\sim}{x}, \delta) = 2.$$

No primeiro teste realizado, escolhemos $\delta = 10^{-1}$ e $\epsilon = 1/32$ para o cálculo das soluções dos problemas (1.6) e (1.7). A Figura 4.1 mostra as soluções obtidas para o problema (1.6) pelo método de Galerkin e pelo MEFM. A Figura 4.2 mostra as soluções obtidas para o problema (1.7) pelo método de Galerkin e pelo MEFM.

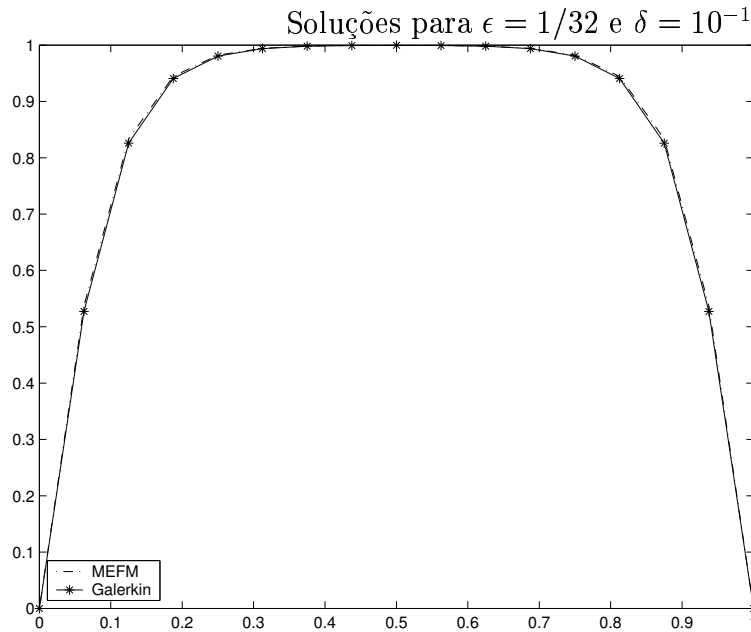


FIGURA 4.2: Cortes na direção diagonal das soluções aproximadas por MEFM e Galerkin para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-1}$ para o problema (1.7).

A Figura 4.3 mostra a solução aproximada pelo MEFM para o problema da placa heterogênea dada por (1.5) para $x_3 = \delta$. A Figura 4.4 mostra as curvas de nível da solução da Figura 4.3.

O segundo teste foi realizado utilizando $\delta = 10^{-3}$ e $\epsilon = 1/32$. A Figura 4.5 mostra a solução (1.5) para o problema da placa heterogênea por Galerkin para $x_3 = \delta$. A Figura 4.6 mostra as curvas de nível da Figura 4.5. Na Figura 4.7, temos o corte na direção diagonal da solução para o problema de difusão-reação. A Figura 4.8 mostra os cortes nas direção diagonal das soluções para o problema (1.5) por MEFM e Galerkin. Note que apesar do termo de reação implicar em oscilações espúrias, estas são menores com o MEFM. Além disto, estas oscilações somem quando a aproximação (1.5) é calculada, pois w_1 é multiplicado por $x_3 = O(\delta)$.

O terceiro teste foi realizado utilizando $\delta = 10^{-6}$ e $\epsilon = 1/32$. A Figura 4.9 mostra a solução pelo Método de Galerkin para o problema da placa heterogênea, dada por (1.5). A Figura 4.10 mostra as curvas de nível da solução da Figura 4.9. A Figura 4.11 mostra o corte na direção diagonal para as soluções aproximadas por Galerkin e MEFM.

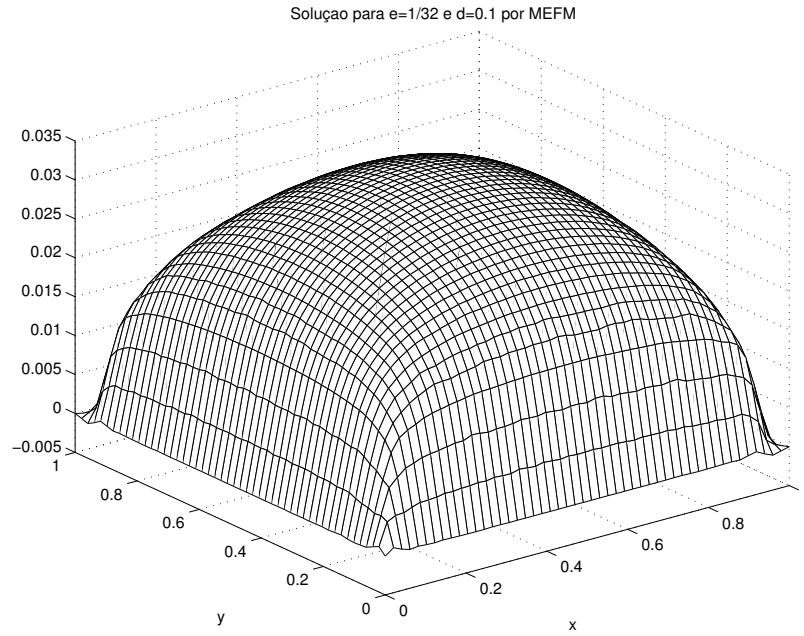


FIGURA 4.3: Solução aproximada por MEFM para o problema da placa heterogênea, considerando $x_3 = \delta$, para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 1/10$.

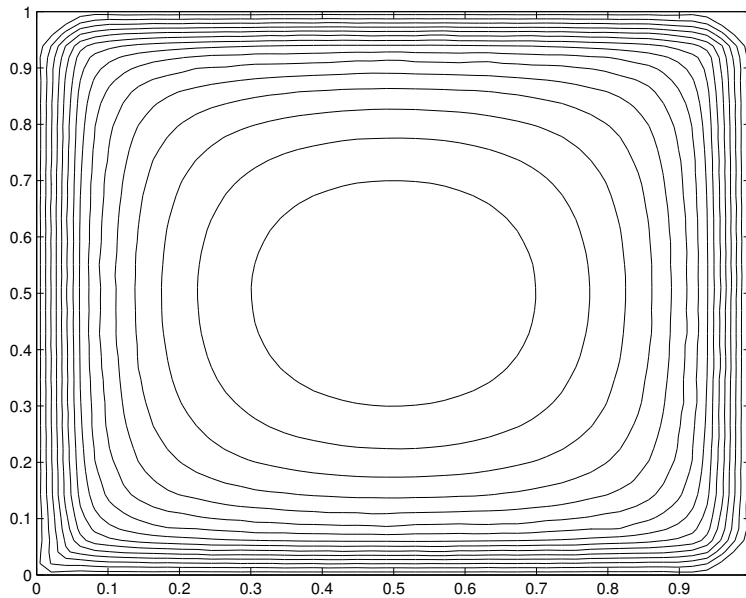


FIGURA 4.4: Curvas de nível da solução obtida para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-1}$ da Figura 4.3.

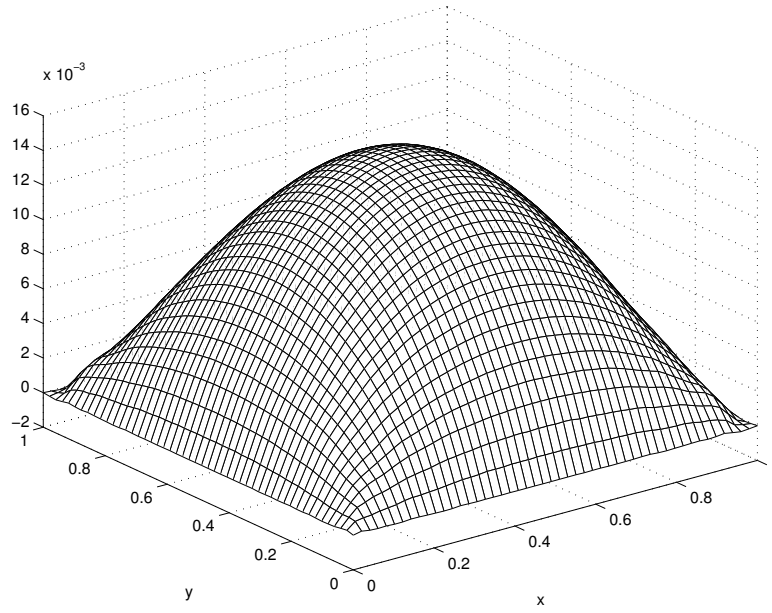


FIGURA 4.5: Solução para o problema da placa por MEFM para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-3}$, com $x_3 = \delta$.

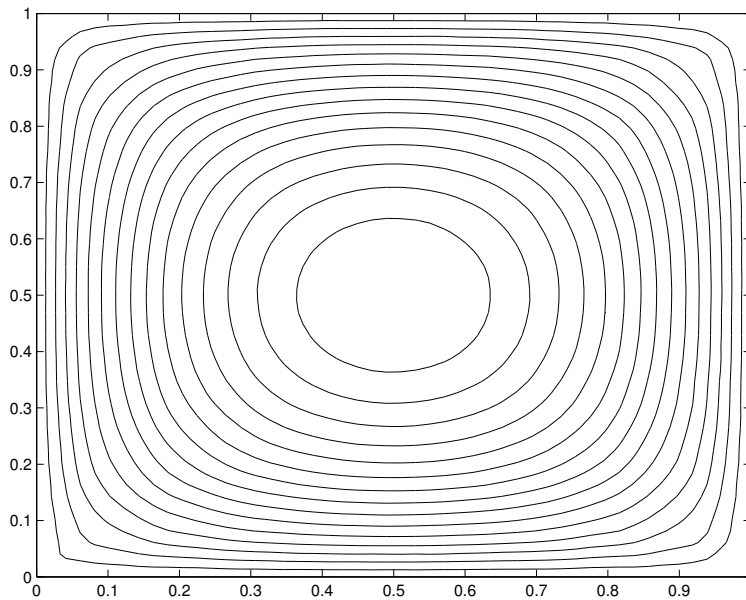


FIGURA 4.6: Curvas de nível para a solução da Figura 4.5.

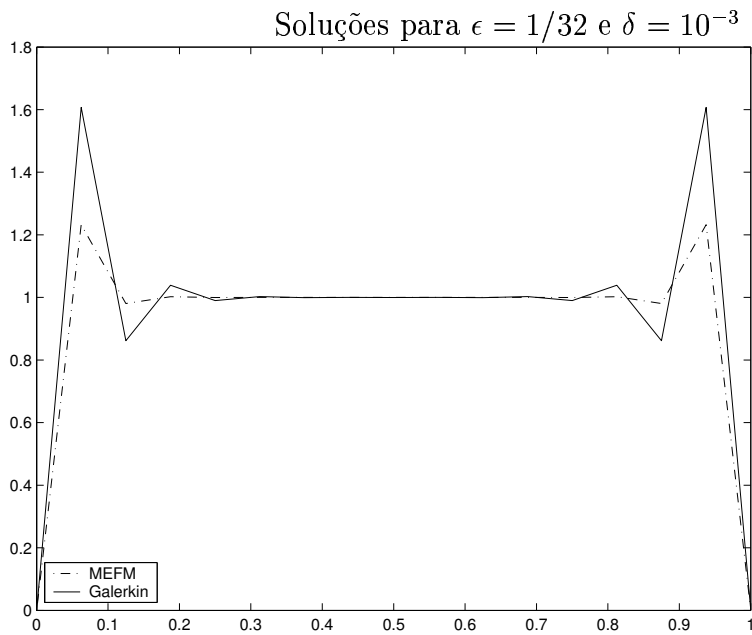


FIGURA 4.7: Cortes na direção diagonal para as soluções aproximadas para o problema de difusão-reação por MEFM e Galerkin, considerando $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-3}$.

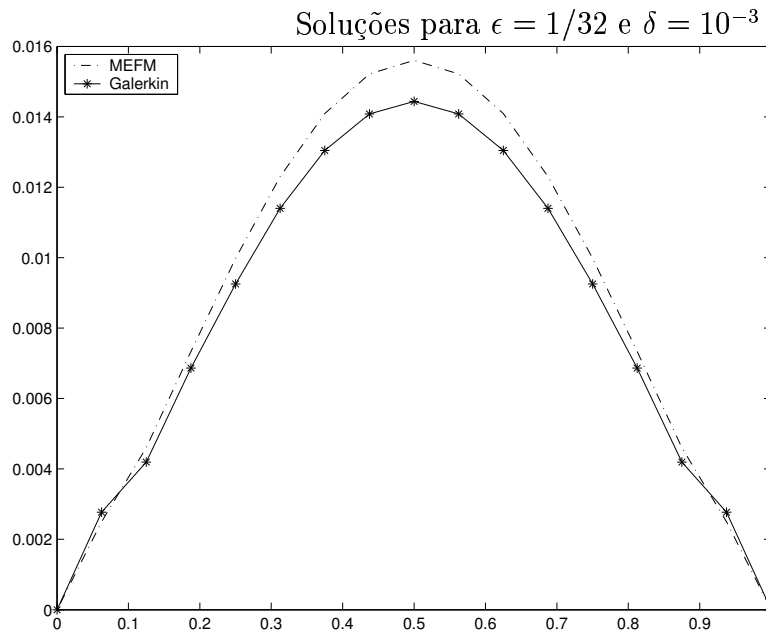


FIGURA 4.8: Cortes na direção diagonal para as soluções aproximadas para o problema da placa heterogênea por MEFM e Galerkin, considerando $x_3 = \delta$, para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-3}$.

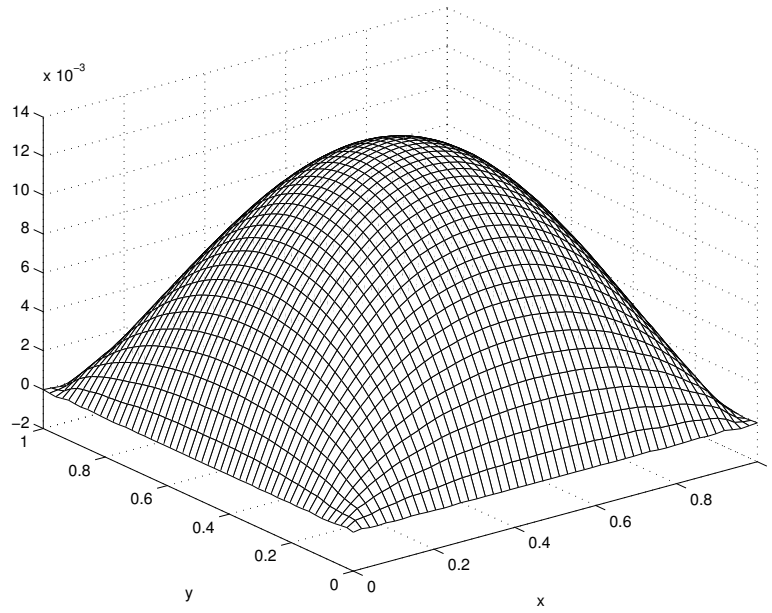


FIGURA 4.9: Solução aproximada pelo método de Galerkin para o problema da placa heterogênea para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-6}$.

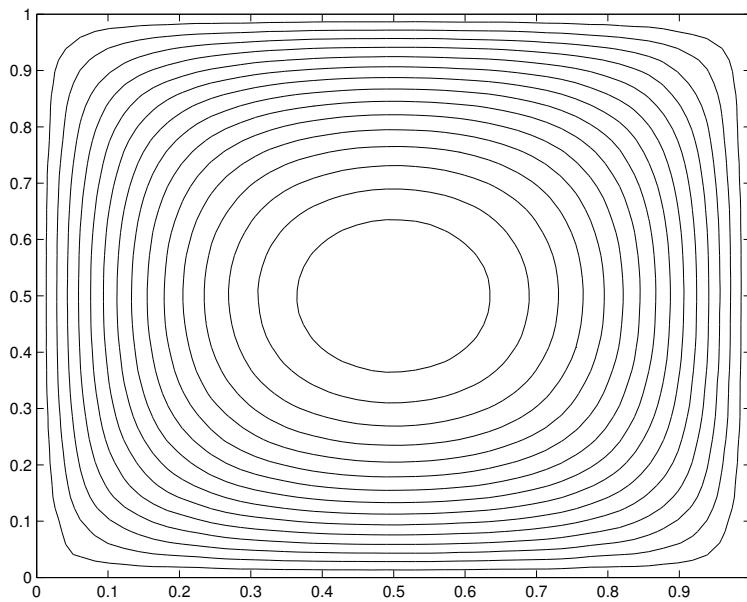


FIGURA 4.10: Curvas de nível da solução da Figura 4.9.

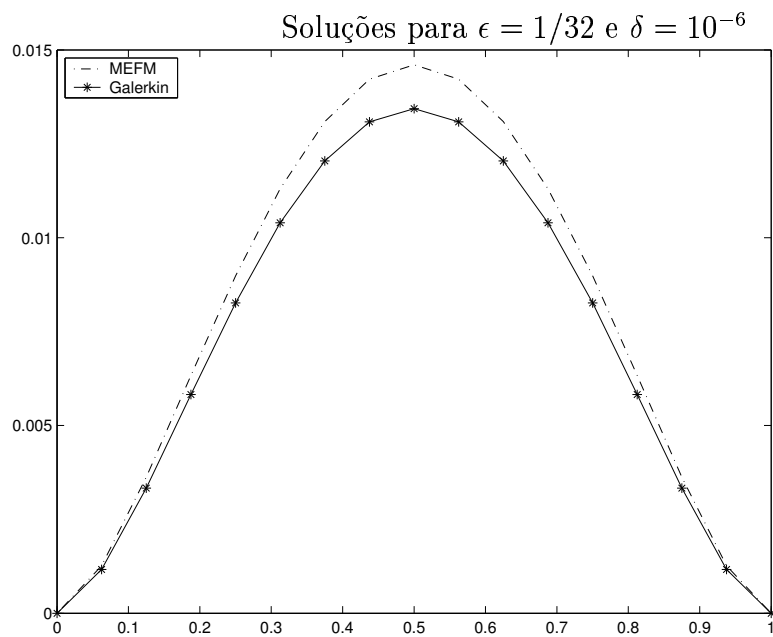


FIGURA 4.11: Cortes na direção diagonal para as soluções aproximadas por Galerkin e MEFM para o problema na placa heterogênea para $\epsilon = 1/32$ e $\delta = 10^{-6}$.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação, estudamos a equação do calor estacionária em uma placa heterogênea tridimensional. Problemas como este não são fáceis de lidar. A primeira dificuldade que encontramos foi a espessura da placa, que torna o domínio difícil de ser discretizado. Aplicamos a *Modelagem Hierárquica* como técnica de “redução de dimensão”, a fim de obter modelos bidimensionais para o problema original. Geramos um modelo simples com comportamento linear na direção transversa. A utilização deste tipo de aproximação nos permite incorporar a influência de $a_{33}(x)$ no modelo bidimensional, que seria desprezado caso utilizássemos técnicas assintóticas com $\delta \rightarrow 0$ ou mesmo aproximações constantes em x_3 . Além disso, como a placa é heterogênea, com o objetivo de caracterizar as propriedades que compõe o material, recorreremos à escala local, considerando estas contribuições na escala global. Portanto, para a resolução deste problema, lidamos com dois parâmetros pequenos: a espessura da placa e as propriedades do material na escala local.

Após a construção do modelo, desenvolvemos as expansões assintóticas da solução do problema tridimensional original e da solução aproximada, com o objetivo de obter uma estimativa para a diferença entre estas soluções. Como ambas as soluções dependem do parâmetro δ ,

reescrevemos os problemas no domínio escalonado (1.8) e obtemos uma estimativa para a diferença entre as duas soluções neste novo domínio.

Baseados no modelo proposto, realizamos alguns experimentos numéricos utilizando a aproximação por elementos finitos tradicional, representada pelo método de Galerkin e dois métodos numéricos multiescala, o Residual Free Bubbles (RFB) e o Método de Elementos Finitos Multiescala (MEFM). Utilizamos o método de Galerkin, o RFB e o MEFM na resolução de problemas de difusão e o método de Galerkin e o MEFM na resolução de problemas de difusão-reação.

Comparando os resultados obtidos, os métodos multiescala apresentaram um melhor desempenho em relação ao método de Galerkin. Porém, na prática, os métodos multiescala demandam altos custos computacionais, fazendo com que estes não sejam os métodos mais vantajosos. Para trabalhos futuros, sugerimos algumas técnicas para melhorar o desempenho dos métodos numéricos multiescala. No caso do método MEFM, podemos citar uma técnica conhecida por *oversampling*, descrita por Hou e Wu [7]. Esta técnica visa minimizar os efeitos das oscilações na fronteira de cada elemento K .

Utilizando funções bolhas com condições de fronteira não-nulas no método RFB, obteve-se melhores resultados em relação ao método RFB clássico para o problema de difusão-reação singularmente perturbado [5]. Esperamos com esta técnica obter resultados melhores para os problemas que tratamos.

Referências Bibliográficas

- [1] S. M. Alessandrini, D. N. Arnold, R. S. Falk, and A. L. Madureira. Derivation and justification of plate models by variational methods. In *Plates and shells (Québec, QC, 1996)*, volume 21 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 1–20. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [2] D. Braess. *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, UK, 1997.
- [3] F. Brezzi and A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4(4):571–587, 1994.
- [4] L. P. Franca, S. L. Frey, and T. J. R. Hughes. Stabilized finite element methods. I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95(2):253–276, 1992.
- [5] L. P. Franca, A. L. Madureira, and F. Valentin. Towards multiscale functions: enriching finite element spaces with local but not bubble-like functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(27-29):3006–3021, 2005.
- [6] T. Y. Hou. Numerical approximations to multiscale solutions in partial differential equations. In *Frontiers in numerical analysis (Durham, 2002)*, Universitext, pages 241–301. Springer, Berlin, 2003.
- [7] T. Y. Hou and X.-H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *J. Comput. Phys.*, 134(1):169–189, 1997.
- [8] T. Y. Hou, X.-H. Wu, and Z. Cai. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients. *Math. Comp.*, 68(227):913–943, 1999.
- [9] G. Sangalli. Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method. *Multiscale Model. Simul.*, 1(3):485–503 (electronic), 2003.

Apêndice A

Redução de dimensão através dos Modelos Hierárquicos

Este apêndice destina-se a detalhar o processo de redução de dimensão através dos modelos hierárquicos utilizados no Capítulo 2.

Seja $V(P^\delta)$ como em (1.4). Reescrevendo o problema (1.1) em sua formulação variacional, temos que $u^\delta \in H^1(P^\delta)$ é tal que

$$\int_{P^\delta} \underline{A}(\underline{x}) \underline{\nabla} u^\delta \underline{\nabla} v \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v \, d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta v \, d\underline{x}, \quad \text{para todo } v \in V(P^\delta). \quad (1.1)$$

Seja $V_1(P^\delta) = \{v \in V(P^\delta) : v(\underline{x}, x_3) = v_0(\underline{x}) + v_1(\underline{x})x_3\}$. Como $V_1(P^\delta) \subset V(P^\delta)$, definimos $\tilde{u}^\delta \in V_1(P^\delta)$ tal que

$$\int_{P^\delta} \underline{A}(\underline{x}) \underline{\nabla} \tilde{u}^\delta \underline{\nabla} \tilde{v} \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta \tilde{v} \, d\underline{x} + \int_{\partial P^\delta_\pm} g^\delta \tilde{v} \, d\underline{x}, \quad \text{para todo } \tilde{v} \in V_1(P^\delta). \quad (1.2)$$

Em particular, como $\tilde{u}^\delta \in V_1(P^\delta)$, então

$$\tilde{u}^\delta(\underline{x}, x_3) = w_0(\underline{x}) + w_1(\underline{x})x_3,$$

com $w_0, w_1 \in H_0^1(\Omega)$. Analogamente para $\tilde{v} \in V_1(P^\delta)$,

$$\tilde{v}(\underline{x}, x_3) = v_0(\underline{x}) + v_1(\underline{x})x_3.$$

Substituindo em (1.2), temos que

$$\int_{P^\delta} \underline{A}(\underline{x}) \underline{\nabla}[w_0(\underline{x}) + w_1(\underline{x})x_3] \cdot \underline{\nabla}v_0(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0(\underline{x}) \, d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} g^\delta v_0(\underline{x}) \, d\underline{x} \quad \text{para todo } v_0 \in H_0^1(\Omega) \quad (1.3)$$

e

$$\int_{P^\delta} \underline{A}(\underline{x}) \underline{\nabla}[w_0(\underline{x}) + w_1(\underline{x})x_3] \cdot \underline{\nabla}[v_1(\underline{x})x_3] \, d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_1(\underline{x})x_3 \, d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} g^\delta v_1(\underline{x})x_3 \, d\underline{x} \quad \text{para todo } v_1 \in H_0^1(\Omega). \quad (1.4)$$

Como

$$\underline{\nabla}[w_0(\underline{x}) + w_1(\underline{x})x_3] = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}w_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \underline{\nabla}w_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}w_0 + x_3 \underline{\nabla}w_1 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

e

$$\underline{A}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} a(\underline{x}) & 0 \\ 0 & a_{33}(\underline{x}) \end{pmatrix},$$

então

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\tilde{x}}) \begin{pmatrix} \underline{\nabla} w_0(\underline{\tilde{x}}) + x_3 \underline{\nabla} w_1(\underline{\tilde{x}}) \\ w_1(\underline{\tilde{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})[\underline{\nabla} w_0 + x_3 \underline{\nabla} w_1] \\ a_{33}(\underline{\tilde{x}})w_1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Temos também que

$$\underline{\nabla} v_0 = \begin{pmatrix} \underline{\nabla} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{\nabla}(v_1 x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \underline{\nabla} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.5) e (1.6) em (1.3), temos

$$\int_{P^\delta} \begin{pmatrix} \underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})(\underline{\nabla} w_0 + x_3 \underline{\nabla} w_1) \\ a_{33}(\underline{\tilde{x}})w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\nabla} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} g^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{x},$$

que é equivalente a

$$\int_{P^\delta} \underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})(\underline{\nabla} w_0 + x_3 \underline{\nabla} w_1) \cdot \underline{\nabla} v_0 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} g^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{x}.$$

Obtemos, portanto

$$\int_{P^\delta} [\underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})\underline{\nabla} w_0] \cdot \underline{\nabla} v_0 d\underline{x} + \int_{P^\delta} x_3 [\underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})\underline{\nabla} w_1] \cdot \underline{\nabla} v_0 d\underline{x} = \int_{P^\delta} f^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{x} + \int_{\partial P_\pm^\delta} g^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{x}.$$

Como $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$, podemos reescrever as integrais acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})\underline{\nabla} w_0 \underline{\nabla} v_0 dx_3 d\underline{\tilde{x}} + \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} x_3 \underline{\underline{a}}(\underline{\tilde{x}})\underline{\nabla} w_1 \underline{\nabla} v_0 dx_3 d\underline{\tilde{x}} &= \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta v_0(\underline{\tilde{x}}) dx_3 d\underline{\tilde{x}} \\ &+ \int_{\Omega} [g^\delta(\underline{\tilde{x}}, \delta) + g^\delta(\underline{\tilde{x}}, -\delta)] v_0(\underline{\tilde{x}}) d\underline{\tilde{x}}. \end{aligned}$$

Integrando na variável x_3 o membro da esquerda, temos

$$2\delta \int_{\Omega} \underline{a}(\underline{x}) \underline{\nabla} w_0 \underline{\nabla} v_0 \, d\underline{x} = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} f^{\delta} v_0(\underline{x}) \, dx_3 d\underline{x} + \int_{\Omega} [g^{\delta}(\underline{x}, \delta) + g^{\delta}(\underline{x}, -\delta)] v_0(\underline{x}) \, d\underline{x}.$$

Portanto, $w_0(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca de

$$\begin{aligned} -2\delta \operatorname{div}[\underline{a}(\underline{x}) \underline{\nabla} w_0] &= \int_{-\delta}^{\delta} f^{\delta}(\underline{x}, x_3) \, dx_3 d\underline{x} + [g^{\delta}(\underline{x}, \delta) + g^{\delta}(\underline{x}, -\delta)] && \text{em } \Omega, \\ w_0 &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Faremos um processo análogo a fim de obter o problema que w_1 resolve.

Substituindo (1.5) e (1.6) em (1.4), temos

$$\int_{P^{\delta}} \begin{pmatrix} \underline{a}(\underline{x}) (\underline{\nabla} w_0 + x_3 \underline{\nabla} w_1) \\ a_{33}(\underline{x}) w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \underline{\nabla} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \, d\underline{x} = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v_1(\underline{x}) x_3 \, d\underline{x} + \int_{\partial P_{\pm}^{\delta}} g^{\delta} v_1(\underline{x}) x_3 \, d\underline{x}.$$

que é equivalente a

$$\int_{P^{\delta}} \underline{a}(\underline{x}) (\underline{\nabla} w_0 + x_3 \underline{\nabla} w_1) x_3 \cdot \underline{\nabla} v_1 + a_{33}(\underline{x}) w_1 v_1 \, d\underline{x} = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v_1(\underline{x}) x_3 \, d\underline{x} + \int_{\partial P_{\pm}^{\delta}} g^{\delta} v_1(\underline{x}) x_3 \, d\underline{x}.$$

Obtemos, portanto

$$\begin{aligned} \int_{P^{\delta}} [\underline{a}(\underline{x}) x_3 \underline{\nabla} w_0] \cdot \underline{\nabla} v_1 \, d\underline{x} + \int_{P^{\delta}} [x_3^2 \underline{a}(\underline{x}) \underline{\nabla} w_1] \cdot \underline{\nabla} v_1 \, d\underline{x} + \int_{P^{\delta}} a_{33}(\underline{x}) w_1 v_1 \, d\underline{x} \\ = \int_{P^{\delta}} f^{\delta} v_1(\underline{x}) x_3 \, d\underline{x} + \int_{\partial P_{\pm}^{\delta}} g^{\delta} v_1(\underline{x}) x_3 \, d\underline{x}. \end{aligned}$$

Decompondo o domínio $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$ e reescrevendo as integrais acima, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{a}(\underline{x}) x_3 \underline{\nabla} w_0 \underline{\nabla} w_1 \, dx_3 d\underline{x} + \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} \underline{a}(\underline{x}) x_3^2 \underline{\nabla} w_1 \underline{\nabla} v_1 \, dx_3 d\underline{x} + \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} a_{33}(\underline{x}) w_1 v_1 \, dx_3 d\underline{x} \\ = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta v_1(\underline{x}) x_3 \, dx_3 d\underline{x} + \int_{\Omega} [g^\delta(\underline{x}, \delta) - g^\delta(\underline{x}, -\delta)] \delta v_1(\underline{x}) \, d\underline{x}. \end{aligned}$$

Integrando na variável x_3 o membro da esquerda

$$\begin{aligned} \frac{2\delta^3}{3} \int_{\Omega} \underline{a}(\underline{x}) \underline{\nabla} w_1 \underline{\nabla} v_1 \, d\underline{x} + 2\delta \int_{\Omega} a_{33}(\underline{x}) w_1 v_1 \, d\underline{x} = \int_{\Omega} \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta(\underline{x}, x_3) x_3 v_1(\underline{x}) \, dx_3 d\underline{x} \\ + \int_{\Omega} [g^\delta(\underline{x}, \delta) - g^\delta(\underline{x}, -\delta)] \delta v_1(\underline{x}) \, d\underline{x}. \end{aligned}$$

Portanto $w_1(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca de

$$\begin{aligned} -\frac{2\delta^3}{3} \operatorname{div}[\underline{a}(\underline{x}) \underline{\nabla} w_1] + 2\delta a_{33}(\underline{x}) w_1 = \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta(\underline{x}, x_3) x_3 \, dx_3 + [g^\delta(\underline{x}, \delta) - g^\delta(\underline{x}, -\delta)] \delta \quad \text{em } \Omega, \\ w_1 = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.8}$$