

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Método de Elementos Finitos Enriquecidos para uma  
Classe de Problemas Elípticos Não Lineares com  
Coeficientes Altamente Oscilatórios**

Por

**Manuel Jesus Cruz Barreda**

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2009

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS PARA  
UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES  
COM COEFICIENTES ALTAMENTE OSCILATÓRIOS

Manuel Jesus Cruz Barreda

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NA-  
CIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

---

Prof. Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D  
(Presidente)

---

Prof. Frédéric Gerad Christian Valentin, Ph.D

---

Prof. Márcio Arab Murad, D.Sc.

---

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

---

Prof. Leopoldo P. Franca, Ph.D

---

Prof. Marcus Sarkis, Ph.D

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL  
NOVEMBRO DE 2009

Cruz Barreda, Manuel Jesus

XXXX método de elementos finitos enriquecidos para uma classe de problemas elípticos não lineares com coeficientes altamente oscilatórios / Manuel Jesus Cruz Barreda. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2009.

xx, yy p. : il.; 29 cm

Orientador: Alexandre Loureiro Madureira

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2009.

1. elementos finitos. 2. multiescala. 3. homogeneização numérica. 4. problemas elípticos. I. Madureira, Alexandre Loureiro. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD XXX.XXX

A vida é um gênio movido pela vontade de  
conhecer (Da Vinci).

À memória de minha saudosa mãe, Brigida  
Barreda.

# Agradecimentos

Gostaria começar expressando meu profundo agradecimento a meu orientador, Professor Alexandre Loureiro Madureira, em primeiro lugar por proporcionar-me a oportunidade de trabalhar numa área científica fascinante e, em segundo lugar, pelas suas sugestões e correções valiosas. Seu incentivo, paciência e confiança durante os anos de convivência acadêmica foram fundamentais para o desenvolvimento e finalização do presente trabalho. Também, gostaria de registrar meu agradecimento ao Professor Márcio Murad Abad pela colaboração no início da formulação do projeto desta tese.

Não poderia de deixar de agradecer ao Laboratório de Computação Científica-LNCC pela chance e o privilégio de ter sido aluno de excelentes professores com os quais adquiri uma formação multidisciplinar que enriqueceu minha formação inicial de ciências exatas.

Para mim é uma grande satisfação e motivo orgulho ter submetido meu trabalho de tese aos renomados professores pesquisadores: Frédéric Gerad Christian Valentin, Márcio Arab Murad, Fernando Alves Rochinha, Leopoldo P. Franca e Marcus Sarkis. Meu sincero agradecimento a cada um dos professores citados que compuseram minha banca. É pertinente meu especial agradecimento a cada um dos membros de minha banca, também, pelas correções e sugestões elucidadoras.

Para minha esposa, Lily, reservo um especial agradecimento por sua compreensão e dedicação para comigo. De igual maneira, a meus filhos, Karly e Evandro, por sua torcida e porque eles são minha fonte de inspiração.

Finalmente, à CAPES pelo auxílio econômico durante os dois últimos anos de meu curso de doutoramento.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS PARA  
UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES  
COM COEFICIENTES ALTAMENTE OSCILATÓRIOS**

Manuel Jesus Cruz Barreda

Novembro , 2009

**Orientador:** Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D

Fenômenos em materiais heterogêneos conduzem ao estudo de problemas em equações diferenciais parciais com coeficientes altamente oscilatórios. O tratamento numérico mediante o uso dos métodos tradicionais exige um alto custo computacional ou é inviável. No presente trabalho pretendemos estender o método residual free bubbles com o intuito de gerar um procedimento de homegeneização numérica para o estudo de uma classe de problemas elípticos não lineares com coeficientes que têm um comportamento altamente variável (problemas multiescala). Mostramos que a formulação numérica decorrente da metodologia residual free bubbles permite aproximar o problema multiescala e, portanto, o problema efetivo. Para validar o procedimento proposto, apresentaremos estimativas de erro e resultados numéricos.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

## TÍTULO EM INGLÊS DA TESE OU DISSERTAÇÃO

Manuel Jesus Cruz Barreda

November, 2009

**Advisor:** Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D

The behavior of heterogeneous materials leads to the study of PDEs with highly oscillatory coefficients. Traditional methods demand high computational costs. In the present work, we extend the numerical homogenization procedure to a class of nonlinear elliptic problems with multiple scales. We show that the numerical formulation with Residual Free Bubbles approximates well multiple scale problems, and thus approximates the effective solution as well. To validate our method, we present error estimates and numerical results.



# Sumário

<b>1</b>	Introdução	1
1.1	Motivação Física . . . . .	6
1.2	Espaços Funcionais . . . . .	12
1.3	Problemas Elípticos Lineares . . . . .	18
1.4	Elementos Finitos . . . . .	19
<b>2</b>	Problema Multiescala Linear	22
2.1	Modelo Linear Multiescala . . . . .	22
2.1.1	Procedimento Formal de Homogeneização: Expansão Assin- tótica . . . . .	25
2.1.2	Formulação Fraca para o Problema de Célula . . . . .	32
2.2	Método Residual Free Bubbles . . . . .	36
2.2.1	Introdução . . . . .	36
2.2.2	Descrição do Método RFB . . . . .	37
2.3	Método RFB Aplicado ao Modelo Linear . . . . .	41
<b>3</b>	Problema Multiescala Não Linear	50
3.1	Problema Contínuo: Existência e Unicidade . . . . .	52
3.2	Homogeneização: Problema Multiescala Não Linear . . . . .	55
<b>4</b>	Formulações Numéricas RFB	62
4.1	Formulação RFB Completa . . . . .	62
4.2	Formulação RFB Reduzida . . . . .	64

4.2.1	Formulação RFB Reduzida . . . . .	67
4.2.2	Algoritmo Numérico . . . . .	70
4.3	Formulação RFB Reduzido: Existência . . . . .	71
4.3.1	Resultado de Existência para o RFB Reduzido . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Análise Matemática da Formulação Numérica</b>	<b>77</b>
5.1	Continuidade e Estimativas relativas a $R$ . . . . .	79
5.1.1	Estimativas para $R$ . . . . .	79
5.1.2	Continuidade de $R$ . . . . .	82
5.2	Continuidade da Aplicação $a_f$ . . . . .	84
5.2.1	Estimativas para $a_f(.,.)$ . . . . .	84
5.2.2	Continuidade de $a_f$ : . . . . .	87
5.3	Continuidade da Aplicação $E$ . . . . .	88
5.3.1	Demonstração da Proposição 5.3.1 . . . . .	92
5.3.2	Demonstração da Proposição 5.3.2 . . . . .	92
5.3.3	Demonstração da proposição 5.3.3 . . . . .	108
5.3.4	Demonstração da proposição 5.3.4 . . . . .	110
5.4	Propriedade Invariante do Operador $\Phi$ . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Análise de Erro</b>	<b>115</b>
6.1	Resultado de Melhor Aproximação para a Formulação RFB Completo	115
6.2	Convergência do RFB Reduzido . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Resultados Numéricos, Conclusões e Futuros Trabalhos</b>	<b>125</b>
7.1	Implementação . . . . .	125
7.1.1	Procedimento de Implementação via Método de Newton . . . . .	128
7.2	Testes Numéricos: Galerkin e RFB reduzido . . . . .	136
7.3	Conclusões . . . . .	147
7.4	Futuros trabalhos . . . . .	148

Apêndice

<b>A</b>	153
A.1 Apêndice A1 . . . . .	153
A.2 Apêndice A2 . . . . .	155
A.3 Apêndice A3 . . . . .	157
A.4 Apêndice A4 . . . . .	161

# Lista de Figuras

## Figura

7.1	Gráficos do coeficiente $\alpha_\epsilon(\cdot)$ e da solução exata $u^\epsilon(\cdot)$ para $\epsilon = 1/4$ .	127
7.2	Gráficos do coeficiente $\alpha_\epsilon(\cdot)$ e da solução exata $u^\epsilon(\cdot)$ para $\epsilon = 1/8$ .	127
7.3	Gráficos do coeficiente $\alpha_\epsilon(\cdot)$ e da solução exata $u^\epsilon(\cdot)$ para $\epsilon = 1/16$ .	127
7.4	Gráficos do coeficiente $\alpha_\epsilon(\cdot)$ e da solução exata $u^\epsilon(\cdot)$ para $\epsilon = 1/32$ .	128
7.5	Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com $\epsilon = 1/4$ .	137
7.6	Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com $\epsilon = 1/4$ .	138
7.7	Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com $\epsilon = 1/8$ .	139
7.8	Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com $\epsilon = 1/8$ .	140
7.9	Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com $\epsilon = 1/16$ .	141
7.10	Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com $\epsilon = 1/32$ .	142
7.11	Comparação entre as soluções exata e a aproximada via Galerkin com $\epsilon = 1/32$ .	143
7.12	Comparação entre as soluções exata e as aproximadas via Galerkin e RFB, com $h = 1/8$ , respectivamente.	145

7.13 Comparação entre as soluções exata e as aproximadas via Galerkin e RFB, com $h = 1/16$ , respectivamente. . . . .	146
---	-----

# Lista de Siglas e Abreviaturas

- RFB: Residual Free Bubble
- MsFEM: Multiscale Finite Element Methods
- HMM: Heterogeneous Multiscale Methods

# Capítulo 1

## Introdução

Problemas centrais da física e das ciências da engenharia estão associados a processos físicos que ocorrem em escalas diferentes de tempo e/ou de comprimento. Estes processos são usualmente referidos como fenômenos multiescala. Nesta classe se situam os fenômenos em meios porosos, que são frequentes na natureza, tais como escoamentos através de formações porosas (aquíferos, reservatórios de petróleo). Outro fenômeno importante que está na classe dos fenômenos multiescala é o processo de difusão de calor através de materiais compósitos. Os fenômenos (em regime permanente) acima citados estão relacionados a problemas elípticos lineares e não lineares. A estrutura heterogênea do meio é refletido nos coeficientes da equação diferencial parcial que governa o fenômeno, dando lugar a problemas elípticos com coeficientes oscilatórios.

Nestes últimos anos têm surgido um interesse crescente em desenvolver métodos numéricos específicos para o tratamento de modelos que apresentam fenômenos de escalas múltiplas. Estes métodos são usualmente referidos como métodos multiescala. Podemos citar, em particular, os trabalhos de: Hou e Wu (1997), Y. E. Efendiev e Ginting (2004), Chen e Savchuk (2008) vinculados ao MsFEM (Multiscale Finite Element Methods); E e Engquist (2003), e W. E e Zhang (2004) associados com o HMM (Heterogeneous Multiscale Methods); com a metodologia RFB (Residual Free Bubbles) cabe destacar os trabalhos de Brezzi (2000), Franca e Russo (1996), e Sangalli (2003). Todos os métodos acima mencionados são basea-

dos num procedimento de duas escalas, onde a idéia geral consiste em derivar uma equação sobre a escala maior que incorpore a influência das variações da escala menor no coeficiente elíptico. Para este fim, cálculos na escala menor são realizadas como parte do método multiescala para estimar como estas variações da escala fina influenciam a solução na malha grosseira.

Muito recentemente, para problemas elípticos lineares em duas dimensões com coeficientes periódicos, em Versieux e Sarkis (2006) e Sarkis e Versieux (2006) propõem um novo método numérico baseado em aproximações dos termos da expansão assintótica da solução. No presente trabalho ensaiaremos uma extensão do método RFB para uma classe de problemas elípticos não lineares com coeficientes altamente oscilatórios. Isto será feito em cima do seguinte modelo matemático ao qual nos referiremos como **problema modelo multiescala não linear**:

$$-\operatorname{div}[a_\epsilon(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon)] = f \quad \text{em } \Omega, \quad u_\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (1.1)$$

onde o fluxo  $a_\epsilon(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon)$ , num primeiro projeto, será considerado da forma:

$$a_\epsilon(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon) = \alpha_\epsilon(x)b(u_\epsilon)\nabla u_\epsilon. \quad (1.2)$$

Este modelo representa uma extensão natural do problema elíptico linear com coeficientes oscilatórios, quando o fluxo em (1.1) é dado por  $\alpha_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon$ . Para este problema linear, Hou e Wu introduzem um esquema de elementos finitos multiescala (MsFEM) Hou e Wu (1997) ad hoc, onde a ideia fundamental deste método consiste em incorporar a informação local do problema em questão nas funções de base do novo espaço de elementos finitos a ser considerado. É assim, mediante esta base modificada e a formulação de elementos finitos correspondente que a influência da escala menor sobre a escala maior é capturada de maneira correta. Uma descrição bem detalhada deste método encontra-se em Rochinha e Madureira (2004). A análise de convergência deste esquema numérico é estabelecido em T. Y. Hou e Cai (1999). A extensão do MsFEM para problemas não lineares é introduzido



em Y. E. Efendiev e Ginting (2004) para o caso em que o operador diferencial associado ao membro esquerdo de (1.1) é pseudo-monótono. Neste mesmo trabalho, Efendiev e colaboradores mostram, considerando a hipótese de periodicidade, que a solução numérica relativa à formulação numérica multiescala converge para a solução efetiva. Além disso, determinam a taxa de convergência para a solução MsFEM no caso em que o fluxo depende unicamente do gradiente da solução de (1.1), isto é, quando o fluxo é da forma:  $a_\epsilon(x, \nabla u_\epsilon)$ .

Ainda no espírito da metodologia MsFEM, muito recentemente, Chen (2006) reformula o MsFEM mediante uma modificação na forma bilinear da formulação de elementos finitos do problema em questão. Desta forma, ao invés de utilizar o espaço de elementos finitos multiescala, esta nova versão do MsFEM faz uso do espaço do elementos finitos clássico. Com esta nova versão, são tratados os problemas multiescala linear Chen (2006) e não linear Chen e Savchuk (2008). Neste último caso os autores realizam o estudo de análise numérica para o caso periódico quando o fluxo em (1.1) é  $a_\epsilon(x, u_\epsilon, \nabla u_\epsilon)$  com hipótese de coercividade uniforme. Desta forma, a não linearidade considerada recai numa classe diferente ao tratado em Y. E. Efendiev e Ginting (2004).

Em E e Engquist (2003), os autores introduzem uma metodologia diferente para o tratamento de problemas multiescala lineares e não lineares: Método Multiescala Heterogêneo (HMM). Para uma breve descrição do método HMM, veja Ming e Yue (2006). Assim com o MsFEM, esta nova metodologia se manifesta eficiente na captura do comportamento macroscópica da solução do problema multiescala considerado. Isto é feito a partir de um esquema numérico sobre o espaço de elementos finitos clássico. Análise numérica desta nova proposta de esquema numérico para o caso não linear é dado em W. E e Zhang (2004) para um fluxo da forma  $a_\epsilon = b_\epsilon(x, u_\epsilon) \nabla u_\epsilon$ .

O uso da metodologia residual free bubble para o tratamento de problemas elípticos lineares com coeficientes oscilatórios foi sugerido em Brezzi (2000). Este método foi recentemente implementado para o estudo desta classe de problemas lineares

multiescala por Sangalli (2003). No presente trabalho será detalhado o procedimento numérico decorrente deste método (RFB).

Em cada uma das metodologias acima mencionadas foi destacado a eficiência na procura de aproximações numéricas para a solução multiescala quando o parâmetro da malha ( $h$ ) é muito maior que o parâmetro físico ( $\epsilon$ ), ao mesmo tempo, neste caso, foi verificado a falta de precisão quando utilizado o método de elementos finitos usual. Daí a importância destes procedimentos numéricos modernos.

Ao contrário do método RFB, as técnicas MsFEM e HMM foram extendidas para o estudos de certos problemas elípticos multiescala não lineares, como explicitado acima. Uma vez que o RFB funcionou com êxito para o caso linear multiescala (ver Sangalli (2003)), resulta natural sua extensão para o tratamento do caso multiescala não linear, pois, como mostra a equação (4.27), para o modelo (1.1), a metodologia RFB sugere um procedimento de homogeneização numérica. Por outro lado, no estudo do modelo não linear, a diferença dos métodos acima mencionados, a metodologia RFB utilizada no presente trabalho permite de maneira natural a proposta de diferentes formulações numéricas para responder à questão do problema de homogeneização numérica associado ao problema modelo (1.1) que tomaremos como referência.

O acima dito serve de motivação para a presente proposta de trabalho de tese. Assim, como um primeiro projeto, mediante a metodologia RFB, focaremos nossa atenção no problema modelo (1.1). Para este, temos como objetivo realizar as seguintes tarefas:

- 1) Rever o problema de Cauchy para o correspondente problema de contorno (1.1);
- 2) Rever, mediante um procedimento formal, o cálculo do problema efetivo associado ao modelo não linear (1.1);
- 3) A partir da metodologia RFB, introduzir duas formulações de elementos finitos para o problema contínuo multiescala não linear, os quais serão

denominados, respectivamente, **RFB completo** e **RFB reduzido**;

- 4) Estabelecer a existência de solução para o esquema RFB reduzido;
- 5) Validar o esquema RFB completo mediante um resultado de melhor aproximação tipo Lema de Céa;
- 6) Conduzir uma análise de erro para a solução de elementos finitos RFB reduzido e, assim, resolver o problema de homogeneização numérica associado ao problema contínuo (1.1).
- 7) Implementação do procedimento numérico reduzido para o caso unidimensional.

As tarefas acima citadas serão distribuídas nos capítulos que passamos a descrever. No capítulo 3, mediante pequenas adaptações dos resultados em Boccardo e Murat (1982) e Artola e Duvaut (1982), formulamos um resultado de existência e unicidade de solução fraca ( $u_\epsilon$ ) para nosso problema modelo (1.1); em seguida, imitando o procedimento formal seguido para o caso linear em conjunto com as idéias encontradas nos artigos Allaire (1992) e Tokarzewski e Adrianov (2001), determinamos o problema efetivo associado a nosso problema modelo multiescala não linear .

No capítulo 4 ensaiaremos uma extensão da metodologia residual free bubble para o estudo de nosso problema modelo multiescala não linear e, a partir daí, propor dois procedimentos de elementos finitos. O primeiro deles (RFB completo) de caráter teórico; o segundo (RFB reduzido), associado às metodologias de tipo Galerkin generalizado. Para esta última formulação numérica será estabelecido um resultado de existência para o correspondente problema discreto.

O capítulo 5 estará reservado para a fundamentação matemática exigida no capítulo 4. Para este fim, tomaremos como referência os trabalhos de Chen e Savchuk (2008), W. E e Zhang (2004) e Xu (1996).

Uma análise de erro é elaborada no capítulo 6 para as duas formulações acima citadas. Para a formulação RFB completo apresentamos um resultado de melhor aproximação; já para a formulação RFB reduzido, mostraremos que a respectiva

solução numérica converge para a solução homogeneizada associada ao problema modelo multiescala não linear .

Resultados numéricos, no caso unidimensional, conclusões e trabalhos futuros serão discutidos no capítulo 7.

A seguir iremos detalhar algumas notações que serão de uso comum no presente trabalho.

1. Utilizaremos a letra  $C$  sem ou com índice ( $C_1, C_2, C_\Omega, \dots$  etc) para representar uma constante que independe de  $h$  e  $\epsilon$ . Também indicam constantes as letras do alfabeto grego com ou sem índice ( $\alpha_o, \beta, \dots$ ), a não ser que seja especificado o contrário.
2. A letras maiúsculas em negrito serão utilizadas para indicar os tensores ( $\mathbf{A}, \mathbf{K}, \dots$ ). As letras minúsculas com ou sem índice, em negrito, servirão para representar os vetores ( $\mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \dots$ ).
3. No presente trabalho, a notação “+ ...” indicará que o que vem a seguir, a partir do símbolo “+”, são termos de ordem superior à potência de  $\epsilon$  presentes na expressão.

## 1.1 Motivação Física

Os processos estacionários (em regime permanente), isto é, fenômenos invariantes com o tempo, de diversa natureza física são descritos por equações diferenciais de tipo elíptico.

Nesta primeira parte, para efeitos de uma motivação física, estudaremos o problema relativo à distribuição estacionária de calor num corpo sólido ocupando uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  com superfície  $\partial\Omega$ . A **lei de Fourier** de condução de calor estabelece que o calor flui em direção oposta ao gradiente de temperatura  $u = u(x), x = (x_1, x_2, x_3)$ , com uma razão proporcional à magnitude do gradiente. Isto é, o fluxo de calor

( $\mathbf{W}$ ), em qualquer posição é dado por

$$\mathbf{W} = -\alpha \nabla u, \quad (1.3)$$

onde  $\alpha(x)$  é o coeficiente de condutividade térmica. (Usualmente  $\alpha$  é um escalar, mas se o material é termicamente anisotrópico, quer dizer, possui direções preferenciais de fluxo de calor, como poderia ser num material fibroso ou laminado,  $\alpha$  pode ser um tensor.)

A seguir iremos escrever a equação de balanço térmico para uma região arbitrária  $V \subset \Omega$  delimitada pela superfície  $S$ . Assumindo que no interior de  $V$  há uma fonte de calor com densidade  $f(x)$ , então  $f(x)dV$  representa o calor gerado na região  $dV$ . Portanto, a quantidade total de calor gerada na região  $V$  será

$$\int_V f(x) dx.$$

Se  $\mathbf{n}$  é a normal exterior à superfície  $S$ , então o fluxo de calor neto passando através da superfície  $S$  é dado por

$$\int_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS.$$

A equação de balanço térmico estabelece o seguinte:

$$\int_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V f(x) dx.$$

Se aplicamos o teorema da divergência no membro esquerdo da equação acima, tem-se

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{W} dV = \int_V f(x) dx.$$

Como esta igualdade é válida para qualquer  $V \subset \Omega$ ,

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = f(x) \quad \text{sobre } \Omega.$$

Ou, de acordo com (1.3), a equação acima pode ser dada como segue:

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla u) = f(x).$$

Os processos de difusão de uma substância são muitos semelhantes aos processos de condução de calor. A **lei de Fourier** tem seu análogo dado pela **lei de Fick**

$$\mathbf{W} = -\mathbf{D} \nabla u,$$

onde  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x)$  é o coeficiente de difusão (dispersão) e  $u = u(x)$  é a concentração. Os problemas relacionados com a distribuição estacionária dos campos elétrico e magnético estão relacionados a equações do mesmo tipo das consideradas acima. Tais problemas estão regidos pelas equações de Maxwell, que no caso estacionário têm a forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= 4\pi \rho; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

onde

$\mathbf{E}$ : vetor intensidade de campo elétrico,

$\mathbf{H}$ : vetor intensidade de campo magnético,

$\mathbf{j}$ : vetor de densidade volumétrica de corrente elétrica,

$\rho$ : densidade volumétrica das cargas elétricas,

$\epsilon$ : coeficiente de permissividade dielétrica,

$\mu$ : coeficiente de permeabilidade magnética.

Do estudo da distribuição estacionária de corrente elétrica num meio condutor surge, a partir das equações de Maxwell, a lei de conservação da carga elétrica

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

e a condição de potencialidade do campo elétrico dado por

$$\mathbf{E} = -\nabla u.$$

Os vetores densidade de corrente  $\mathbf{j}$  e densidade de campo elétrico estão relacionados via **lei de Ohm**

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

onde  $\sigma$  é o coeficiente de eletrocondutividade (condutividade elétrica).

Outra equação do mesmo tipo dos considerados acima é obtido a partir do modelo para um escoamento monofásico **saturado** dado através das relações:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{K}(x)\nabla p, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = f(x), \tag{1.5}$$

onde (1.4) define a velocidade de Darcy  $\mathbf{V}$  e (1.5) é uma equação de balanço de massa que relaciona a pressão  $p$  e o termo de fonte  $f(x)$ . A permeabilidade  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$  (a qual também pode ser interpretada como a mobilidade, condutividade hidráulica, ou difusividade).

Das relações (1.4) e (1.5) temos a seguinte equação:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{K}(x)\nabla p] = f(x).$$

Se cada problema elíptico, acima descritos, independe, por exemplo, da variável  $x_3$  (fica claro que esta situação pode acontecer se o termo de fonte, o coeficiente, as condições de contorno independem de  $x_3$  e no caso de regiões particulares), os modelos acima podem ser tratados como problemas bidimensionais.

No presente trabalho iremos tratar com problemas no plano.

Todas as equações acima descritas podem ser representadas através da seguinte

equação diferencial parcial:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{A}(x)\nabla u] = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1.6)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um subdomínio aberto convexo e limitado, e  $\mathbf{A}(x) = (\mathbf{A}_{ij}(x))$ .

Muitos materiais utilizados na industriais e na engenharia assim como os encontrados na natureza são não homogêneos (ou também denominados heterogêneos), isto é, são formados por distintos constituintes ou fases que são distinguíveis unicamente a partir de uma certa escala de comprimento.

Em particular, um compósito é um material constituído por dois ou mais componentes, onde cada uma delas apresenta características próprias. Os materiais compósitos são amplamente utilizados em função das propriedades adicionais que os referidos materiais possuem. Exemplos destes são as cerâmicas, o concreto, a fibra de vidro, e outros. Num bom compósito, quanto menores são as heterogeneidades, melhor é a propriedade do material em relação às propriedades individuais dos constituintes. Portanto, tomando como referência o modelo (1.6), um processo de difusão linear num material com natureza heterogênea pode ser representado mediante o seguinte modelo matemático:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{A}_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon] = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1.7)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro que representa a escala menor presente no fenômeno, e  $\mathbf{A}_\epsilon(x)$  o tensor de condutividade. Um modelo particular para o mesmo fenômeno num meio com estrutura periódica será induzido no segundo capítulo do presente trabalho.

Quando o processo de condução de calor os parâmetros presentes no fenômeno dependem fortemente da temperatura, tal como o tensor de condutividade, tem lugar o seguinte modelo não linear correspondente ao modelo (1.7):

$$-\operatorname{div}[\mathbf{A}_\epsilon(x, u_\epsilon)\nabla u_\epsilon] = f \quad \text{em } \Omega. \quad (1.8)$$



Um modelo dinâmico associado à (1.8) é a equação de Richards, que rege o escoamento de água num meio poroso parcialmente saturado. Passamos a uma breve descrição do referido modelo.

A equação de continuidade que descreve a conservação de massa de no meio condutor é:

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) + \rho f, \quad (1.9)$$

onde cada uma das variáveis presentes nesta equação representa:

$\theta$  conteúdo de água por unidade de volume;

$\rho$  massa de água por unidade de volume;

$t$  tempo;

$\mathbf{V}$  velocidade de Darcy;

$f$  fonte ou sumidouro de água.

Considerando um meio condutor isotérmico, sendo a pressão do ar igual à pressão atmosférica, por exemplo, o movimento da água no meio condutor é dado pela lei de Darcy generalizada a meios não **saturados**, a diferença de (1.4), de acordo como segue.

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}(x, p)\nabla(p + x_3), \quad (1.10)$$

onde  $\mathbf{V}$  é o vetor velocidade, a matriz  $\mathbf{K}$  é denominada condutividade hidráulica não-saturada, e a variável  $x_3$  está associada ao fluxo devido à gravidade.

Considerando a água e o meio incompressíveis, conjugando a equação de continuidade com a equação dinâmica, equações (1.9) (com  $\rho = \text{constante}$ ) e (1.10), obtém-se a equação que descreve o escoamento no meio poroso:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \operatorname{div}[\mathbf{K}(x, p)\nabla(p + x_3)] = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1.11)$$

onde  $\Omega$  representa o domínio ocupado pelo meio poroso, e  $\theta = \theta(p)$ . Relações constitutivas entre  $\theta$  e  $p$ , e entre  $\mathbf{K}$  e  $p$  são dadas de maneira apropriada, que colocam em manifesto o carácter não linear da equação (1.11). A equação (1.11) é conhecida como equação de Richards na forma acoplada.

Da relação  $\theta = \theta(p)$ , e considerando  $d\theta/dp = C(p)$  ( $C$ : capacidade de mistura específica), a equação de escoamento pode ser expressa apenas em termos de  $p$  na seguinte forma:

$$C(p) \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}[\mathbf{K}(x, p) \nabla(p + x_3)] = f \quad \text{em } \Omega. \quad (1.12)$$

**Observação 1.1.1** Em relação a (1.12) faremos as seguintes considerações:

- Uma relação entre constitutiva entre  $\mathbf{K}$  e  $p$  é dado no caso em que a não linearidade e a heterogeneidade de  $\mathbf{K}(x, p)$  são separáveis, através do modelo de Haverkamp (ver R. Haverkamp e Vachaud (1977), para uma descrição dos parâmetros presentes no modelo):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(x, p) &= \mathbf{K}_s(x) \frac{A}{A + |p|^\gamma}, \\ \theta(p) &= \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha|p|^\beta}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

- Desconsiderando o efeito da gravidade ( $x_3 = 0$ ) e o termo de fonte, da relação constitutiva (1.13) temos uma versão parabólica do modelo (1.8).
- Uma situação específica para a decomposição (1.2) é dada através do modelo real (1.13).

## 1.2 Espaços Funcionais

A seguir iremos definir alguns ingredientes teóricos básicos assim como estabeleceremos as notações que serão de uso contínuo no decorrer da exposição do trabalho.

**Definição 1.2.1** Um conjunto aberto e conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  será denominado **domínio**; se além disso, a fronteira de  $\Omega$  é poligonal,  $\Omega$  será chamado de **domínio poligonal**. O fecho de  $\Omega$  será denotado com  $\bar{\Omega}$ ;  $\partial\Omega$  indicará sua fronteira.

Utilizaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d) \in \mathbb{Z}_+^d \quad \text{representa um multi-índice}$$

Dada uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , denotaremos sua derivada de ordem  $|\mathbf{r}|$  com

$$D^{\mathbf{r}}u = \frac{\partial^{|\mathbf{r}|}u}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_d^{r_d}},$$

onde  $|\mathbf{r}| = \sum_{i=1}^d r_i$ .

Em particular,

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right), \quad |\nabla u| = \left( \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

**Definição 1.2.2** Para cada  $p \in [1, \infty)$ ,  $L^p(\Omega)$  indicará o espaço linear das funções mensuráveis  $u(x)$  em  $\Omega$  tal que a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é finita. Denotaremos com  $L^\infty(\Omega)$  o espaço das funções essencialmente limitadas no conjunto  $\Omega$ .

Sobre  $L^\infty(\Omega)$  define-se a norma

$$\|u\|_{\infty, \Omega} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

onde

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{C; |u| \leq C, \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Sabe-se que os espaços  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , acima definidos, com suas respectivas normas, são espaços de Banach.

Em particular, para  $p = 2$ , o espaço  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Banach com produto interno (espaço de Hilbert), onde o produto interno  $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é dado através da relação

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Neste caso, convencionaremos em denotar a respectiva norma para  $L^2(\Omega)$  com

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

**Definição 1.2.3**  $C^m(\bar{\Omega})$  representa o espaço de Banach das funções  $u$  em  $\bar{\Omega}$  tal que  $u$  e  $D^{\mathbf{r}}u$  com  $|\mathbf{r}| \leq m$  são uniformemente contínuas em  $\bar{\Omega}$  e a norma

$$\|u\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\mathbf{r}| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\mathbf{r}}u(x)|$$

é finita. Para o caso  $m = 0$ , é comum considerar  $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$ .

**Definição 1.2.4**  $C^m(\Omega)$  é a classe de funções  $u$  definidas em  $\Omega$  tal que  $u$  e  $D^{\mathbf{r}}u$ ,  $0 \leq |\mathbf{r}| \leq m$  são contínuas em  $\Omega$ .

**Definição 1.2.5**  $C_0^\infty(\Omega)$  é a classe das funções  $u(x)$  em  $\Omega$  tal que

- i)  $u(x)$  admite derivadas de todas as ordens;
- ii)  $u(x)$  tem suporte compacto; isto é, o suporte ( $\operatorname{supp} u$ ) de  $u$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$ .

Esta classe de funções pode ser caracterizada simbolicamente como segue:

$$u \in C_0^\infty(\Omega) \Leftrightarrow u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ e } \operatorname{supp} u \subset \Omega.$$

O ambiente natural para o estudo dos problemas contínuos são os espaços de Sobolev. Por este motivo, daremos uma breve descrição destes espaços funcionais e, enunciaremos alguns resultados relativos a eles.

**Definição 1.2.6** Suponha que  $u \in L^p(\Omega)$  e que possua derivada fraca  $D^{\mathbf{r}}u$  para cada  $\mathbf{r}$  com  $|\mathbf{r}| \leq m$ , tal que

$$D^{\mathbf{r}}u \in L^p(\Omega), \quad |\mathbf{r}| \leq m.$$

Então diremos que  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ .

O conjunto  $W^{m,p}(\Omega)$  dotado com a norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{0 \leq |\mathbf{r}| \leq m} \|D^{\mathbf{r}}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{0 \leq |\mathbf{r}| \leq m} \|D^{\mathbf{r}}u\|_{\infty,\Omega} \quad \text{para } p = +\infty$$

é um espaço de Banach, denominado espaço de Sobolev.

Pode-se mostrar que: a norma  $\sum_{|\mathbf{r}| \leq m} \|D^{\mathbf{r}}u\|_{L^p(\Omega)}$  é equivalente à norma acima definida.

Para  $p = 2$  é usual a notação  $H^m(\Omega)$  em lugar de  $W^{m,2}(\Omega)$ ; isto é,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

De igual maneira para a respectiva norma, é comum o uso da seguinte notação:

$$\|u\|_{m,2,\Omega} = \|u\|_{m,\Omega}, \quad \text{ou simplesmente } \|u\|_m$$

quando não há lugar a confusão em relação ao domínio de integração. Por outro lado,  $H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert em relação ao produto interno

$$(u, v) = \sum_{|\mathbf{r}| \leq m} \int_{\Omega} D^{\mathbf{r}} u D^{\mathbf{r}} v \, dx.$$

**Definição 1.2.7** O fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  com respeito à norma de  $W^{m,p}(\Omega)$  é denotado por  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

Desta maneira,  $W_0^{m,p}(\Omega)$  resulta ser um subespaço de  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Para  $m = 1$  e  $p = 2$ , adotaremos a notação usual:  $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ .

**Observação 1.2.1** Para a seminorma de  $H^1(\Omega)$ , usa-se a notação

$$|u|_{1,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

**Teorema 1.2.1** (Desigualdade de Poincaré) Se  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{R}^2$ , então para qualquer  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$  tem-se

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq \text{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{0,\Omega}. \quad (1.14)$$

**Demonstração.** Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $H_0^1(\Omega)$ , basta verificar a desigualdade de Poincaré para elementos em  $C_0^\infty(\Omega)$ . Com este fim, consideremos um elemento qualquer  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . A menos de uma translação, pode-se localizar o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  no primeiro quadrante do sistema cartesiano. Desta maneira existe um quadrado  $Q = [0, L] \times [0, L]$ , tal que  $\Omega \subset Q$ .

Como, para cada  $(x, y) \in Q$ ,

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \, dt$$

então, da desigualdade de Cauchy Schwarz, temos

$$|u(x, y)| \leq \left( \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^y dt \right)^{1/2}.$$

Então

$$\begin{aligned} |u(x, y)|^2 &\leq \left( \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right|^2 dt \right) \left( \int_0^y dt \right) \\ &\leq \left( \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right|^2 dt \right) (L). \end{aligned}$$

Integrando em ambos os membros sobre  $Q$

$$\begin{aligned} \int_Q |u(x, y)|^2 dx dy &\leq L \int_Q \left( \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right|^2 dt \right) dx dy \\ &\leq L \int_Q \left( \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dy \right) dx dy \\ &= L \int_0^L \left[ \int_0^L \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dy dx \right] dy \\ &= L \int_0^L \left( \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dy dx \right) dy \\ &= L \int_0^L \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 dy dx \right) dy \\ &\leq L \int_0^L \left( \int_\Omega \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 \right) dy dx \right) dy \\ &= L \int_0^L (\|\nabla u\|_{0,\Omega}) dy \\ &= L^2 \|\nabla u\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Daí segue o resultado. ■

**Observação 1.2.2** Em particular, para  $\Omega$  igual a um triângulo retângulo isósceles ( $K$ ) com catetos de tamanho  $h$  temos o seguinte:

$$\forall v \in H_0^1(K), \quad \|v\|_{0,K} \leq h \|\nabla v\|_{0,K}. \quad (1.15)$$

No presente trabalho, denotaremos com  $Y$  o cubo em  $\mathbb{R}^d$  dado como segue:

$$Y = ]0, 1[ \times \dots \times ]0, 1[.$$

Faremos referência a  $Y$  como a célula unitária.

**Definição 1.2.8** Seja  $Y$  a célula unitária, e seja  $f$  uma função definida quase sempre em  $\mathbb{R}^d$ . Diz-se que  $f$  é  $Y$ -periódica quando

$$f(\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^d, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, d$$

onde  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^d$  representa a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ .

**Definição 1.2.9** Define-se

$$\text{a) } L_{per}^2(Y) = \{\phi \text{ } Y\text{-periódica; } \int_Y |\phi(y)|^2 dy < +\infty\};$$

$$\text{b) } H_{per}^1(Y) = \{\phi \in L_{per}^2(Y); \nabla\phi \in [L_{per}^2(Y)]^d\}.$$

**Definição 1.2.10** O espaço quociente  $W_{per}(Y) = H_{per}^1(Y)/\mathbb{R}$  é definido como o espaço das classes de equivalência respeito da relação

$$u \simeq v \Leftrightarrow u - v \text{ constante}, \forall u, v \in H_{per}^1(Y).$$

Usaremos o símbolo  $\bar{u}$  para denotar a classe de equivalência representada por  $u$ .

### 1.3 Problemas Elípticos Lineares

Nesta seção relembremos resultados relativos a existência, unicidade e regularidade da solução fraca associada ao problema de Dirichlet gerado a partir da equação (1.6) mais condições de contorno homogêneas. A forma fraca correspondente a este problema consiste em determinar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.16)$$



O teorema a seguir será necessário para estabelecer o resultado de existência e unicidade de solução para o problema variacional (1.16).

**Teorema 1.3.1** (Lax-Milgram) Seja  $H$  um espaço de Hilbert com o produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e a norma respectiva  $\|\cdot\|_H = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ .

Seja  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear que satisfaz (i) e (ii):

(i)  $a$  é contínua, isto é, existe uma constante positiva  $M$  tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H;$$

(ii)  $a$  é coerciva, isto é, existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2.$$

Então para qualquer  $L \in H^*$  ( $L$  funcional linear contínuo em  $H$ ) existe um único  $u \in H$  tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração.** A demonstração deste resultado pode ser encontrada em vários textos, ver por exemplo Brenner e Scott (1994). ■

## 1.4 Elementos Finitos

Nesta subsecção lembraremos algumas definições e resultados da teoria de elementos finitos que invocaremos no decorrer do presente trabalho.

**Definição 1.4.1** Um conjunto  $T_h$  é uma triangulação (malha) da região plana com fronteira poligonal  $\Omega$  se seus elementos são triângulos fechados  $K$  tais que

(i)  $\bigcup_{K \in T_h} K = \bar{\Omega}$ ;

(ii) dois elementos quaisquer  $K_1, K_2 \in T_h$  são disjuntos ou têm em comum um lado ou um vértice.

Nesta definição,  $h$  é um número positivo dado como segue

$$h = \max_{K \in T_h} h_K,$$

onde  $h_K$  representa o diâmetro do elemento  $K$ . O número  $h$  será referido como **parâmetro da malha**  $T_h$ .

**Definição 1.4.2** Uma triangulação é denominada **regular** se existe uma constante  $\sigma$  tal que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in T_h$$

e se o parâmetro da malha ( $h$ ) se aproxima de zero, onde  $\rho_K$  é o diâmetro da maior circulo inscrito em  $K$ .

$T_h$  satisfaz a **hipótese da inversa** se existe uma constante  $\nu$  tal que

$$\frac{h}{h_K} \leq \nu \quad \forall K \in T_h.$$

**Definição 1.4.3** Uma malha regular  $T_h$  é dita quase-uniforme se verifica a hipótese da inversa.

Associado à triangulação  $T_h$ , definiremos o seguinte espaço:

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}); v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h\}, \quad (1.17)$$

onde  $P_1(K)$  o espaço dos polinômios de grau no máximo 1 sobre o elemento  $K$ .

Associado ao espaço  $V_h$  temos a seguinte propriedade de aproximação:

**Teorema 1.4.1** Dado  $v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ , tem-se

$$\inf_{\chi \in V_h} \{\|v - \chi\|_{q,\Omega} + h\|v - \chi\|_{1,q,\Omega}\} \leq Ch^{2-2/p+2/q}|v|_{2,p,\Omega},$$

para  $1 \leq p \leq q < \infty$ .

**Demonstração.** Uma demonstração deste resultado clássico de aproximação encontra-se em Ciarlet (1978). ■

**Lema 1.4.2 (Desigualdade Inversa)** Seja  $T_h$  uma triangulação quase-uniforme. Então, para cada  $v \in V_h$  e cada  $K \in T_h$ , existe uma constante  $C > 0$  independente de  $h > 0$  tal que

i)

$$\|v\|_{\infty,K} \leq Ch^{-2/p} \|v\|_{p,K},$$

onde  $p \in [1, \infty]$ .

ii)

$$\|\nabla v\|_{0,K} \leq Ch^{-1} \|v\|_{0,K}.$$

**Demonstração.** Este resultado é uma versão particular da estimativa estabelecida no lema 4.5.3 de Brenner e Scott (1994). ■

# Capítulo 2

## Problema Multiescala Linear

### 2.1 Modelo Linear Multiescala

Seja um material compósito condutor de calor que ocupa uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , onde as heterogeneidades estão distribuídas em forma periódica com período  $\epsilon$ . Para fixar as ideias consideraremos o compósito constituído por duas fases isotrópicas, onde a condutividade de cada fase é especificada através das constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Na célula unitária (célula de referência)  $Y = (0, 1) \times (0, 1)$  é definida a função característica associada à fase 1 e denotada com  $\chi_1$  e, em seguida, estendida periodicamente com período  $Y$ . Assim,

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ está na fase 1} \\ 0, & \text{se } x \text{ está na fase 2} \end{cases}$$

Analogamente é definida  $\chi_2$ . Temos, assim, a descrição da condutividade na célula de referência dada pela função  $Y$ -periódica seccionalmente constante

$$\alpha(x) = \alpha_1\chi_1(x) + \alpha_2\chi_2(x).$$

Reescalando a célula unitária  $Y$  mediante o fator  $\epsilon$ , obtém-se uma família de  $\epsilon$ -periódica de compósitos condutores de duas fases. As regiões ocupadas pelos materiais 1 e 2 serão denotadas com  $\Omega_1^\epsilon$  e  $\Omega_2^\epsilon$  e a respectiva condutividade é dada pela relação  $\alpha_\epsilon(x) = \alpha(\frac{x}{\epsilon})$ . Se denotamos com  $\Gamma^\epsilon$  a fronteira entre as fases, por

construção, a região ocupada pelo compósito tem a seguinte distribuição:

$$\Omega = \Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon \cup \Gamma^\epsilon.$$

Com  $u_\epsilon$  será denotado o campo de temperatura para o compósito  $\epsilon$ -periódico e iremos supor  $u_\epsilon = 0$  sobre a fronteira do domínio compósito  $\Omega$ . Por outro lado, admitiremos que há um contato perfeito entre as fases. Então as hipóteses físicas usuais de continuidade da temperatura  $u$  e da componente normal do fluxo na interface são válidas, isto é

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon^1 = u_\epsilon^2 \quad \text{sobre } \Gamma^\epsilon \\ \mathbf{q}_1^\epsilon \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{q}_2^\epsilon \cdot \mathbf{n}_2 \quad \text{sobre } \Gamma^\epsilon, \end{array} \right.$$

onde  $\mathbf{q}_i = \alpha_i \nabla u_\epsilon^i$ ,  $i=1,2$  é o fluxo e,  $\mathbf{n}_i$  é o vetor normal unitário apontando para fora da fase  $i$ , onde  $i = 1, 2$ . Daí segue que,  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  sobre  $\Gamma^\epsilon$ .

Finalmente estamos em condições de formular o problema e condução de calor na descrição periódica feita para o domínio  $\Omega$  ocupado pelo material compósito.

Dado um termo de fonte  $f \in L^2(\Omega)$ , para cada  $\epsilon$ , a temperatura  $u_\epsilon$  verifica o seguinte problema de contorno

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon] &= f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Temos como resultado um problema de Dirichlet com coeficiente oscilatório descrito através da função  $\alpha_\epsilon(x)$ .

A construção do modelo matemático acima indica que a temperatura  $u_\epsilon$  depende de duas escalas, as quais podem ser descritas pelas variáveis  $x$  e  $y = \frac{x}{\epsilon}$ . A primeira destas, denominada variável "macroscópica" ou variável lenta, e ela determina a posição em  $\Omega$ ; a segunda, denominada variável "microscópica" ou variável rápida,

determina a posição relativa à fase na célula de referência. Desta forma

$$\alpha_\epsilon(x) = \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

No caso de materiais anisotrópicos, o coeficiente  $\alpha_\epsilon$  não é mais um escalar e sim um tensor, denominado **tensor de condutividade**. Neste caso, utiliza-se o símbolo  $\mathbf{A}_\epsilon$  em lugar de  $\alpha_\epsilon$  para indicar o tensor de condutividade. Desta maneira, em geral, o problema acima tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon) &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Cabe destacar que, o problema de Dirichlet (2.2) pode ser, também, associado a outros fenômenos físicos. De fato, o coeficiente  $\mathbf{A}_\epsilon$  pode representar outras características do material. Por exemplo, em eletricidade o potencial elétrico  $u$  satisfaz a mesma equação, onde  $\mathbf{A}_\epsilon$  é a condutividade elétrica e  $f$  representa a distribuição de cargas elétricas.

O problema acima também pode ser apresentado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} ((\mathbf{A}_\epsilon)_{ij}(x) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_j}) &= f(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Observação 2.1.1** Se  $\mathbf{A}_\epsilon(x) = \alpha_\epsilon(x)I$  onde  $I$  representa a matriz identidade e  $\alpha_\epsilon(x)$  é um escalar, (2.2) será denominado **problema modelo linear multi-escala**.

Quando um determinado material é descrito por um tensor de condutividade  $Y$ -periódico  $\mathbf{A}$ , definido sobre  $\mathbb{R}^2$ , onde  $Y$ -periodicidade significa que  $\mathbf{A}_{ij}(y_1) = \mathbf{A}_{ij}(y_2)$  sempre que  $y_1$  e  $y_2$  tenham a mesma posição nas células correspondentes, em particular temos que, numa célula  $Y$ , as funções  $Y$ -periódicas tomam sobre a mesma fronteira valores duplos, mas com normais exteriores opostas  $\mathbf{n}$ .

Assim, para  $f(y)$  e  $\mathbf{A}(y)$  campos escalar e tensorial, respectivamente,  $Y$ -periódicos, com  $\mathbf{A}(y)$  uniformemente definido positivo, isto é, existe um número  $\alpha_0 > 0$ , que independe de  $\epsilon$ , tal que

$$\xi^T \mathbf{A}(y) \xi \geq \alpha_0 \|\xi\|^2, \quad \forall y \in Y, \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

tem-se os resultados a seguir.

**Lema 2.1.1** Para  $f(y)$  e  $\mathbf{A}(y)$  suficientemente diferenciáveis e periódicas,

(i)

$$\int_Y \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy = 0. \quad (2.4)$$

(ii)

$$\int_Y \operatorname{div} \mathbf{A}(y) dy = 0. \quad (2.5)$$

**Demonstração.** A identidade (ii) é resultado do teorema de Gauss para tensores.

■

**Lema 2.1.2** Seja  $f \in L^2(Y)$  uma função  $Y$ -periódica. O problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y\phi] &= f \quad \text{na célula unitária } Y, \\ \phi(y) & \text{ } Y\text{-periódica,} \end{aligned} \quad (2.6)$$

possui uma única solução em  $W_{per}(Y)$  se, e somente se,  $\int_Y f(y)dy = 0$ .

**Demonstração.** Ver Lema 2.3 de Allaire (September 5, 2006) ■

### 2.1.1 Procedimento Formal de Homogeneização: Expansão Assintótica

O fenômeno de difusão linear sobre meios heterogêneos com estrutura periódica tem sido amplamente estudado durante as últimas décadas. Da literatura clássica podemos citar A. Bensoussan e Papanicolaou (1978), Sanchez-Palencia

(1980) e V. V. Jikov e Oleinik (1994), e textos mais recentes Holmes (1995), Horning (1997), Cioranescu e Donato (1999) e Pavliotis e Stuart (2008).

O problema modelo linear (2.2) é associado a uma família de problemas relativa a cada valor de  $\epsilon$ . É de interesse prático averiguar o comportamento assintótico da solução do referido problema. Isto é, determinar o seguinte limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon \quad (\text{em algum sentido}).$$

Esta análise assintótica é dada através da metodologia matemática denominada **teoria de homogeneização**. Supondo que a matriz (tensor)  $\mathbf{A}_\epsilon(x) = \mathbf{A}(y)$ ,  $y = \frac{x}{\epsilon}$ , é  $Y$ -periódica, e uniformemente positiva definida, a referida teoria permite concluir de maneira sistemática (A. Bensoussan e Papanicolaou (1978) ou V. V. Jikov e Oleinik (1994)) que a função limite  $u$  (**solução efetiva**) acima está caracterizado como segue.

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\bar{\mathbf{A}}\nabla u) &= f \quad \text{em } \Omega \quad (\text{equação efetiva}), \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{A}(y)(\mathbf{I} + \nabla_y \boldsymbol{\chi}^T(y)) dy \quad (\text{coeficiente efetivo}), \tag{2.8}$$

e  $(\boldsymbol{\chi} = \sum_{j=1}^2 \chi^j \mathbf{e}_j)$   $\chi^j$  função  $Y$ -periódica tal que

$$-\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y \chi^j] = \operatorname{div}_y(\mathbf{A}\mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2 \quad \text{em } Y \quad (\text{problema de célula}). \tag{2.9}$$

Mediante um **procedimento formal**, é possível chegar à mesma caracterização da solução efetiva. Esta forma de tratamento será a motivação para o estudo de nosso **problema modelo multiescala não linear**. Daí a importância de refazermos todas as contas para o presente caso. Este procedimento formal consiste em admitir que a solução do problema multiescala com estrutura periódica  $u_\epsilon$  pode ser



representada mediante uma expansão assintótica da forma (para uma justificativa, ver A. Bensoussan e Papanicolaou (1978)):

$$u_\epsilon = u_0(x, y) + \epsilon u_1(x, y) + \epsilon^2 u_2(x, y) + \dots, \quad (2.10)$$

onde os  $u_i(x, y)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , são assumidos  $Y$ -periódicos na variável  $y$ , com

$$y = \frac{x}{\epsilon}.$$

Ou, em forma compacta dada como segue:

$$u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon}). \quad (2.11)$$

Adotaremos as seguintes regras de derivação:

$$\nabla(u_i(x, \frac{x}{\epsilon})) = (\epsilon^{-1} \nabla_y u_i + \nabla_x u_i)(x, \frac{x}{\epsilon}), \quad (2.12)$$

$$\nabla u_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \nabla_y u_0(x, \frac{x}{\epsilon}) + \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)(x, \frac{x}{\epsilon}), \quad (2.13)$$

e

$$\operatorname{div}(u_i(x, \frac{x}{\epsilon})) = (\epsilon^{-1} \operatorname{div}_y u_i + \operatorname{div}_x u_i)(x, \frac{x}{\epsilon}). \quad (2.14)$$

Utilizando as regras (2.13) e (2.14) na equação (2.2), tem-se

$$-(\epsilon^{-1} \operatorname{div}_y + \operatorname{div}_x)[\mathbf{A}_\epsilon(x)(\epsilon^{-1} \nabla_y u_0 + \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i))] = f. \quad (2.15)$$

Em seguida, coletando os termos do membro esquerdo de (2.15) e tomando em consideração a ordem crescente das potências do  $\epsilon$ , resulta

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{-2} \operatorname{div}_y(\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0) - \epsilon^{-1} \operatorname{div}_x(\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0) \\ & - \operatorname{div}_y \left\{ \mathbf{A}_\epsilon(x) \left[ \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^{i-1} (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i) \right] \right\} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbf{A}_\epsilon(x) \left[ \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i) \right] \right\} = f, \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^{i-1} (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i) = \epsilon^{-1} (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \epsilon^0 (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \epsilon^{i-1} (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i),$$

e

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i) = \epsilon^0 (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i).$$

Então,

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{-2} \operatorname{div}_y(\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0) - \epsilon^{-1} \operatorname{div}_x(\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0) \\ & - \operatorname{div}_y \{ \mathbf{A}_\epsilon(x) [\epsilon^{-1} (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \epsilon^0 (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \epsilon^{i-1} (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)] \} \\ & - \operatorname{div}_x \{ \mathbf{A}_\epsilon(x) [\epsilon^0 (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)] \} = f. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Coletando os termos da relação (2.16), considerando a ordem crescente das potências do  $\epsilon$ , segue que

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{-2} \operatorname{div}_y(\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0) - \epsilon^{-1} \{ \operatorname{div}_x(\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0) + \operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)] \} \\ & \operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x) (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1)] - \operatorname{div}_x[\mathbf{A}_\epsilon(x) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)] + \dots = f. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Igualando as potências de  $\epsilon$  temos que

$$\operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0] = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)] + \operatorname{div}_x[\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0] = 0,$$

e o termo associado à potência de ordem zero ( $\epsilon^0$ ) deve ser igual  $f$ . Em resumo temos, deconsiderando as expressões relativas às potências de  $\epsilon$  maiores ou iguais a 1, as seguintes equações:

**Equação associada a  $\epsilon^{-2}$**

$$\operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x) \nabla_y u_0] = 0, \quad (2.18)$$

**Equação associada a  $\epsilon^{-1}$**

$$\operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)] + \operatorname{div}_x[\mathbf{A}_\epsilon(x)\nabla_y u_0] = 0, \quad (2.19)$$

**Equação associada a  $\epsilon^0$**

$$-\operatorname{div}_y[\mathbf{A}_\epsilon(x)(\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1)] - \operatorname{div}_x[\mathbf{A}_\epsilon(x)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)] = f. \quad (2.20)$$

Multiplicando a equação (2.18) por sua solução  $u_0$ , integrando por  $Y$ , usando a fórmula de integração por partes, e a hipótese de positividade uniforme (2.3):

$$0 = \int_Y \operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y u_0]u_0 \, dy = \int_Y \mathbf{A}(y)|\nabla_y u_0|^2 \, dy \geq \alpha_0 \int_Y |\nabla_y u_0|^2 \, dy.$$

Esta desigualdade é válida se, e somente se,

$$\nabla_y u_0 = 0.$$

Isto é,  $u_0$  não depende da variável  $y$ . Então consideraremos  $u_0 = u(x)$ .

Em relação a equação (2.19) temos o seguinte: uma vez que  $u$  independe de  $y$  então a equação (2.19) se reduz a

$$-\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y u_1]) = \operatorname{div}_y[(\mathbf{A}(y)\nabla_x u)] \quad \text{em } Y. \quad (2.21)$$

Integraremos o membro direito de (2.21) sobre a célula  $Y$  para verificar se é satisfeita a condição necessária, de acordo com o lema 2.1.2, para existência de solução no problema (2.21):

$$\begin{aligned} \int_Y \operatorname{div}_y[(\mathbf{A}(y)\nabla_x u)] \, dy &= \int_Y (\operatorname{div} \mathbf{A}^T \cdot \nabla_x u) \, dy \quad (\text{Teorema de Gauss para tensores}) \\ &= \nabla_x u \cdot \left( \int_Y \operatorname{div} \mathbf{A} \, dy \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\int_Y \operatorname{div} \mathbf{A} dy = 0$  porque estamos considerando a matriz  $\mathbf{A}$   $Y$ -periódica e simétrica.

Como  $u_1$  é considerada periódica na variável  $y$ , basta resolver a equação (2.21) sobre uma célula periódica e em seguida pode ser estendida periodicamente. Assim, é formulado o problema de encontrar uma solução  $Y$ -periódica  $u_1(x, \cdot)$  de (2.21), onde  $x$  entra como parâmetro e supondo que o membro direito (2.21) é conhecido. Note-se que a hipótese de  $Y$ -periodicidade de  $u_1$  introduz à equação (2.21) uma condição de fronteira. Usando o fato que  $u$  independe de  $y$ , a expressão equivalente para (2.21) será:

$$-\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y u_1] = \operatorname{div}_y \mathbf{A} \cdot \nabla_x u \quad \text{em } Y. \quad (2.22)$$

Observe-se que a equação resultante para  $u_1$  é linear e, além disso, a seguinte identidade é verdadeira:

$$\operatorname{div}_y(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) = \operatorname{div}_y \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (2.23)$$

Isto sugere introduzir, para cada  $j$ , o seguinte problema auxiliar (usualmente denominado **problema de célula**) : achar  $\chi^j$ , função  $Y$ -periódica, tal que

$$-\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y \chi^j] = \operatorname{div}_y(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \quad \text{em } Y. \quad (2.24)$$

Logo  $\boldsymbol{\chi}(y) \cdot \nabla_x u(x)$ , com  $\boldsymbol{\chi} = \sum_{j=1}^{j=2} \chi^j \mathbf{e}_j$ , será uma solução para (2.22). De fato,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\mathbf{A}(y)\nabla_y(\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla_x u)] &= -\operatorname{div}[\mathbf{A}(y)\nabla_y \sum_{j=1}^2 (\chi^j \frac{\partial u}{\partial x_j})] \\ &= \sum_{j=1}^2 [-\operatorname{div}(\mathbf{A}(y)\nabla_y \chi^j)] \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^2 (\operatorname{div}_y(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \frac{\partial u}{\partial x_j}) \quad \text{por (2.24)} \\ &= \operatorname{div}_y \mathbf{A} \cdot \nabla_x u \quad \text{por (2.23)}. \end{aligned}$$

É evidente que uma solução geral para (2.22) é da forma:

$$u_1(x, y) = \boldsymbol{\chi} \cdot \nabla_x u(x) + c(x). \quad (2.25)$$

Além disso, reescrevendo (2.20) como segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y u_2] &= \operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_x u_1] + \operatorname{div}_x[\mathbf{A}(y)\nabla_x u] + \\ &+ \operatorname{div}_x[\mathbf{A}(y)\nabla_y u_1] + f, \end{aligned} \quad (2.26)$$

e mais uma vez usando o Lema 2.1.2, temos que (2.26) possui uma solução  $Y$ -periódica se, e somente se,

$$\int_Y (\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_x u_1] + \operatorname{div}_x[\mathbf{A}(y)\nabla_x u] + \operatorname{div}_x[\mathbf{A}(y)\nabla_y u_1] + f) dy = 0. \quad (2.27)$$

A seguir analisaremos separadamente cada uma das integrais envolvidas na relação (2.27). Para a primeira parcela de (2.27) temos:

$$\begin{aligned} \int_Y \operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_x u_1] dy &= \int_{\partial Y} \mathbf{A}(y)\nabla_x u_1 \cdot \mathbf{n} ds \\ &= 0 \quad (\text{porque o integrando é } Y\text{-periódico}). \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.27) podemos reescrevê-la como

$$- \int_Y \operatorname{div}_x[\mathbf{A}(y)(\nabla_x u + \nabla_y u_1)] dy = \int_Y f(x) dy = |Y|f(x). \quad (2.28)$$

Mas,

$$\nabla_y u_1 = \nabla_y(\boldsymbol{\chi}(y) \cdot \nabla_x u(x)) = (\nabla_y \boldsymbol{\chi}^T(y)) \nabla_x u(x).$$

Portanto, (2.28) será equivalente a

$$- \operatorname{div}_x \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{A}(y)(\mathbf{I} + \nabla_y \boldsymbol{\chi}^T) dy \right\} \nabla_x u = f(x). \quad (2.29)$$

Para completar a demonstração, basta considerar

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{A}(y) (\mathbf{I} + \nabla_y \boldsymbol{\chi}^T(y)) dy. \quad (2.30)$$

### 2.1.2 Formulação Fraca para o Problema de Célula

Para determinar o coeficiente homogeneizado, dado através de (2.30), há necessidade de resolver o problema de célula (2.24). Com este objetivo, iremos introduzir uma formulação fraca para (2.24). Para tal, note-se que, para  $y = \sum_{j=1}^2 y_j \mathbf{e}_j$ ,

$$[\operatorname{div}_y(\mathbf{A}(y)\nabla_y)]y_j = -\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y\chi^j], \quad j = 1, 2. \quad (2.31)$$

De fato,

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}_y(\mathbf{A}(y)\nabla_y)]y_j &= \operatorname{div}_y(\mathbf{A}(y)\nabla_y y_j) \\ &= \operatorname{div}_y(\mathbf{A}(y)\mathbf{e}_j) \\ &= -\operatorname{div}_y[\mathbf{A}(y)\nabla_y\chi^j] \quad \text{por (2.24)}. \end{aligned}$$

Assim, o problema de célula (2.24) pode ser apresentado em forma equivalente como segue:

$$\operatorname{div}_y(\mathbf{A}(y)\nabla_y(\chi^j + y_j)) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.32)$$

Seja a forma  $a_Y : W_{per}(Y) \times W_{per}(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$a_Y(\psi, \phi) = \int_Y a \nabla \psi \cdot \nabla \phi dy, \quad \forall \psi, \phi \in W_{per}(Y).$$

Logo, a forma fraca em  $W_{per}(Y)$  do problema (problema de célula equivalente, para

cada  $j=1,2$ ) (2.32) é dado na seguinte forma: encontrar  $\chi^k \in W_{per}(Y)$  tal que

$$a_Y(\chi^j + y_j, \phi) = 0, \forall \phi \in W_{per}(Y), \quad (2.33)$$

ou, achar  $\chi^j \in W_{per}(Y)$  tal que

$$a_Y(\chi^j, \phi) = a_Y(y_j, \phi) \quad \forall \phi \in W_{per}(Y),$$

onde

$$a_Y(y_j, \phi) = \int_y \mathbf{A}(y) \nabla_y \mathbf{e}_j \cdot \nabla \phi \, dy.$$

A seguir provaremos algumas propriedades associadas ao tensor efetivo.

**Teorema 2.1.3** Se no problema (2.2),  $\mathbf{A}_\epsilon(x)$  um tensor simétrico e positivo definido, então, o respectivo tensor efetivo  $\bar{\mathbf{A}}$  é, também, simétrico e positivo definido.

**Demonstração.** Primeiramente verificaremos a simetria. Para tal, calculemos

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{i,j} &:= \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \left[ \int_Y \mathbf{A}(\mathbf{I} + \nabla \chi^T) dy \right] \mathbf{e}_j \\ &= \int_Y (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \nabla \chi^T \mathbf{e}_j) dy \\ &= \int_Y (\nabla_y y_i \cdot \mathbf{A} \nabla_y y_j + \nabla_y y_i \cdot \mathbf{A} \nabla_y \chi^j) dy, \quad (\nabla \chi^T \mathbf{e}_j = \nabla_y \chi^j) \\ &= \int_Y (\nabla_y y_i \cdot \mathbf{A} (\nabla_y (y_j + \chi^j)) dy) \\ &= a_Y(y_j + \chi^j, y_i). \end{aligned}$$

Então

$$\bar{\mathbf{A}}_{i,j} = a_Y(y_j + \chi^j, y_i). \quad (2.34)$$

Agora, utilizando (2.33) com  $\phi = \chi^i$  resulta

$$a_Y(\chi^j + y_j, \chi^i) = 0.$$

Daí segue que

$$\bar{\mathbf{A}}_{i,j} = \bar{\mathbf{A}}_{i,j} + 0 = a_Y(y_j + \chi^j, y_i) + a_Y(\chi^j + y_j, \chi^i)$$

e, portanto,

$$\bar{\mathbf{A}}_{i,j} = a_Y(\chi^j + y_j, \chi^i + y_i). \quad (2.35)$$

Portanto de (2.35) concluímos que  $\bar{\mathbf{A}}$  é simétrico quando  $\mathbf{A}_\epsilon$  é simétrico.

Resta verificar que  $\bar{\mathbf{A}}$  é definida positiva. Para tal, seja  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$  e seja  $\theta := \boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{\chi} + \mathbf{y})$ .

Então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^T \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\xi} &= \sum_{i,j=1}^2 \xi_i \bar{\mathbf{A}}_{ij} \xi_j \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \xi_i a_Y(\chi^j + y_j, \chi^i + y_i) \xi_j \quad (\text{por (2.35)}) \\ &= a_Y(\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} + \boldsymbol{\chi}), \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} + \boldsymbol{\chi})) \\ &= \int_Y a \nabla \theta \cdot \nabla \theta \, dy \geq \alpha_0 \|\nabla \theta\|_{0,Y}^2 \quad (\text{por (2.3)}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{\xi}^T \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\xi} \geq \alpha_0 \|\nabla \theta\|_{0,Y}^2. \quad (2.36)$$

Assim,  $\boldsymbol{\xi}^T \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\xi} \geq 0$ . Resta mostrar que nesta última inequação a igualdade é válida unicamente quando  $\boldsymbol{\xi} = 0$ . Suponhamos que, para algum  $\boldsymbol{\xi}$ ,

$$\boldsymbol{\xi}^T \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\xi} = 0.$$

Então de (2.36) resulta necessariamente que  $\nabla_y \theta = 0$ , o que implica que  $\theta = C$ (constante); ou de maneira equivalente,

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y} = C - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\chi} \quad (\text{onde } C \text{ é uma constante}).$$



Como o membro direito é  $Y$ -periodico então  $\xi.y$  também deve ser  $Y$ -periódico.  
Mas isto será verdadeiro unicamente no caso em que  $\xi = 0$ . ■

## 2.2 Método Residual Free Bubbles

### 2.2.1 Introdução

Muitos dos fenômenos presentes em ciência e engenharia exibem um comportamento multiescala. Por exemplo, podemos citar: transporte turbulento com alto número de Reynolds, escoamento em meios porosos, difusão de calor em materiais compósitos, etc. A maioria destes fenômenos são descritos por equações com derivadas parciais com coeficientes oscilatórios. Resolver de maneira acurada os correspondentes problemas mediante as metodologias numéricas clássicas exige um alto custo computacional ou é inviável. Então há necessidade de sugerir esquemas numéricos que levem em consideração a informação da microestrutura do problema. Isto é, a influência das escalas menores devem ser incorporadas através da formulação numérica a ser proposta. Uma das metodologias que permite a construção de procedimentos numéricos com estas características é o método **residual free bubble** (RFB). O **método residual-free bubbles** é um técnica de elementos finitos de dois níveis introduzido por Brezzi, Franca e Russo através dos artigos Brezzi e Russo (1994) e Franca e Russo (1996), inicialmente proposto para a procura de soluções numéricas estáveis e acuradas em problemas de difusão-convecção com a parte convectiva dominante. Mais tarde, o método RFB foi utilizado para o tratamento de outros tipos de equações, tais como a equação de difusão linear com coeficientes altamente oscilatórios, como sugerido por Brezzi (2000), e desenvolvido por Sangalli (2003). A seguir faremos uma breve descrição do referido método, tendo como objetivo induzir um procedimento de homogeneização numérica para nosso problema modelo multiescala linear (2.1), de acordo com o artigo de Sangalli (2003).

### 2.2.2 Descrição do Método RFB

Dado um operador diferencial linear  $L$ , definido no espaço  $H_0^1(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , consideremos o seguinte problema de Dirichlet homogêneo :

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.37}$$

A forma variacional associada ao problema (2.37) é dada como segue: achar  $u \in V$  tal que,

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.38}$$

Sob hipóteses convenientes, admitiremos que este problema (2.38) é bem posto no espaço  $H_0^1(\Omega)$ .

Seja  $\mathcal{V} \subset H_0^1(\Omega)$  um subespaço de elementos finitos correspondente a uma partição regular  $T_h$  do domínio computacional  $\Omega$ . Desta maneira podemos definir uma solução numérica para o problema variacional (2.38). Isto é feito restringindo (2.38) ao subespaço  $\mathcal{V}$ . Temos assim o seguinte problema discreto: achar  $u_h \in \mathcal{V}$  tal que

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}. \tag{2.39}$$

Por simplicidade, consideraremos  $\mathcal{V}$  como sendo o espaço de elementos finitos clássico formado por funções contínuas lineares por partes (se cada elemento de  $T_h$  for um triângulo) ou as funções seccionalmente bilineares para o caso de quadriláteros; isto é, seja  $\mathcal{V} = V_h$  (1.17). Então (2.39) é nada menos que o **método clássico de Galerkin** para determinar uma aproximação para a solução fraca do problema contínuo (2.37) dado através de (2.38). Situações em que os coeficientes do operador  $L$  possuem um comportamento altamente variável, tomando uma malha grosseira, o método de Galerkin produz uma solução numérica nada aceitável Rochinha e Madureira (2004). Para melhorar o resultado há necessidade de um refinamento considerável do domínio computacional  $\Omega$ . Isto equivale a considerar o parâmetro  $h$  suficientemente pequeno. Uma maneira de produzir uma solução numérica acu-

rada para o problema (2.38), considerando uma malha grosseira, usa-se antes do enriquecimento do espaço de elemento finitos tradicional  $V_h$ . Isto pode ser feito introduzindo novos graus de liberdade no interior do elemento da partição  $T_h$ . No procedimento a ser descrito na seqüência, os novos graus de liberdade serão definidos elemento a elemento de maneira que possam se eliminados (formalmente) via um procedimento denominado **condensação estática**. Para tal, é considerado um novo subespaço de  $H_0^1(\Omega)$ , e passaremos a denominá-lo subespaço de bolhas, dado como segue:

$$V_b = \{v \in V; v|_K \in H_0^1(K), \forall K \in T_h\}. \quad (2.40)$$

Note que, para cada  $K \in T_h$ ,

$$H_0^1(K) = \{v \in H_0^1(\Omega); \text{supp}(v) \subset K\}.$$

Assim, consideremos o **espaço enriquecido**  $V_r$  definido como a soma direta do espaço das funções seccionalmente lineares e o subespaço de bolhas, definido acima. Isto é,

$$V_r := V_h \oplus V_b. \quad (2.41)$$

Desta maneira temos um novo espaço de elementos finitos, usualmente denominado espaço de elementos finitos residual-free bubble ou, também, espaço de elementos finitos enriquecido com bolhas.

A partir do espaço definido em (2.41), é determinado uma aproximação numérica para (2.38) em  $V_r$  de acordo como segue: achar  $u_r \in V_r$  tal que

$$a(u_r, v_r) = (f, v_r) \quad \forall v_r \in V_r. \quad (2.42)$$

Como  $V_r$  é dado como soma direta dos subespaços  $V_h$  e  $V_b$ , então, tanto  $u_r$  como

$v_r$  podem ser representados de maneira única como segue:

$$\begin{aligned} u_r &= u_h + u_b, & \text{com } u_h \in V_h, u_b \in V_b, \\ v_r &= v_h + v_b, & \text{com } v_h \in V_h, v_b \in V_b. \end{aligned}$$

Para cada  $K \in T_h$ , a restrição de cada  $v_b \in V_b$  ao elemento  $K$  será denotado como

$$v_b|_K = v_{b,K},$$

de tal forma que  $v_{b,K} \in H_0^1(K)$ . Assim, restringindo (2.38) a  $V_h$  e em seguida a  $V_b$  resulta que (2.38) é equivalente ao seguinte sistema: determinar  $u_r = u_h + u_b \in V_r$  tal que:

Problema Global:

$$a(u_h, v_h) + \sum_{K \in T_h} a_K(u_{b,K}, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.43)$$

Problema Local:

$$a_K(u_b, v_{b,K}) = -a_K(u_h, v_{b,K}) + (f, v_{b,K}) \quad \forall v_{b,K} \in H_0^1(K) \text{ e } \forall K \in T_h, \quad (2.44)$$

onde  $a_K(.,.)$  indica que as integrais envolvidas na forma bilinear são calculadas no elemento  $K$ .

Como cada bolha se anula sobre a fronteira de cada elemento da partição, então, é possível o uso do procedimento de **condensação estática**. Este processo é determinado resolvendo o problema (2.44) e em seguida substituindo o resultado em (2.43).

Como (2.44) deve ser válido para cada  $v \in H_0^1(K)$  então  $u_{b,K}$  deve ser uma

solução forte para o problema local

$$\begin{aligned} Lu_{b,K} &= -(Lu_h - f) \quad \text{em } K, \\ u_{b,K} &= 0 \quad \text{sobre } \partial K. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Se, por exemplo,  $a_K(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear contínua e coerciva sobre  $H_0^1(K) \times H_0^1(K)$ , então, para cada  $v_h \in V_h$ , o problema (2.44) possui uma única solução em  $H_0^1(K)$ . Isto permite considerar o operador linear limitado  $L_K^{-1} : H^{-1}(K) \rightarrow H_0^1(K)$  como o operador solução para o problema (2.45).

Daí, podemos reescrever a parte bolha da solução  $u_r$  como segue

$$u_{b,K} = L_K^{-1}(f - Lu_h)|_K \quad \forall K \in T_h \tag{2.46}$$

e, portanto,

$$u_b = \sum_{K \in T_h} L_K^{-1}(f - Lu_h)|_K. \tag{2.47}$$

Assim temos uma expressão “analítica” para  $u_b$  em termos de  $u_h$  dado por (2.47). Então, substituindo (2.47) no problema global (2.43) podemos reformular este problema na seguinte maneira: determinar  $u_h \in V_h$  tal que

$$a(u_h, v_h) + \sum_{K \in T_h} a_K(L_K^{-1}(f - Lu_h)|_K, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.48}$$

A formulação numérica (2.48) é nada menos que o método de Galerkin clássico perturbado. A perturbação tem o compromisso de capturar os efeitos das escalas menores que são ignoradas pela malha computacional quando é utilizado o método usual de Galerkin.

A solução da bolha (2.46) junto com (2.48) determinam o método **residual free bubbles**.

### 2.3 Método RFB Aplicado ao Modelo Linear

A seguir vamos aplicar o **método residual free bubbles** ao problema linear multiescala (2.1), com o intuito de rever cada uma das etapas envolvidas na referida metodologia e, ao mesmo tempo, mostrar como este método sugere um procedimento de homogeneização numérica. Para este fim, antes que nada, retomamos as notações:

- .  $T_h$ : triangulação uniforme do domínio  $\Omega$  com parâmetro de malha  $h$ ;
- . Espaço polinomial

$$V_h = \{v \in V; v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h\};$$

- . O espaço das bolhas

$$V_b = \{v \in V; v|_K \in H_0^1(K), \forall K \in T_h\};$$

- . Espaço enriquecido

$$V_r = V_h \oplus V_b.$$

A forma variacional associada ao **problema modelo linear multiescala** (2.1), definida a seguir, será tomada em consideração para aplicar o método RFB e colocar em evidência que a referida metodologia induz um procedimento de homogeneização numérica.

O problema fraco associado a (2.1) consiste em determinar  $u^\epsilon \in V$  tal que

$$a(u^\epsilon, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \text{ onde} \tag{2.49}$$

$$a(u^\epsilon, v) = \int_{\Omega} \alpha_\epsilon(x) \nabla u^\epsilon \cdot \nabla v \, dx, \quad \text{e} \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Para dar início a metodologia **RFB**, restringiremos a formulação variacional (2.49) ao espaço  $V_r = V_h \oplus V_b$ . Assim temos o seguinte problema: determinar  $u_r = u_h + u_b$

em  $V_r$  tal que  $u_h \in V_h$  e  $u_b \in V_b$ , com

$$a(u_r, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_r, \quad (2.50)$$

onde o termo de fonte  $f$  será considerado constante por partes com respeito à triangulação  $T_h$ . Neste caso, quando haja necessidade de explicitar esta hipótese, utilizaremos a notação a seguir.

### Notação 2.3.1

$$f|_K = f_K \quad (f_K \text{ indica o valor constante de } f \text{ associado ao elemento } K \in T_h.) \quad (2.51)$$

Então, a equação (2.50) é equivalente ao sistema:

$$a(u_h, v_h) + a(u_b, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.52)$$

$$a(u_h, v_b) + a(u_b, v_b) = (f, v_b) \quad \forall v_b \in V_b. \quad (2.53)$$

Seja  $L$  o operador diferencial dado por

$$Lw := -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)\nabla w]. \quad (2.54)$$

Logo, de (2.53), em termos do operador  $L$ , conclui-se que  $u_b$  é solução forte da equação

$$\begin{aligned} Lu_b &= f - Lu_h \text{ em } K \\ &= f_K - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_\epsilon(x) \frac{\partial u_h(x)}{\partial x_j}). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Como  $u_h$  é linear por partes,  $f_K$  é constante e, por definição, o operador  $L$  é linear, a forma do membro direito da equação (2.55) sugere definir, em cada  $K \in T_H$ , os



seguintes problemas auxiliares:

$$\chi^0 \in H_0^1(K), \quad L\chi^0 = 1 \text{ em } K, \quad (2.56)$$

e

$$\chi^j \in H_0^1(K), \quad L\chi^j = -\frac{\partial \alpha_\epsilon(x)}{\partial x_j} \text{ em } K. \quad (2.57)$$

Em função disto, vamos reescrever a relação (2.55) como

$$Lu_b = f_K L\chi^0 - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_h(x)}{\partial x_j} L\chi^j = L[f_K \chi^0 + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_h(x)}{\partial x_j} \chi^j].$$

Logo

$$u_b = f_K \chi^0 + \boldsymbol{\chi} \cdot \nabla u_h, \quad \text{onde } \boldsymbol{\chi} = \sum_{j=1}^2 \chi^j e_j. \quad (2.58)$$

Agora, substituindo (2.58) na segunda parcela de (2.52) e, em seguida, integrando por partes, vemos que

$$a(u_b, v) = \sum_{K \in T_h} f_K \left( \int_K \operatorname{div}[v \alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0] dx - \int_K v \underbrace{\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0]}_{=-1} dx \right) \quad (\text{por 2.56})$$

$$+ \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) (\nabla \boldsymbol{\chi})^T \nabla u_h \cdot \nabla v dx$$

$$= \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} f_K v \alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0 \cdot \mathbf{n} ds + \int_\Omega f v dx \quad (2.59)$$

$$+ \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) (\nabla \boldsymbol{\chi})^T \nabla u_h \cdot \nabla v dx. \quad (2.60)$$

Portanto, substituindo (2.60) em (2.52), temos

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) \nabla u_h \cdot \nabla v dx + \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) (\nabla \boldsymbol{\chi})^T \nabla u_h \cdot \nabla v dx = - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} f_K v \alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0 \cdot \mathbf{n} ds.$$

Ou,

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) (\mathbf{I} + (\nabla \chi)^T) \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} f_K v \alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0 \cdot n \, ds. \quad (2.61)$$

Por um lado, podemos reescrever cada parcela do membro direito de (2.61), a partir da identidade

$$\operatorname{div}[fv(\alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0)]|_K = f_K \nabla v \cdot \alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0 + \underbrace{f_K v \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0]}_{=-1 \text{ por (2.56)}}$$

e do teorema da divergência aplicado sobre cada  $K \in T_h$ , de acordo como segue.

$$- \int_{\partial K} f_K v \alpha_\epsilon(x) \nabla \chi^0 \cdot n \, ds = \int_K f_K v \, dx - \int_K f_K \alpha_\epsilon(x) \nabla v \cdot \nabla \chi^0 \, dx. \quad (2.62)$$

Por outro lado, para o membro direito de (2.61), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) (\mathbf{I} + (\nabla \chi)^T) \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx &= \sum_{K \in T_h} \underbrace{\left[ \frac{1}{|K|} \int_K \alpha_\epsilon(x) (\mathbf{I} + (\nabla \chi)^T) \, dx \right]}_{:\mathcal{A}} (|K| \nabla u_h \cdot \nabla v) \\ &= \sum_{K \in T_h} \int_K \mathcal{A} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx \quad (\text{com } |K| = \int_K dx). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Portanto, considerando (2.62) e (2.63) em (2.61) podemos concluir que

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \mathcal{A} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx - \sum_{K \in T_h} \int_K f_K \alpha_\epsilon(x) \nabla v \cdot \nabla \chi^0 \, dx. \quad (2.64)$$

**Observação 2.3.1** A introdução da metodologia RFB permite estabelecer as seguinte conexões com a homogeneização:

- Considerando  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  periódico, com período  $\epsilon$ , e o parâmetro da malha  $T_h$  ( $h$ ) múltiplo de  $\epsilon$ ,  $\mathcal{A}$  no integrando do membro esquerdo de (2.64) sugere o coeficiente efetivo para o problema modelo linear multiescala (2.1).
- Há uma estreita relação entre  $u_1$  (dado por (2.25)) e  $u_b$  (dado por (2.58)).

### 2.3.0.1 Caso unidimensional

Uma vez que o caso unidimensional permite resolver em forma analítica o problema local, repetiremos o procedimento acima com o intuito de explicitar a matriz de rigidez e exibir numericamente o observado na conclusão acima.

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{du}{dx}] &= 1 \text{ em } I, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.65}$$

onde  $I = (0, 1)$ .

No que vem a seguir admitiremos que o coeficiente  $\alpha_\epsilon(x)$  possui propriedades que garantem a existência e a unicidade de solução para o problema de contorno (2.65). Para este problema, no correspondente espaço enriquecido  $V_r$ , temos a seguinte formulação numérica: encontrar  $u_r = u_h + u_b \in V_r$  tal que

$$a(u_r, v) = (f, v), \forall v \in V_r, \tag{2.66}$$

onde

$$a(w, v) = \int_I \alpha_\epsilon(x) \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} dx.$$

Então a equação (2.66) será equivalente ao seguinte sistema:

$$a(u_h, v_h) + a(u_b, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h, \tag{2.67}$$

$$a(u_b, v_b) + a(u_h, v_b) = (f, v_b), \forall v_b \in V_b. \tag{2.68}$$

Seja  $\{x_j\}_{j=0}^{j=N}$  o conjunto de nós de uma partição uniforme do intervalo  $I$ , onde  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$  representa o  $i$ -ésimo elemento da partição.

**Proposição 2.3.1** A solução de (2.67) em  $V_h$  é dado por  $u_h = \sum_{l=1}^{N-1} U_l \psi_l$ , onde  $\{\psi_j\}_{j=0}^{j=N}$  é a base nodal associada à partição  $\{x_j\}_{j=0}^{j=N}$ , e  $U = (U(1), U(2), \dots, U(N-1))$ .

1))<sup>T</sup> é determinado a partir do sistema linear a seguir.

$$-\frac{U_{i-1}}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)} dx} + \frac{U_i}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)} dx} + \frac{U_i}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)} dx} - \frac{U_{i+1}}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)} dx} = \int_I f v dx - \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \alpha_\epsilon(x) \frac{du_f}{dx} \cdot \frac{d\psi_i}{dx} dx,$$

$$i = 1, \dots, N - 1. \quad (2.69)$$

**Demonstração.** De (2.68) resulta que  $u_b$  é solução forte do problema local

$$u_b|_{I_j} \in H_0^1(I_j) \text{ tal que}$$

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{du_b}{dx}] = 1 + \frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{d\psi_j}{dx}] \quad \text{em } I_j, \quad (2.70)$$

$$u_b(x_{j-1}) = 0 = u_b(x_j).$$

Se  $\{\psi_j\}_{j=0}^{j=N}$  é a base nodal associada à partição  $\{x_j\}_{j=0}^{j=N}$ , então a solução analítica do problema de bolha (2.70) é determinado a partir dos seguintes subproblemas:

$$u_b^{j-1} \in H_0^1(I_j) \text{ tal que}$$

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{du_b^{j-1}}{dx}] = \frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{d\psi_{j-1}}{dx}] \quad \text{em } I_j \quad (2.71)$$

$$u_b^{j-1}(x_{j-1}) = 0 = u_b^{j-1}(x_j),$$

$$u_b^j \in H_0^1(I_j) \text{ tal que}$$

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{du_b^j}{dx}] = \frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{d\psi_j}{dx}] \quad \text{em } I_j \quad (2.72)$$

$$u_b^j(x_{j-1}) = 0 = u_b^j(x_j),$$

e

$$u_f|_{I_j} \in H_0^1(I_j) \text{ tal que}$$

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x) \frac{du_f}{dx}] = 1 \quad \text{em } I_j \quad (2.73)$$

$$u_f(x_{j-1}) = 0 = u_f(x_j).$$

As soluções de (2.71) e (2.72) são, respectivamente,

$$u_b^{j-1} = \psi_j - c \int_{x_{j-1}}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon}$$

e

$$u_b^j = -\psi_j + c \int_{x_{j-1}}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon},$$

onde  $c = \frac{1}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon}}$ .

Daí segue que

$$u_b^j + u_b^{j-1} \equiv 0 \text{ em } I_j. \quad (2.74)$$

Uma vez que  $u_h = \sum_{l=1}^{N-1} U_l \psi_l$  e, portanto,  $u_h|_{I_j} = U_{j-1} \psi_{j-1} + U_j \psi_j$ , obtém-se

$$u_b|_{I_j} = U_{j-1} u_b^{j-1} + U_j u_b^j.$$

A equação (2.67) em termos da base nodal é dada por

$$a\left(\sum_{l=1}^{N-1} U_l \psi_l, \psi_i\right) + \sum_{j=1}^N a_j(u_b, \psi_i) = (f, \psi_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (2.75)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2.76)$$

$$\sum_{l=1}^{N-1} U_l \int_0^1 \alpha_\epsilon \frac{d\psi_l}{dx} \cdot \psi_i + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \alpha_\epsilon \frac{d(U_{j-1} u_b^{j-1} + U_j u_b^j)}{dx} \cdot \frac{d\psi_i}{dx} = \quad (2.77)$$

$$\int_I f v - \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \alpha_\epsilon \frac{d(u_f)}{dx} \cdot \frac{d\psi_i}{dx} \quad \forall i = 1, \dots, N-1. \quad (2.78)$$

Trataremos em forma separada cada uma das parcelas das expressões acima.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{l=1}^{N-1} U_l \int_0^1 \alpha_\epsilon \frac{d\psi_l}{dx} \psi_i' \\ &= U_{i-1} \int_{I_i} \alpha_\epsilon \frac{d\psi_{i-1}}{dx} \psi_i' + U_i \int_{I_i} \alpha_\epsilon \frac{d\psi_i}{dx} \psi_i' + U_{i+1} \int_{I_{i+1}} \alpha_\epsilon \frac{d\psi_{i+1}}{dx} \psi_i' \\ &= -\frac{U_{i-1}}{h^2} \int_{I_i} \alpha_\epsilon + \frac{U_i}{h^2} \int_{I_i} \alpha_\epsilon - \frac{U_{i+1}}{h^2} \int_{I_{i+1}} \alpha_\epsilon. \end{aligned}$$

$$B = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \alpha_\epsilon \frac{d(U_{j-1}u_b^{j-1} + U_j u_b^j)}{dx} \frac{d\psi_i}{dx}.$$

Utilizaremos a relação local (2.74) para reescrever a expressão definida por  $B$ .

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^N (U_j - U_{j-1}) \int_{I_j} \alpha_\epsilon \frac{d(u_b^j)}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \\ &= (U_i - U_{i-1}) \int_{I_i} \alpha_\epsilon \frac{d(u_b^i)}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \\ &+ (U_{i+1} - U_i) \int_{I_{i+1}} \alpha_\epsilon \frac{d(u_b^{i+1})}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} \\ &= (U_i - U_{i-1}) \int_{I_i} \alpha_\epsilon \left( \psi_i' + \frac{1}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} \right) \psi_i' \\ &+ (U_{i+1} - U_i) \int_{I_{i+1}} \alpha_\epsilon \left( \psi_{i+1}' + \frac{1}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} \right) \psi_i'. \end{aligned}$$

Somando  $A$  e  $B$  temos que

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{U_i - U_{i-1}}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} - \frac{U_{i+1} - U_i}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} \\ &= -\frac{U_{i-1}}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} + \frac{U_i}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} + \frac{U_i}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} - \frac{U_{i+1}}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon}}. \end{aligned}$$

Finalmente, a equação (2.67) poderá ser dada como segue.

$$-\frac{U_{i-1}}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} + \frac{U_i}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} + \frac{U_i}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} - \frac{U_{i+1}}{\int_{I_{i+1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon}} = \int_I f v - \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \alpha_\epsilon \frac{d(u_f)}{dx} \cdot \frac{d\psi_i}{dx} \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Temos desta maneira comprovado a validade da relação (2.69). ■

**Observação 2.3.2** Em relação ao resultado estabelecido na proposição 2.3.1, podemos comentar o seguinte:

- Se  $\alpha_\epsilon(x)$  é periódico com período  $\epsilon$  e  $h$  múltiplo de  $\epsilon$ , então

$$\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)} dx = h \int_0^1 \frac{1}{\alpha_\epsilon(y)} dy. \quad (2.79)$$

Basta mostrar a relação acima para o elemento  $I_1 = [0, h]$ . Isto pode ser confirmado mediante o raciocínio logo abaixo.

Para  $y = \frac{x}{\epsilon}$  temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^h \frac{1}{\alpha(\frac{x}{\epsilon})} dx &= \epsilon \int_0^{h/\epsilon} \frac{1}{\alpha(y)} dy \\
&= h \left( \frac{\epsilon}{h} \right) \int_0^{h/\epsilon} \frac{1}{\alpha(y)} dy \\
&= h \left( \frac{1}{k} \int_0^k \frac{1}{\alpha(y)} dy \right), \quad \frac{h}{\epsilon} = k \\
&= h \left[ \frac{1}{k} \left( \int_0^1 \frac{1}{\alpha(y)} dy + \int_1^2 \frac{1}{\alpha(y)} dy + \dots + \int_{k-1}^k \frac{1}{\alpha(y)} dy \right) \right] \\
&= \frac{h}{k} \left( k \int_0^1 \frac{1}{\alpha(y)} dy \right).
\end{aligned}$$

- Sabe-se que, no caso em que o coeficiente  $\alpha_\epsilon(x)$  é periódico, o problema homogeneizado relativo ao problema multiescala (2.65) é:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} \left[ \bar{\alpha} \frac{du}{dx} \right] &= f \quad x \in (0, 1), \\
u(0) &= u(1),
\end{aligned} \tag{2.80}$$

onde  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\alpha(y)} dy}$

- Note-se que, no caso em que  $\alpha_\epsilon(x)$  é periódico, o membro esquerdo de (2.69) coincide com a matriz de rigidez resultante ao introduzir os elementos finitos clássicos de Galerkin ( $V_h$ ) à equação homogeneizada (2.80) correspondente ao problema (2.65).

# Capítulo 3

## Problema Multiescala Não Linear

Continuaremos a utilizar como referência o fenômeno de difusão de calor em materiais compósitos para introduzir nosso problema modelo não linear. Num processo de condução de calor onde há uma forte dependência em relação ao tipo do material condutor, o coeficiente de difusão passa a depender, também, do campo de temperatura. Todavia, se consideramos um material compósito, no coeficiente de difusão estará presente, ao menos, um parâmetro ( $\epsilon$ ) que relaciona as diferentes fases. Neste caso as propriedades térmicas estarão dadas através do tensor de condutividade  $\mathbf{A}^\epsilon = \mathbf{A}^\epsilon(x, u^\epsilon)$ , onde  $u^\epsilon$  representa a distribuição de temperatura. Portanto, o modelo que melhor descreve o fenômeno de condução de calor com condição de Dirichlet homogênea seria o seguinte modelo matemático não linear:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{A}^\epsilon(x, u^\epsilon)\nabla u^\epsilon] = f \quad \text{em } \Omega,$$

$$u^\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

No presente trabalho, como um primeiro projeto, consideraremos  $\mathbf{A}^\epsilon(x, \cdot) = \alpha_\epsilon(x)b(\cdot)\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  representa a matriz identidade, com  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  campos escalares. Esta decomposição para  $\mathbf{A}^\epsilon(x, u^\epsilon)$  é bem razoável fisicamente, como observado em ... O correspondente problema, ao qual nos referiremos como **problema modelo**



**multiescala não linear**, será:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(u^\epsilon)\nabla u^\epsilon] &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para os coeficientes  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  admitiremos as condições a seguir.

**Hipóteses  $H1$ :**

- Para cada  $\epsilon$ ,  $\alpha_\epsilon(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável;
- Existem constantes positivas  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  tais que

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha_\epsilon(x) \leq \alpha_1 \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.2}$$

**Hipóteses  $H2$ :**

- $b(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suficientemente diferenciável e, com a derivada de primeira ordem limitada;
- Existe uma constante positiva  $b_0$  tal que

$$0 < b_0 \leq b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

**Observação 3.0.3** Das hipóteses  $H1$  e  $H2$  resulta que: para cada  $x \in \Omega$ , e todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha_\epsilon(x)b(t)\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \alpha_0 b_0 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{(hipótese de coercividade uniforme)}. \tag{3.4}$$

O problema variacional associado a (3.1) consiste em: achar  $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  de maneira que

$$a(u^\epsilon, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.5}$$

onde

$$a(\psi, \phi) := \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b(\psi) \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dx. \quad (3.6)$$

### 3.1 Problema Contínuo: Existência e Unicidade

Nesta seção faremos uso das idéias apresentadas nos artigos Boccardo e Murat (1982) e Artola e Duvaut (1982), para, mediante pequenas adaptações, rever o problema de Cauchy associado a nosso problema modelo multiescala não linear. Visando formular um resultado de existência de solução fraca para (3.1), resgatamos a seguinte versão do teorema de ponto fixo de Schauder:

**Teorema 3.1.1 (Ponto Fixo de Schauder)** Seja  $E$  um espaço normado,  $A \subset E$  um conjunto convexo não vazio, e  $C \subset A$  compacto. Então cada aplicação contínua  $T : A \rightarrow C$  tem pelo menos um ponto fixo.

**Demonstração.** O enunciado e a citação para uma demonstração deste resultado encontra-se em Díaz e Naulin (2006). ■

A seguir formularemos o seguinte teorema que diz respeito da existência e unicidade de solução para o problema variacional (3.5).

**Teorema 3.1.2** Sejam  $\alpha_{\epsilon}(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Então, para cada  $f \in L^2(\Omega)$ , o problema variacional (3.5) admite uma única solução no espaço  $H_0^1(\Omega)$ .

A demonstração do teorema 3.1.2 será dada mediante o uso dos lemas a seguir.

Com o propósito de formular o resultado de existência de solução fraca para (3.1), a forma (3.6) sugere definir o seguinte operador:

$$T^{\epsilon} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad (3.7)$$

onde, para cada  $w \in L^2(\Omega)$ ,  $T^\epsilon$  associa  $w^\epsilon$  em  $H_0^1(\Omega)$  ( $T^\epsilon(w) := w^\epsilon$ ) através da equação:

$$\int_{\Omega} \alpha_\epsilon(x) b(w) \nabla w^\epsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que o operador  $T^\epsilon$  está bem definido, uma vez que, a partir das hipóteses impostas sobre os coeficientes  $\alpha_\epsilon$  e  $b$ , a forma bilinear dada no membro esquerdo de (3.5) está nas hipóteses do lema de Lax-Milgram 1.3.1.

**Lema 3.1.3** Nas hipóteses do teorema 3.1.2, o operador  $T^\epsilon$  dado por (3.7) é contínuo.

**Demonstração.** De fato, seja  $\{w_m\}$  uma seqüência em  $L^2(\Omega)$  tal que

$$w_m \rightarrow w \text{ na norma de } L^2(\Omega).$$

Consideremos  $T^\epsilon(w_m) := w_m^\epsilon$  e  $T^\epsilon(w) := w^\epsilon$ . Então, respectivamente, tem-se

$$\int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w_m) \nabla w_m^\epsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w) \nabla w^\epsilon \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Subtraindo membro a membro as equações acima, segue que

$$\int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w_m) \nabla w_m^\epsilon \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w) \nabla w^\epsilon \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Daí, somando e subtraindo  $w^\epsilon$ , resulta

$$\int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w_m) \nabla (w_m^\epsilon - w^\epsilon + w^\epsilon) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w) \nabla w^\epsilon \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou de maneira equivalente, reagrupando convenientemente, para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$  temos

$$\int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) b(w_m) \nabla(w_m^\epsilon - w^\epsilon) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \alpha_\epsilon(x) (b(w) - b(w_m)) \nabla w^\epsilon \cdot \nabla v \, dx.$$

Então, em particular, para  $v = w_m^\epsilon - w^\epsilon$  temos:

$$\begin{aligned} \alpha_0 b_0 \|\nabla(w_m^\epsilon - w^\epsilon)\|_{0,\Omega}^2 &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \int_{\Omega} |w - w_m| |\nabla w^\epsilon| |\nabla(w - w_m)| \, dx \\ &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \|(w - w_m) \nabla w^\epsilon\|_{0,\Omega} \|\nabla(w_m^\epsilon - w^\epsilon)\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Logo

$$\|\nabla(w_m^\epsilon - w^\epsilon)\|_{0,\Omega} \leq C \|(w - w_m) \nabla w^\epsilon\|_{0,\Omega}.$$

Portanto, do teorema da convergência dominada de Lebesgue, o membro direito da inequação logo acima converge para 0 quando  $m \rightarrow \infty$ . ■

**Lema 3.1.4** seja  $F$  uma função de classe  $C^1(\mathbb{R})$  tal que  $F(0) = 0$  e  $|F'(t)| \leq L$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^d$ , e seja  $1 \leq p < \infty$ . Então, tem-se o seguinte:

- a) para cada  $v \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $F \circ v \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_i}(F \circ v) = F'(v) \frac{\partial v}{\partial x_i}$ , sempre que  $1 \leq i \leq d$ ;
- b) se  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , então  $F \circ v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Demonstração.** Ver a proposição IX.5 de Brezis (1983). ■

**Lema 3.1.5** Nas hipóteses do teorema 3.1.2, se (3.1) possui uma solução, ela é única.

**Demonstração.** Seja

$$\tilde{b}(t) = \int_0^t b(s) \, ds, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Das hipóteses assumidas para  $b$  temos em particular que  $b \in C(\mathbb{R})$  e, isto é suficiente para concluir que  $\tilde{b} \in C^1(\mathbb{R})$ . Além disso, a derivada de  $\tilde{b}$  é positiva e, portanto,  $\tilde{b}$  resulta ser uma bijeção em  $\mathbb{R}$ . Fazendo  $U^\epsilon := \tilde{b}(u^\epsilon)$ , como  $\tilde{b}$  está nas hipóteses do lema 3.1.4, então

$$\nabla U^\epsilon = b(u^\epsilon) \nabla u^\epsilon$$

e

$$U^\epsilon \in H_0^1(\Omega).$$

Logo o problema (3.1) será equivalente ao problema linear

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left[\alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla U^\epsilon\right] &= f \text{ em } \Omega, \\ U^\epsilon &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

isto é,  $u^\epsilon$  é solução de (3.1) se, e somente se,  $U^\epsilon$  for solução do problema (3.8). Portanto, como a forma bilinear associada ao problema de Dirichlet (3.8) está nas hipóteses do lema de Lax-Milgram, então, (3.1) admite uma única solução. ■

Finalmente, provaremos o teorema 3.1.2.

**Existência.** Se no teorema 3.1 consideramos  $A = E = L^2(\Omega)$ ,  $C = H_0^1(\Omega)$ , e o operador  $T^\epsilon$ , definido em (3.7), então, do lema 3.1.3 podemos concluir que  $T^\epsilon$  possui um ponto fixo. ■

**Unicidade.** Segue diretamente do lema 3.1.5. ■

## 3.2 Homogeneização: Problema Multiescala Não Linear

Solução para um problema que apresenta um comportamento altamente variável quando observado num nível microscópico exige que todas as escalas presentes no problema devem ser resolvidas. Podemos citar como exemplos: a mecânica dos meios de dispersão, filtração, escoamento em meios porosos, condução de calor em materiais compósitos, etc. Devido ao alto custo computacional e à complexidade numérica, o uso do método clássico de elementos finitos considerando uma malha

do tamanho comparável à menor escala presente na estrutura seria inviável. Mas, em muitas aplicações práticas os detalhes da escala fina da solução não são de interesse, e sim uma solução na escala grossa. Portanto, em muitos casos, um modelo aproximado que capture a influência das escalas não resolvidas é suficiente. O método de **homogeneização** é uma das metodologias utilizadas para a obtenção de modelos aproximados.

A seguir, fazendo uso das ideias encontradas Auriaul e Lewandrouwska (1993) e Tokarzewski e Adrianov (2001), retomaremos o procedimento formal utilizado na procura da equação efetiva associada ao problema linear multiescala (2.2), para determinar de forma didática a equação homogeneizada correspondente a nosso problema modelo multiescala não linear (3.1).

De acordo com o teorema 3.1.2, para cada  $\epsilon$  fixado, a solução  $u^\epsilon$  do **problema modelo multiescala não linear**, sob certas hipóteses, existe e é única. Como observado no caso linear, admitiremos que  $u_\epsilon$  é dado na forma

$$u^\epsilon = u(x, y) + \epsilon u_1(x, y) + \epsilon^2 u_2(x, y) + \dots \quad y = \frac{x}{\epsilon} \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.9)$$

onde cada  $u_i(x, y)$  é função das variáveis  $x$  e  $y$ , e  $Y$ -periódica em  $y$  porque vamos supor que  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  é periódica, ou, em forma compacta dada na forma :

$$u^\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon}).$$

A partir disto, continuaremos a adotar as regras de derivação dadas em (2.12)-(2.14).

Por comodidade, usaremos a notação  $u$  em lugar de  $u_0$ . Logo, como temos admitido que  $u^\epsilon = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i$ , consideraremos uma expansão para  $b(u^\epsilon)$  em torno de  $u$ . Temos

assim,

$$\begin{aligned} b(u^\epsilon) &= b(u + \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon^i u_i) \\ &= b(u) + \epsilon b'(u)u_1 + \epsilon^2(b'(u)u_2 + \frac{1}{2}b''(u)u_1^2) + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Teorema 3.2.1** Seja  $\alpha_\epsilon(x)$  limitada uniformemente por baixo por uma constante positiva e  $Y$ -periódica, e seja  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suficientemente diferenciável e limitada inferiormente por uma constante positiva. Então, o problema efetivo correspondente ao **problema modelo multiescala não linear** (3.1) é dado por

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x[b(u)\bar{\mathbf{A}}\nabla_x u] &= f \quad x \in \Omega, \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.11)$$

com

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha(y)(\mathbf{I} + \nabla_y \chi^t) dy, \quad (3.12)$$

e  $(\chi = \sum_{j=1}^2 \chi^j \mathbf{e}_j)$   $\chi^j$  função  $Y$ -periódica tal que

$$\operatorname{div}_y[\alpha(y)\nabla_y \chi^j] = -\frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_j} \quad \text{em } Y, \quad j = 1, 2. \quad (3.13)$$

**Demonstração.** Utilizando as regras (2.13) e (2.14), assim como a identidade (3.10), na equação (3.1), temos

$$\begin{aligned} -(\epsilon^{-1} \operatorname{div}_y + \operatorname{div}_x)\{\alpha_\epsilon(x)[b(u) + \epsilon b'(u)u_1 + \epsilon^2(b'(u)u_2 + \frac{1}{2}b''(u)u_1^2) + \dots][\epsilon^{-1}\nabla_y u + \\ \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i(\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)]\} = f. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Em seguida coletando os termos do membro esquerdo de (3.14) tomando em con-

sideração a ordem crescente das potências de  $\epsilon$ , tem-se

$$\begin{aligned}
& -(\epsilon^{-1} \operatorname{div}_y + \operatorname{div}_x) \{ \alpha_\epsilon(x) [b(u) + \epsilon b'(u)u_1 + \epsilon^2(b'(u)u_2 + \frac{1}{2}b''(u)u_1^2) + \dots] [\epsilon^{-1} \nabla_y u + \\
& \quad \nabla_y u_1 + \nabla_x u + \epsilon(\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)] \} \\
& = -\epsilon^{-2} \operatorname{div}_y (\alpha_\epsilon(x) b(u) \nabla_y u) - \epsilon^{-1} \{ \operatorname{div} [\alpha_\epsilon(x) (b(u) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + b'(u)u_1 \nabla_y u)] + \operatorname{div}_x [\alpha_\epsilon(x) b(u) \nabla_y u] \} - \\
& \epsilon^0 \{ \operatorname{div}_y [\alpha_\epsilon(x) (b(u) (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1) + b'(u)u_1 (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + (b'(u)u_2 + \frac{1}{2}b''(u)u_1^2) \nabla_y u)] \\
& \quad + \operatorname{div}_x [\alpha_\epsilon(x) (b(u) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + b'(u)u_1 \nabla_y u)] \} + \dots
\end{aligned}$$

Note-se que as duas primeiras parcelas da última equação acima são singulares.

Então, necessariamente, devemos ter

$$\operatorname{div}_y [\alpha_\epsilon(x) b(u) \nabla_y u] = 0,$$

e

$$\operatorname{div}_y [\alpha_\epsilon(x) (b(u) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + b'(u)u_1 \nabla_y u)] + \operatorname{div}_x [\alpha_\epsilon(x) b(u) \nabla_y u] = 0,$$

e, portanto, o termo associado à potência  $\epsilon^0$  deve ser igual  $f$ . Em resumo temos, desconsiderando as expressões relativas as potências de  $\epsilon$  maiores ou iguais a 1, as seguintes equações:

**Equação associada a  $\epsilon^{-2}$**

$$\operatorname{div}_y [\alpha_\epsilon(x) b(u) \nabla_y u] = 0. \quad (3.15)$$

**Equação associada a  $\epsilon^{-1}$**

$$\operatorname{div}_y [\alpha_\epsilon(x) (b(u) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + b'(u)u_1 \nabla_y u)] + \operatorname{div}_x [\alpha_\epsilon(x) b(u) \nabla_y u] = 0. \quad (3.16)$$

**Equação associada a  $\epsilon^0$**



$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div}_y\{\alpha_\epsilon(x)[b(u)(\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1) + b'(u)u_1(\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + (b'(u)u_2 + \frac{1}{2}b''(u)u_1^2)\nabla_y u]\} \\
& + \operatorname{div}_x[\alpha_\epsilon(x)(b(u)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + b'(u)u_1\nabla_y u)] = f. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.15) por  $u$ , integrando por  $Y$ , usando a fórmula de integração por partes, e as hipóteses de limitação inferior introduzidas para os coeficientes  $\alpha_\epsilon$  e  $b$ :

$$\begin{aligned}
0 &= - \int_Y \operatorname{div}_y[\alpha(y)b(u)\nabla_y u]u \, dy \\
&= \int_Y \alpha(y)b(u)|\nabla_y u|^2 \, dy \\
&\geq C_0 \int_Y |\nabla_y u|^2 \, dy.
\end{aligned}$$

Então

$$\int_Y |\nabla_y u|^2 \, dy \leq 0.$$

Esta desigualdade é válida se, e somente se,

$$\nabla_y u = 0.$$

Isto é,  $u$  não depende da variável  $y$  e escrevemos  $u = u(x)$ .

Em relação a equação (3.16) temos o seguinte: uma vez verificado que  $u$  independe de  $y$  então a equação (3.16) se reduz a

$$\operatorname{div}_y[\alpha_\epsilon(x)(b(u)\nabla_y u_1)] = -\operatorname{div}_y[(\alpha_\epsilon(x)b(u)\nabla_x u)] \quad \text{em } Y. \quad (3.18)$$

A expressão equivalente para (3.18), utilizando o fato que  $b(u)$  é positivo e independe  $y$ , será:

$$\operatorname{div}_y[\alpha(y)\nabla_y u_1] = -\nabla_y \alpha(y) \cdot \nabla_x u \quad \text{em } Y. \quad (3.19)$$

Como  $u_1$  é considerada periódica na variável  $y$ , basta resolver a equação (3.18) sobre

uma célula periódica e em seguida pode ser estendida periodicamente. Assim é formulado o problema de encontrar uma solução  $Y$ -periódica  $u_1(x, \cdot)$  para (3.18), onde  $x$  entra como parâmetro e é assumido que o membro direito (3.18) é conhecido. Note-se que a hipótese de  $Y$ -periodicidade de  $u_1$  introduz na equação (3.18) uma condição de fronteira.

Observe-se que o problema resultante para  $u_1$  é linear. Isto sugere introduzir, para  $j = 1, 2$ , o seguinte problema auxiliar (usualmente denominado problema de célula):

$$\operatorname{div}_y[\alpha(y)\nabla_y\chi^j] = -\frac{\partial\alpha(y)}{\partial y_j} \quad \text{em } Y. \quad (3.20)$$

A solução  $\chi^j$  em  $W_{per}(Y)$  para o problema variacional correspondente a (3.20) é determinado através do problema: achar  $\chi^j \in W_{per}(Y)$  tal que

$$\int_Y \alpha(y)\nabla_y\chi^j \cdot \nabla v \, dy = \int_Y \frac{\partial\alpha(y)}{\partial y_j} v \, dy \quad \forall v \in W_{per}(Y), j = 1, 2.$$

Então

$$u_1(x, y) = \chi(y) \cdot \nabla_x u(x) + c(x), \quad \text{com } \chi = \sum_{j=1}^2 \chi^j e_j,$$

será a solução fraca do problema (3.19), onde  $c(x)$  é a constante aditiva.

Agora, integrando sobre uma célula em relação a  $y$  ambos os membros da equação (3.17), resulta

$$\begin{aligned} & - \int_Y \{ \operatorname{div}_y \{ \alpha(y) [ b(u) (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1) + b'(u) u_1 (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + (b'(u) u_2 + \frac{1}{2} b''(u) u_1^2) \nabla_y u ] \} \\ & + \operatorname{div}_x [ \alpha(y) ( b(u) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + b'(u) u_1 \nabla_y u ) ] \} \, dy = \int_Y f \, dy. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utilizando a hipótese de periodicidade e tomando e levando em consideração que  $u$  não depende da variável  $y$ , a relação acima (3.21) é reduzida para

$$\int_Y \operatorname{div}_x [ \alpha(y) b(u) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) ] \, dy = f |Y|. \quad (3.22)$$

Como  $u_1(x, y) = \boldsymbol{\chi} \cdot \nabla_x u + c(x)$  então (3.22) pode ser reescrita como segue

$$-\operatorname{div}_x \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha(y) b(u) (\mathbf{I} + \nabla_y \boldsymbol{\chi}^t) dy \nabla_x u \right] = f. \quad (3.23)$$

Fazendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha(y) (\mathbf{I} + \nabla_y \boldsymbol{\chi}^t) dy. \quad (3.24)$$

temos a equação efetiva associada ao problema modelo não linear multiescala (3.1)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x [b(u) \bar{\mathbf{A}} \nabla_x u] &= f \quad x \in \Omega, \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.25)$$

■

**Observação 3.2.1** Note-se que  $\bar{\mathbf{A}}$  é um tensor constante porque  $\boldsymbol{\chi}$  depende unicamente de  $y$ . Por outro lado, de acordo com o resultado estabelecido para o caso linear (teorema 2.1.3),  $\bar{\mathbf{A}}$  é simétrico e positivo definido.

# Capítulo 4

## Formulações Numéricas RFB

Na primeira parte do presente capítulo, fazendo uso da metodologia residual free bubble, iremos induzir formulações de elementos finitos que sejam capazes de incorporar detalhes da escala menor presentes no modelo em estudo, de tal maneira que seja possível tratar o problema de homogeneização numérica decorrente do modelo multiescala não linear (3.1).

Como veremos a seguir, a partir do método *RFB* será possível sugerir, em termos gerais, duas formulações numéricas, que denominaremos **RFB completo** e **RFB reduzido**, respectivamente. Por sua vez, o raciocínio seguido para a obtenção do RFB simplificado permitirá sugerir mais um esquema numérico.

Uma vez definido o procedimento numérico RFB simplificado, o passo seguinte será o estudo de existência de solução para o problema discreto associado à formulação numérica sugerida na etapa prévia. A existência será formulado mediante o teorema 4.3.7.

### 4.1 Formulação RFB Completa

Guiados pelo procedimento seguido no caso linear, e da estrutura do espaço residual free bubbles  $V_r$ , dado que é válida a seguinte decomposição

$$V_r = V_h \oplus V_b,$$

vamos introduzir uma formulação numérica (extensão natural do correspondente caso linear) que permita determinar uma aproximação em  $V_r$  para a solução do problema variacional correspondente ao modelo multiescala não linear (3.1). Com este propósito em mente, restringiremos a formulação variacional (3.5) ao subespaço  $V_r$ . Como resultado temos, em forma explícita, o que passaremos a denominar **RFB completo**:

Achar  $u_r \in V_r$  de maneira que,

$$\sum_{K \in T_h} a_K(u_r, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_r, \quad (4.1)$$

onde

$$a_K(\psi, \phi) = \int_K \alpha_\epsilon(x) b(\psi) \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dx.$$

**Observação 4.1.1** A não ser que seja especificado, no que vem a seguir, não consideraremos a hipótese de periodicidade para o coeficiente  $\alpha_\epsilon(\cdot)$ .

Como consequência da representação dos elementos de  $V_r$ , a formulação (4.1) é equivalente ao seguinte sistema acoplado:

Encontrar  $u_r = u_h + u_b \in V_r = V_h \oplus V_b$ , onde

. **Problema Global Completo:**

$u_h \in V_h$  é tal que

$$\sum_{K \in T_h} a_K(u_h + u_b, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (4.2)$$

e  $u_b \in V_b$  é determinado localmente ao resolver o problema a seguir.

. **Problema Local Completo:**

$$a_K(u_h + u_b, v_b) = (f, v_b) \quad \forall v_b \in H_0^1(K), \forall K \in T_h. \quad (4.3)$$

Desta forma, associado ao problema local (4.3), tem-se

$$\int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \nabla(u_h + u_b) \cdot \nabla v \, dx = \int_K f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(K). \quad (4.4)$$

Então  $u_b|_K$  é solução forte do seguinte problema de contorno local

$$-\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \nabla(u_h + u_b)] = f \quad \text{em } K, \quad (4.5)$$

$$u_b = 0 \quad \text{sobre } \partial K. \quad (4.6)$$

**Observação 4.1.2** Note-se que (4.5), devido ao coeficiente  $b(\cdot)$ , conduz a um problema não linear. Portanto, o procedimento de condensação estática não procede como o correspondente caso linear.

## 4.2 Formulação RFB Reduzida

Motivados pela impossibilidade de aplicar a condensação estática no problema local (4.5), então, para  $u_h$  e  $u_b$  definidos, respectivamente, através dos problemas (4.2) e (4.3), definiremos a seguinte função:

$$\eta(t) := b(u_h + tu_b), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

Logo, para  $b$  suficientemente diferenciável, temos a seguinte fórmula:

$$\eta(1) = \eta(0) + \eta'(0) + \int_0^1 (1-t)\eta''(t) \, dt. \quad (4.8)$$

Como resultado da identidade (4.8) segue a seguinte expansão para o coeficiente  $b$  em torno  $u_h$ :

$$b(u_h + u_b) = b(u_h) + b'(u_h)u_b + \left[ \int_0^1 (1-t)b''(u_h + tu_b) \, dt \right] (u_b)^2. \quad (4.9)$$

Neste ponto do raciocínio faremos uma primeira escolha, consideraremos unicamente a apro-

ximação de ordem zero da expansão (4.9). Assim, o problema local (4.3) pode ser reformulado em termos da parte bolha ( $u_b$ ) através de um problema linear. Isto é,

**Problema Local Reduzido ou Problema Local Linearizado:**

Achar  $u_b \in H_0^1(K)$  tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)\nabla u_b] &= \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)\nabla u_h] + f \text{ em } K, \\ u_b &= 0 \text{ sobre } \partial K. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Desta maneira, agora, podemos reescrever o problema global (4.2) de acordo com o novo problema local (4.10) associado a cada elemento da malha (problema local reduzido) como segue.

Encontrar  $\tilde{u}_h \in V_h$  de maneira que

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h + \tilde{u}_b)\nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla v + \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h + \tilde{u}_b)\nabla \tilde{u}_b \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in V_h, \quad (4.11)$$

onde  $\tilde{u}_b \in H_0^1(K)$  é solução do problema local reduzido sobre o elemento  $K$ :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h)\nabla \tilde{u}_b] &= f + \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h)\nabla \tilde{u}_h] \text{ em } K, \\ \tilde{u}_b &= 0 \text{ sobre } \partial K. \end{aligned} \quad (4.12)$$

**Observação 4.2.1** Em relação a (4.10) e (4.11) podemos comentar o seguinte:

- A aproximação de ordem zero (4.10) é razoável. Esta afirmação é justificada através da relação (4.27) estabelecida mais para frente.
- Da decomposição  $\tilde{u}_b = \bar{u}_b + u_f$ , e da propriedade de linearidade do problema (4.10), o cálculo da bolha  $u_b$  pode ser reduzido à solução dos subproblemas relativos a  $\bar{u}_b$  e  $u_f$ , respectivamente, de acordo como segue.

Achar  $\bar{u}_b \in H_0^1(K)$  tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h)\nabla\bar{u}_b] &= \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h)\nabla\tilde{u}_h] \quad \text{em } K, \\ \bar{u}_b &= 0 \quad \text{sobre } \partial K, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e determinar  $u_f \in H_0^1(K)$  de maneira que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(\tilde{u}_h)\nabla u_f] &= f \quad \text{em } K, \\ u_f &= 0 \quad \text{sobre } \partial K. \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Admitindo a hipótese de coercividade uniforme, o procedimento de condensação estática é possível.

Retomaremos a formulação (4.11) para, a partir de um raciocínio descrito a seguir, colocar em evidência as possibilidades de aproximações numéricas RFB que podemos propor.

Com este objetivo em mente, consideraremos, desta vez, a função  $\tilde{\eta}$  definida a partir de  $\tilde{u}_h$  e  $\tilde{u}_b$  determinados através de (4.11) e (4.12), respectivamente, como

$$\tilde{\eta}(t) := b(\tilde{u}_h + t\tilde{u}_b).$$

Assim, a identidade correspondente a (4.9) será:

$$b(\tilde{u}_h + \tilde{u}_b) = b(\tilde{u}_h) + b'(\tilde{u}_h)\tilde{u}_b + \left[ \int_0^1 (1-t)b''(\tilde{u}_h + t\tilde{u}_b) dt \right] (\tilde{u}_b)^2. \quad (4.15)$$



Introduzindo (4.15) na equação (4.11), temos o seguinte problema: dado  $\tilde{u}_b \in V_b$ , achar  $\tilde{u}_h \in V_h$  tal que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(\tilde{u}_h) \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla v \, dx + \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(\tilde{u}_h) \nabla \tilde{u}_b \cdot \nabla v \, dx + \\ & \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b'(\tilde{u}_h) \tilde{u}_b \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla v \, dx + \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b'(\tilde{u}_h) \tilde{u}_b \nabla \tilde{u}_b \cdot \nabla v \, dx + \\ & \int_\Omega \left\{ \left[ \int_0^1 (1-t) b''(\tilde{u}_h + t \tilde{u}_b) dt \right] (\tilde{u}_b)^2 \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla v \right\} dx + \\ & \int_\Omega \left\{ \left[ \int_0^1 (1-t) b''(\tilde{u}_h + t \tilde{u}_b) dt \right] (\tilde{u}_b)^2 \nabla \tilde{u}_b \cdot \nabla v \right\} dx = \int_\Omega f v \, dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Observação 4.2.2** Note que:

1. A expressão acima deixa claro que temos mais de uma escolha para um modelo de aproximação numérica no ambiente RFB.
2. Se escolhermos como membro esquerdo unicamente a primeira parcela da igualdade acima, a respectiva formulação numérica recai no clássico método de elementos finitos de Galerkin.
3. Outras escolhas podem ser: a primeira mais a segunda; outra, as três primeiras parcelas. Assim por diante.

#### 4.2.1 Formulação RFB Reduzida

Terminamos a presente seção apresentando a **formulação RFB reduzida**. Esta será induzida a partir da relação (4.16), tomando em consideração as duas primeiras parcelas desta relação. A referida formulação de elementos finitos será utilizada para resolver o problema de homogeneização numérica associado a nosso **problema modelo multiescala não linear**.

Determinar  $u_h \in V_h$  tal

$$a_r(u_h, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h \quad (\text{problema global}), \quad (4.17)$$

onde

$$a_r(u_h, v) = \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_h) \nabla u_r \cdot \nabla v \, dx, \quad (4.18)$$

e  $u_r = u_h + u_b + u_f$ , com  $u_b$  e  $u_f$  soluções, respectivamente, do **problemas locais reduzidos**:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h) \nabla u_b] &= \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h) \nabla u_h] \quad \text{em } K, \\ u_b &= 0 \quad \text{sobre } \partial K, \end{aligned} \quad (4.19)$$

e

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h) \nabla u_f] &= f \quad \text{em } K, \\ u_f &= 0 \quad \text{sobre } \partial K. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Agora, utilizando a decomposição  $u_r = u_h + u_b + u_f$ , definiremos as formas

$$a_b(u_h, v) := \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_h) \nabla(u_h + u_b) \cdot \nabla v \, dx \quad (4.21)$$

e

$$a_f(u_h, v) := \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_h) \nabla u_f \cdot \nabla v \, dx. \quad (4.22)$$

Desta forma, podemos redefinir a formulação RFB reduzida como segue.

Achar  $u_h \in V_h$  tal que

$$a_b(u_h, v) = (f, v) - a_f(u_h, v) \quad \forall v \in V_h, \quad (4.23)$$

com  $a_b$  e  $a_f$  dados através dos problemas locais (4.19) e (4.21), respectivamente.

**Observação 4.2.3** Em relação ao esquema numérico apresentado acima, temos os seguintes comentários:

1. Resulta evidente que os problemas globais e locais estão acoplados;
2. O problema global é não linear em relação a  $u_h$ ;
3. Para baratear o método podemos seguir a idéia sugerida no trabalho de Y. E. Efendiev e Ginting (2004), considerando  $b(\int_K u_h(x) dx)$  em lugar de  $b(u_h)$  nos problemas locais reduzidos (4.19), (4.21). Desta forma, por exemplo, (4.19) se reduz a uma equação bem mais simples, porque, por hipótese, o coeficiente  $b$  é não nulo (positivo) e constante em cada elemento. Portanto,

$$-\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)\nabla u_b] = \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)\nabla u_h] \quad \text{em } K. \quad (4.24)$$

Assim, da linearidade da equação, o cálculo da bolha local ( $u_b$ ) é determinado resolvendo os correspondentes problemas associados aos nós do elemento;

4. Seguindo o raciocínio do item 3, uma outra simplificação seria a utilizada no artigo de Chen e Savchuk (2008), onde o coeficiente  $b$  é calculado num ponto interior do respectivo elemento ( $b(u_h(x_K))$ ).
5. Destacaria como fundamental no presente trabalho o raciocínio a seguir. Definindo o operador linear  $\mathcal{L}\phi = \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))\nabla\phi]$ , introduzindo os

problemas auxiliares:

$$\chi^j \in H_0^1(K), j = 1, 2, \mathcal{L}\chi^j = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_\epsilon(x)b(u_h)) \quad (4.25)$$

e

$$\mathcal{L} = 1 \quad \text{em } K, \quad (4.26)$$

e mediante um procedimento semelhante ao elaborado na seção (2.3) (Método RFB Aplicado ao Modelo Linear), a formulação RFB reduzida conduz a uma relação semelhante a (2.61) (determinado no caso linear) desta vez dado por.

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x)b(u_h)(\mathbf{I} + (\nabla \chi)^T) \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx - \sum_{K \in T_h} \int_K f_K \alpha_\epsilon(x)b(u_h) \nabla v \cdot \nabla \chi^0 \, dx. \quad (4.27)$$

Esta relação coloca em evidência, mais uma vez, a relação entre metodologia RFB e o processo de homogeneização.

6. Também, a partir de (4.27) podem ser justificadas as escolhas de Y. E. Efendiev e Ginting (2004) e Chen e Savchuk (2008), mencionadas nos itens acima.

#### 4.2.2 Algoritmo Numérico

Uma proposta de esquema numérico para implementação seria:

- P1) Dado  $u_h = u_{h,n-1} \in V_h$ , determinar  $\bar{u}_{b,n-1} = u_{b,n-1} + u_{f,n-1}$  sobre cada elemento  $K$  resolvendo os respectivos problemas (4.19) e (4.20). Esta parte do algoritmo está bem definido. Caso uma das aproximações sugeridas nos itens 3, 4 da observação acima seja seguida, este passo é executado apenas uma vez.

- P2) Um vez calculado  $\bar{u}_{b,n-1}$ , achar  $u_{h,n} \in V_h$  tal que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_{h,n-1}) \nabla u_{h,n} \cdot \nabla v dx + \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_{h,n-1}) \nabla \bar{u}_{b,n-1} \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in V_h;$$

P3) Voltar ao passo *P1*, com  $u_{h,n}$  calculado no passo *P2*, e determinar o correspondente  $u_{b,n}$ . Continuar o ciclo até verificar o erro de tolerância definido a priori para

$$u_{h,n} - u_{h,n-1}.$$

### 4.3 Formulação RFB Reduzido: Existência

Nesta seção realizaremos o estudo da existência de solução para o esquema numérico RFB reduzido proposto no presente trabalho. Com este intuito, numa primeira etapa, seguindo a estratégia sugerida em Xu (1996), reescreveremos a formulação numérica (4.17) em termos da forma linearizada em torno da solução do problema variacional associada ao problema efetivo correspondente ao **problema modelo multiescala não linear** (3.1).

Seja então  $u$  a solução fraca do problema efetivo. Então

$$\bar{a}(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.28)$$

onde  $\bar{a}(u, v) = \int_\Omega \bar{b}(u) \nabla u \cdot \nabla v dx$ , e  $\bar{b}(\cdot) = b(\cdot) \bar{\mathbf{A}}$ , sendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \alpha(y) (\mathbf{I} + \nabla_y \chi^T) dy,$$

o tensor estabelecido na equação (3.24). Denotaremos com  $A(u; \cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times$

$H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  a forma bilinear relativa à linearização da forma  $\bar{a}(\cdot, \cdot)$  em torno da solução efetiva  $u$ . Então

$$A(u; v, w) = \int_{\Omega} (\bar{b}(u) \nabla v \cdot \nabla w + \bar{b}'(u) v \nabla u \cdot \nabla w) dx. \quad (4.29)$$

Para esta forma bilinear  $A(u; \cdot, \cdot)$  temos a seguinte propriedade, a qual será crucial na procura de estimativas que nos conduzem ao resultado de existência.

**Proposição 4.3.1** Seja  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.3). Para  $u$  suficientemente pequena na norma  $W^{1,\infty}(\Omega)$ , a forma bilinear  $A(u; \cdot, \cdot)$  é coerciva em  $H_0^1(\Omega)$ .

**Demonstração.** De fato, para  $A(u; v, v) = \int_{\Omega} (\bar{b}(u) \nabla v \cdot \nabla v + \bar{b}'(u) v \nabla u \cdot \nabla v) dx$ , com  $b(\cdot)$  inferiormente limitada por uma constante positiva e como tensor  $\bar{\mathbf{A}}$  é um tensor positivo definido, a primeira parcela verifica o seguinte:

$$\int_{\Omega} \bar{b}(u) \nabla v \cdot \nabla v \geq C_0 \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2. \quad (4.30)$$

Por outro lado, uma vez que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\bar{b}'(u) v \nabla u \cdot \nabla v) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |b'(u)| |v| |\bar{\mathbf{A}} \nabla u \cdot \nabla v| dx \\ &\leq \|b'\|_{\infty} \|u\|_{1,\infty,\Omega} \|\bar{\mathbf{A}}\| \int_{\Omega} (|v| |\nabla v|) dx \quad (\|\bar{\mathbf{A}}\|: \text{norma da matriz}) \\ &\leq \|b'\|_{\infty} \|u\|_{1,\infty,\Omega} \|\bar{\mathbf{A}}\| \|v\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \\ &\leq c_{\Omega} \|b'\|_{\infty} \|u\|_{1,\infty,\Omega} \|\bar{\alpha}\| \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \quad (\text{Poincaré}) \\ &\leq C_1 \|u\|_{1,\infty,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2, \quad \text{com } C_1 = c_{\Omega} \|b'\|_{\infty} \|\bar{\alpha}\|, \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega} (\bar{b}'(u) v \nabla u \cdot \nabla v) dx \geq -C_1 \|u\|_{1,\infty,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2. \quad (4.31)$$

Combinando as relações (4.30) e (4.31) resulta

$$A(u; v, v) \geq C_0 \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 - C_1 \|u\|_{1,\infty,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2.$$

Portanto, considerando  $\|u\|_{1,\infty,\Omega}$  suficientemente pequeno (de maneira que:  $C_0 - C_1\|u\|_{1,\infty,\Omega}$  seja positivo) conclui-se que a forma bilinear  $A(u; \cdot, \cdot)$  é coerciva em  $H_0^1(\Omega)$ . ■

A seguir definiremos a projeção de Galerkin relativa à forma bilinear  $A(u; \cdot, \cdot)$ ,  $P_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ , dada por

$$A(u; P_h v, w) = A(u; v, w) \quad \forall w \in V_h. \quad (4.32)$$

Como para  $u$  pequeno  $A(u; \cdot, \cdot)$  é coerciva em  $H_0^1(\Omega)$  então  $P_h$  está bem definida.

**Lema 4.3.2** Nas hipóteses da proposição 4.3.1, seja  $P_h$  a projeção sobre  $V_h$  definida por (4.32). Então

$$\|P_h v - v\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch. \quad (4.33)$$

**Demonstração.** Esta estimativa é uma situação particular de um resultado mais geral que é encontrado no texto de Brenner e Scott (1994). ■

Para a solução numérica  $u_h$ ,  $u$  solução homogeneizada, a forma  $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ , e para cada  $v \in V_h$ , definimos  $\eta_{u_h}(t) := \bar{a}(u + t(u_h - u), v)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Por definição,

$$\eta_{u_h}(t) = \int_{\Omega} \bar{b}(u + t(u_h - u)) \nabla(u + t(u_h - u)) \cdot \nabla v \, dx. \quad (4.34)$$

Então

$$\begin{aligned} \eta'_{u_h}(t) &= \int_{\Omega} (u_h - u) \bar{b}'(u + t(u_h - u)) \nabla(u + t(u_h - u)) \cdot \nabla v \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \bar{b}(u + t(u_h - u)) \nabla(u_h - u) \cdot \nabla v \, dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta''_{u_h}(t) &= \int_{\Omega} (u_h - u)^2 \bar{b}''(u + t(u_h - u)) \nabla(u + t(u_h - u)) \cdot \nabla v \, dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} (u_h - u) \bar{b}'(u + t(u_h - u)) \nabla(u_h - u) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

A partir de uma expansão em torno de  $t = 0$ , tem lugar a seguinte identidade:

$$\eta_{u_h}(1) = \eta_{u_h}(0) + \eta'_{u_h}(0) + \int_0^1 (1-t)\eta''_{u_h}(t) dt, \quad (4.35)$$

onde

$$\eta_{u_h}(1) = \bar{a}(u_h, v), \quad \eta_{u_h}(0) = \bar{a}(u, v) \quad \text{e} \quad \eta'_{u_h}(0) = A(u; u_h - u, v) \quad (\text{de acordo com 4.29}) \quad (4.36)$$

Agora, fazendo

$$\int_0^1 (1-t)\eta''_{u_h}(t) dt := R(u, u_h, v), \quad (4.37)$$

e considerando (4.36) em (4.35), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{a}(u_h, v) &= \bar{a}(u, v) + A(u; u_h - u, v) + R(u, u_h, v) \\ &= (f, v) + A(u; u_h - u, v) + R(u, u_h, v) \\ &= a_r(u_h, v) + A(u; u_h - u, v) + R(u, u_h, v), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $a_r(u_h, v) = a_b(u_h, v) + a_f(u_h, v)$ . Portanto, a solução numérica  $u_h$  (4.23) pode ser caracterizada em termos da forma linearizada  $A(u, \cdot, \cdot)$  como segue.

**Proposição 4.3.3**  $u_h \in V_h$  é solução de (4.23) se, e somente se,

$$A(u; u_h, w) = A(u; u, w) + \bar{a}(u_h, w) - a_b(u_h, w) - a_f(u_h, w) - R(u, u_h, w) \quad \forall w \in V_h. \quad (4.38)$$

Para estabelecer a existência de uma solução  $u_h$  para a formulação numérica (4.23), a identidade (4.38) sugere introduzir o seguinte operador (não linear)

$$\Phi : V_h \rightarrow V_h,$$



onde para cada  $v \in V_h$  temos  $\Phi(v)$  dado por

$$A(u; \Phi(v), w) = A(u; u; w) - E(v, w) - a_f(v, w) - R(u, v, w) \quad \forall w \in V_h, \quad (4.39)$$

onde  $E(\cdot, \cdot) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$E(v, w) = a_b(v, w) - \bar{a}(v, w). \quad (4.40)$$

com  $\bar{a}(\cdot, \cdot)$  definido em (4.28), e  $a_b(\cdot, \cdot)$  como (4.21).

**Observação 4.3.1** Seguindo a ideia de W. E e Zhang (2004), definiremos sobre  $(V_h \cap W^{1,\infty}) \times V_h$  :

$$\bar{E} = \sup_{v \in V_h^* \cap W^{1,\infty}(\Omega), w \in V_h^*} \frac{|E(v, w)|}{\|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}}, \quad V_h^* = V_h \setminus \{0\}. \quad (4.41)$$

Daí segue, em particular, que

$$E(u_h, v) \leq \bar{E} \|u_h\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \quad (4.42)$$

**Proposição 4.3.4** Nas hipóteses da proposição 4.3.1, o operador  $\Phi$  está bem definido.

**Demonstração.** De fato, para cada  $v \in V_h$  e  $\varphi_i$  (elemento da base de  $V_h$ ), admitindo  $\Phi(v) = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$ , o sistema

$$\sum_{i=1}^N C_i A(u; \varphi_i, \varphi_j) = A(u; u; \varphi_j) - E(v, \varphi_j) - a_f(v, \varphi_j) + R(u, v, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

tem solução única porque o membro direito é finito e a matriz  $(A(u; \phi_i, \phi_j))$  é definida positiva porque  $A(u; \cdot, \cdot)$  é coerciva. ■

### 4.3.1 Resultado de Existência para o RFB Reduzido

Note que, de acordo com a proposição 4.3.3, a existência de um ponto fixo para  $\Phi$  equivale à existência de  $u_h$  em (4.23). Sendo assim, de acordo com o teorema

de Brouwer (ver Conway (1985), página 153), basta comprovar que o operador  $\Phi$  dado através de (4.39) tem a propriedade de ser contínuo e invariante. Isto será dado como consequência do teorema 4.3.5 e a proposição 4.3.6 formuladas a seguir.

**Teorema 4.3.5**  $\Phi$  é contínuo sobre

$$B = \{v \in V_h; \|P_h u - v\|_{1,\infty,\Omega} \leq \sqrt{\bar{E}} + \sqrt{h}\}. \quad (4.43)$$

**Observação 4.3.2** A demonstração deste teorema, em razão à identidade (4.39), está associado a uma certa propriedade de continuidade verificada pelas correspondentes parcelas  $E$ ,  $a_f$  e  $R$  da referida identidade. Esse estudo será elaborado no próximo capítulo, em vista das technicalidades que envolvem as demonstrações desta proposição.

**Proposição 4.3.6** Se existe  $h_0 > 0$  tal que para cada  $0 < h < h_0$ ,  $\sqrt{\bar{E}}|\ln h|$  é limitado, então  $\Phi$  é invariante no conjunto  $B$  dado por (4.43).

De igual maneira ao resultado acima, a demonstração desta proposição será postergada para o próximo capítulo.

O resultado a seguir é uma consequência imediata do teorema 4.3.5 e da proposição 4.3.6.

**Teorema 4.3.7** Nas hipóteses da proposição 4.3.1, seja  $P_h$  a projeção definida através da forma bilinear  $A(u; \cdot, \cdot)$  dada por (4.32). Então, se existe  $h_0 > 0$  tal que para cada  $0 < h < h_0$ ,  $\sqrt{\bar{E}}|\ln h|$  é limitado, a formulação numérica (4.23)(RFB reduzido) admite uma solução no conjunto  $B$  acima definido.

# Capítulo 5

## Análise Matemática da Formulação Numérica

Reservamos este capítulo para tratar da demonstração do teorema 4.3.5 e da proposição 4.3.6, ao mesmo tempo que serão introduzidos os pré-requisitos necessários para conduzir tais demonstrações.

Da definição do operador não linear  $\Phi$ , dado através da relação (4.39), a continuidade deste operador sobre o conjunto  $B \subset V_h$  dado por (4.43) está diretamente relacionado a uma certa propriedade de continuidade das aplicações  $R$ ,  $a_f$  e  $E$ , presentes na equação (4.39). Desta forma, como veremos a seguir, a demonstração do teorema 4.3.5 será uma consequência imediata das três primeiras proposições que passamos a formular na sequência, cujas demonstrações serão dadas em forma separada em cada uma das três próximas seções do presente capítulo.

Finalmente, a demonstração da proposição 4.3.6 será dada na última seção do presente capítulo. Alguns preliminares necessários para conduzir esta demonstração foram colocados no apêndice A4.

**Proposição 5.0.8** (Continuidade do  $R$ ) Para cada  $v, w, \varphi \in V_h$ , com  $\|v\|_{1,\infty} \leq M$ , e  $b$  nas hipóteses (3.3), tem-se

$$|R(u; v, \varphi) - R(u; w, \varphi)| \leq C \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega}, \quad (5.1)$$

onde  $u$  é a solução efetiva do problema (3.1).

**Proposição 5.0.9** (Continuidade do  $a_f$ ) Para cada  $v, w \in V_h$ , e cada elemento  $K \in T_h$ , tem-se

$$|a_f(v, \varphi) - a_f(w, \varphi)|_K \leq C \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,K} \quad \forall \varphi \in V_h, \quad (5.2)$$

onde  $a_f(v, \varphi)|_K = \int_K \alpha_\epsilon(x) b(v) \nabla v_f \cdot \nabla \varphi \, dx$  e  $v_f$  é dado através do problema local (5.19), e respectivamente  $a_f(w, \varphi)$ .

A partir de (4.23) e (4.40), por conveniência, definiremos a aplicação numérica

$$\mathbb{E}(\cdot, \cdot) := E(\cdot, \cdot) + a_f(\cdot, \cdot). \quad (5.3)$$

Em seguida, formalizaremos a estimativa associada a esta aplicação ( $\mathbb{E}$ ) mediante a proposição a seguir, que como consequência dará lugar a propriedade de continuidade da aplicação  $E$  como será destacado mediante a relação (5.5) mais abaixo.

**Proposição 5.0.10** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente.

Para  $v, w, \phi \in V_h$  tal que  $\|v\|_{1,\infty,\Omega} + \|w\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$ , e para cada  $K \in T_h$ , tem-se

$$|\mathbb{E}(v, \phi) - \mathbb{E}(w, \phi)|_K \leq C(M) \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + \frac{\epsilon}{h} + 1 \right) (\|v - w\|_{1,K} + (h + \epsilon) \|v - w\|_{0,K}) |\phi|_{1,K}. \quad (5.4)$$

**Observação 5.0.3** No caso em que  $f = 0$ , tem-se o seguinte:

1.  $\mathbb{E} = E$ .
2.  $E(0, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in V_h$ .
3. Continuidade da aplicação  $E(\cdot, \cdot)$ :

$$|E(v, \phi) - E(w, \phi)|_K \leq C(M) \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + \frac{\epsilon}{h} + 1 \right) \|v - w\|_{1,K} |\phi|_{1,K}, \quad K \in T_h. \quad (5.5)$$

**Corolário 5.0.11** Nas hipóteses da proposição 5.0.10, segue que

$$\bar{E} \leq C(M) \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + \frac{\epsilon}{h} + 1 \right). \quad (5.6)$$

**Demonstração.** De fato, dos itens (2) e (3) da observação logo acima resulta

$$|E(v, \phi)|_K \leq C(M) \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + \frac{\epsilon}{h} + 1 \right) \|v\|_{1,K} |\phi|_{1,K}, \quad K \in T_h.$$

Então

$$\frac{E(v, \phi)}{\|v\|_{1,\Omega} |\phi|_{1,\Omega}} \leq C(M) \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + \frac{\epsilon}{h} + 1 \right).$$

Assim, (5.6) segue da definição de  $\bar{E}$  (4.41). ■

Os resultados acima são suficientes para verificar a continuidade do operador  $\Phi$ , enunciada no teorema 4.3.5.

**Demonstração.** (do teorema 4.3.5) Segue imediato das proposições 5.0.8 e 5.0.9, e da estimativa (5.5). ■

## 5.1 Continuidade e Estimativas relativas a $R$

Nesta seção temos como objetivo principal verificar a propriedade de continuidade relativa ao resto  $R$  como anunciada na proposição 5.0.8. Na primeira parte desta seção, determinaremos algumas estimativas relativas a  $R$  que serão invocadas no que vem a seguir do presente trabalho. Em seguida, trataremos da demonstração da proposição 5.0.8.

### 5.1.1 Estimativas para $R$

Antes de dar início a procura de estimativas para o resto  $R$ , introduziremos algumas notações.

- note-se que, para uma constante positiva  $M$ , e para cada  $u, v$  tal que  $\|u\|_{1,\infty,\Omega} + \|v\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$ , usando a desigualdade triangular,  $\theta := u + t(v -$

$u$ ),  $0 \leq t \leq 1$  é limitado por  $3M$ . Isto é,

$$\|\theta\|_{1,\infty,\Omega} \leq 3M.$$

- Dada a função real  $b$  suficientemente diferenciável, sejam

$$b_1 := \max_{|s| \leq 3M} b'(s) \quad \text{e} \quad b_2 := \max_{|s| \leq 3M} b''(s).$$

**Lema 5.1.1** Para cada  $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|u\|_{1,\infty,\Omega} + \|v\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$ , e  $b$  nas hipóteses (3.3), tem-se

$$|R(u, v, w)| \leq C \|u - v\|_{1,4,\Omega}^2 |w|_{1,\Omega} \quad (5.7)$$

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned} |R(u, v, w)| &\leq \int_0^1 (1-t) \left\{ \int_{\Omega} (u-v)^2 |b''(u+t(v-u))| \underbrace{\|\bar{\mathbf{A}}\|}_{=\theta} |\nabla(u+t(v-u))| |\nabla w| dx \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\Omega} |b'(u+t(v-u))| |(u-v)| \|\bar{\mathbf{A}}\| |\nabla(u-v)| |\nabla w| dx \right\} dt \\ &\leq \|\bar{\mathbf{A}}\| b_2 \int_0^1 (1-t) \left\{ \int_{\Omega} (u-v)^2 |\nabla \theta| |\nabla w| dx \right. \\ &\quad \left. + 2 \|\bar{\alpha}\| b_1 \int_{\Omega} |(u-v)| |\nabla(u-v)| |\nabla w| dx \right\} dt \\ &= 3 \|\bar{\mathbf{A}}\| M b_2 \left\{ \int_{\Omega} (u-v)^2 |\nabla w| dx + 2 b_1 \int_{\Omega} |u-v| |\nabla(u-v)| |\nabla w| dx \right\} \left( \int_0^1 (1-t) dt \right), \end{aligned}$$

onde  $\int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\|}{2} \max \{3M b_2, 2b_1\} \left[ \int_{\Omega} (u-v)^2 |\nabla w| dx + \int_{\Omega} |u-v| |\nabla(u-v)| |\nabla w| dx \right] \\ &\leq C \left[ \left( \int_{\Omega} (u-v)^4 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |u-v|^2 |\nabla(u-v)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\ &\leq C (\|u-v\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|(u-v)\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)}) |w|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Desta maneira temos

$$|R(u, v, w)| \leq C(\|u - v\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|(u - v)\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)})|w|_{1,\Omega}. \quad (5.8)$$

Como

$$\|(u - v)\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\int_{\Omega} |u - v|^4\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^4\right)^{1/2}$$

então

$$\begin{aligned} \|(u - v)\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - v\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla(u - v)\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}(\|u - v\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\nabla(u - v)\|_{L^4(\Omega)}^2) \\ &\leq \|u - v\|_{1,4,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Portanto, de (5.8) e (5.9) temos a estimativa (5.7). ■

**Observação 5.1.1** Para cada  $v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ , tem-se a desigualdade

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C\|v\|_{1,\infty,\Omega}. \quad (5.10)$$

**Lema 5.1.2** Seja  $M$  uma constante positiva. Para quaisquer  $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$  tal que  $\|u\|_{1,\infty,\Omega} + \|v\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$  e  $w \in H_0^1(\Omega)$ , tem lugar a estimativa

$$|R(u, v, w)| \leq C\|u - v\|_{1,\infty,\Omega}^2 |w|_{1,\Omega}. \quad (5.11)$$

**Demonstração.** De fato, da estimativa (5.7) estabelecida no lema (5.1.1) temos

$$|R(u, v, w)| \leq C\|u - v\|_{1,4,\Omega}^2 |w|_{1,\Omega}. \quad (5.12)$$

Por outro lado, por interpolação

$$\|u - v\|_{1,4,\Omega}^2 \leq \|u - v\|_{1,\infty,\Omega} \|u - v\|_{1,\Omega}. \quad (5.13)$$

Logo, de (5.13) e (5.12) tem-se

$$|R(u, v, w)| \leq C \|u - v\|_{1, \infty, \Omega} \|u - v\|_{1, \Omega} |w|_{1, \Omega}. \quad (5.14)$$

Conclui-se a validade da estimativa (5.11) a partir da relação (5.10). ■

### 5.1.2 Continuidade de R

Para  $v, w, \varphi \in V_h$ , definamos  $\eta_v$  e  $\eta_w$  como em (4.34) (trocando, por exemplo,  $u_h$  por  $v$ ). Associados a  $v$  e  $w$  temos os respectivos restos  $R(u; v, \cdot)$  e  $R(u; w, \cdot)$ , de acordo com (4.37). Passamos, então, a verificar a propriedade de continuidade para o resto  $R$ .

Demonstração da proposição 5.1:

**Demonstração.** De fato,

$$R(u; v, \varphi) - R(u; w, \varphi) = \int_0^1 (1-t)[\eta_v''(t) - \eta_w''(t)] dt$$

(integrando por partes o membro direito)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (1-t)[\eta_v'(t) - \eta_w'(t)]' dt \\ &= (1-t)[\eta_v'(t) - \eta_w'(t)]_0^1 + \int_0^1 (\eta_v'(t) - \eta_w'(t)) dt \\ &= -(\eta_v'(0) - \eta_w'(0)) + [(\eta_v(1) - \eta_w(1)) - (\eta_v(0) - \eta_w(0))], \end{aligned}$$

onde  $\eta_v(0) - \eta_w(0) = 0$ . Então

$$R(u; v, \varphi) - R(u; w, \varphi) = -(\eta_v'(0) - \eta_w'(0)) + (\eta_v(1) - \eta_w(1)). \quad (5.15)$$



Em primeiro lugar estimaremos a primeira parcela do membro direito de (5.15)

$$\begin{aligned}
|\eta'_v(0) - \eta'_w(0)| &= \left| \left[ \int_{\Omega} (v - u)b'(u)\bar{\mathbf{A}}\nabla u.\nabla\varphi \, dx + \int_{\Omega} \bar{b}(u)\nabla(v - u).\nabla\varphi \, dx \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \int_{\Omega} (w - u)b'(u)\bar{\mathbf{A}}\nabla u.\nabla\varphi \, dx + \int_{\Omega} \bar{b}(u)\nabla(w - u).\nabla\varphi \, dx \right] \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} (v - w)b'(u)\bar{\mathbf{A}}\nabla u.\nabla\varphi \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \bar{b}(u)\nabla(v - w).\nabla\varphi \, dx \right| \\
&\leq \|\bar{\mathbf{A}}\| \|b'\|_{\infty} \|u\|_{1,\infty,\Omega} \int_{\Omega} |v - w| |\nabla\varphi| \, dx + \|\bar{\mathbf{A}}\| \|b\|_{\infty} \int_{\Omega} |v - w| |\nabla\varphi| \, dx \\
&\leq C1 \|v - w\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega} + C2 \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega} \\
&\leq C \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega} \quad (\text{Poincaré}). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\eta_v(1) - \eta_w(1)| &= \left| \int_{\Omega} [b(v)\bar{\mathbf{A}}\nabla v.\nabla\varphi - b(w)\bar{\mathbf{A}}\nabla w.\nabla\varphi] \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} [b(v)\bar{\mathbf{A}}\nabla v.\nabla\varphi - b(w)\bar{\mathbf{A}}\nabla v.\nabla\varphi + b(w)\bar{\mathbf{A}}\nabla v.\nabla\varphi + b(w)\bar{\mathbf{A}}\nabla w.\nabla\varphi] \, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} (b(v) - b(w))\bar{\mathbf{A}}\nabla v.\nabla\varphi \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} b(w)\bar{\mathbf{A}}\nabla(v - w).\nabla\varphi \, dx \right| \\
&\leq \|\bar{\mathbf{A}}\| \|b'\|_{\infty} \|v\|_{1,\infty} \int_{\Omega} |v - w| |\nabla\varphi| \, dx + \|\bar{\mathbf{A}}\| \|b\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla(v - w)| |\nabla\varphi| \, dx \\
&\leq \|\bar{\mathbf{A}}\| \|b'\|_{\infty} \|v\|_{1,\infty} \|v - w\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega} + \|\bar{\mathbf{A}}\| \|b\|_{\infty} \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Poincaré, conclui-se

$$|\eta_v(1) - \eta_w(1)| \leq C(M) \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega}. \tag{5.17}$$

Portanto, (5.1) segue das estimativas (5.16) e (5.17). ■

## 5.2 Continuidade da Aplicação $a_f$

Uma vez comprovada a propriedade de continuidade para o resto  $R$ , faremos um estudo semelhante para  $a_f(.,.) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$a_f(v, w) = \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(v) \nabla v_f \cdot \nabla w, \quad (5.18)$$

com  $v_f \in H_0^1(K)$ ,  $K \in T_h$ , definido através do problema local

$$-\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x) b(v) \nabla v_f] = f \quad \text{em } K. \quad (5.19)$$

### 5.2.1 Estimativas para $a_f(.,.)$

A seguir estabeleceremos algumas estimativas relativas à forma  $a_f(v, w)$ , que faremos referência no presente trabalho.

**Lema 5.2.1** Sejam  $\alpha_\epsilon(.)$  e  $b(.)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente, e seja  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Então, para cada  $(v, w) \in V_h \times V_h$ ,

$$a_f(v, w) \leq Ch \left( \sum_{K \in T_h} \|\nabla w\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}, \quad (5.20)$$

onde  $a_f$  é dado por (5.18).

**Demonstração.** Dado  $v \in V_h$ , seja  $v_f \in H_0^1(K)$  a solução do problema local (5.19). Multiplicando por  $v_f$  ambos os membros da equação do referido problema local e integrando por partes, tem-se

$$\int_K \alpha_\epsilon(x) b(v) |\nabla v_f|^2 dx = \int_K f v_f dx.$$

Logo, da hipótese de coercividade dada por (3.4), e da desigualdade de Cauchy Schwarz no membro direito, segue que

$$\alpha_0 b_0 \|\nabla v_f\|_{0,K}^2 \leq \|f\|_{\infty,\Omega} |K|^{1/2} \|v_f\|_{0,K}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré no membro direito da desigualdade acima, obtém-se

$$\|f\|_{\infty,\Omega} |K|^{1/2} \|v_f\|_{0,K} \leq Ch^2 \|\nabla v_f\|_{0,K}.$$

Então

$$\alpha_0 b_0 \|\nabla v_f\|_{0,K}^2 \leq Ch^2 \|\nabla v_f\|_{0,K} \leq C^2 \lambda h^4 + \frac{1}{4\lambda} \|\nabla v_f\|_{0,K}^2 \quad (\text{para } \lambda \text{ a escolher}).$$

A última desigualdade foi obtida fazendo uso da desigualdade de Young ( $r, s > 0 : rs \leq \lambda r^2 + \frac{s^2}{4\lambda} \quad \forall \lambda > 0$ ).

Logo

$$(\alpha_0 b_0 - \frac{1}{4\lambda}) \|\nabla v_f\|_{0,K}^2 \leq \lambda C^2 h^4.$$

Agora, escolhendo  $\lambda$  de maneira que  $\alpha_0 b_0 - \frac{1}{4\lambda} = 1/2$ , obtém-se

$$\|\nabla v_f\|_{0,K}^2 \leq Ch^4. \tag{5.21}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |a_f(v, w)| &\leq \sum_{K \in T_h} \|\nabla v_f\|_{0,K} \|\nabla w\|_{0,K} \\ &\leq \left( \sum_{K \in T_h} \|\nabla v_f\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in T_h} \|\nabla w\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{K \in T_h} h^4 \right)^{1/2} \left( \sum_{K \in T_h} \|\nabla w\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{onde} \quad \left( \sum_{K \in T_h} h^4 \right)^{1/2} \leq Ch. \end{aligned}$$

Assim chegamos à desigualdade (5.20). ■

**Lema 5.2.2** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Então,

para quaisquer  $v, w \in V_h$ , e  $K \in T_h$ ,

$$\|v_f - w_f\|_{0,K} \leq C \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega}, \quad (5.22)$$

onde  $v_f$  e  $w_f$  são definidas como em (5.19).

**Demonstração.** Subtraindo, membro a membro, as equações associados a  $v, w \in V_h$ , dadas através de (5.19), resulta

$$-\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)(b(v)\nabla v_f - b(w)\nabla w_f)] = 0 \quad \text{em } K.$$

Logo, somando e subtraindo  $b(w)\nabla v_f$  a esta última relação temos

$$-\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(w)\nabla(v_f - w_f)] = \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)(b(v) - b(w))\nabla v_f].$$

Se multiplicamos por  $v_f - w_f$  e integramos sobre  $K$

$$\begin{aligned} \int_K \alpha_\epsilon(x)b(w)|\nabla(v_f - w_f)|^2 dx &= \int_K \alpha_\epsilon(x)(b(v) - b(w))\nabla v_f \cdot \nabla(v_f - w_f) dx \\ &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \int_K |v - w| |\nabla v_f| |\nabla(v_f - w_f)| dx \end{aligned}$$

(agora usando a desigualdade de Hölder generalizada com  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ , )

$$\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \|v - w\|_{0,4,K} \|\nabla v_f\|_{0,4,K} \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K}.$$

Mas  $\|v - w\|_{0,4,K} \leq \|v - w\|_{0,4,\Omega}$ , então

$$\alpha_0 b_0 \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K}^2 \leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \|v - w\|_{0,4,\Omega} \|\nabla v_f\|_{0,4,\Omega} \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K},$$

onde o membro esquerdo é resultado da hipótese de coercividade uniforme (decorrente das hipóteses impostas sobre os coeficientes  $\alpha_\epsilon$  e  $b$ ). Como  $H^1(\Omega)$  está imerso continuamente em  $L^4(\Omega)$  para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (resultado análogo para  $L^4(K)$ ), então

$$\|v - w\|_{0,4,\Omega} \leq \|v - w\|_{1,\Omega} \quad \text{e} \quad \|\nabla v_f\|_{0,4,K} \leq \|\nabla v_f\|_{1,K}. \quad (5.23)$$

Da estimativa local para  $v_f$  estabelecida em (5.21), temos

$$\|\nabla v_f\|_{0,K} \leq Ch^2. \quad (5.24)$$

Por outro lado, do resultado clássico de regularidade elíptica,  $\|v_f\|_{2,K} \leq C\|f\|_{0,K}$ .

Então  $\|\nabla v_f\|_{0,K} + \|\Delta v_f\|_{0,K}$  é limitado. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha_0 b_0 \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K}^2 &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \|v_f\|_\infty \|v - w\|_{0,\Omega} \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K} \\ &\leq C \|v_f\|_\infty \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K} \quad (\text{Poincaré}). \end{aligned}$$

Daí segue o resultado (5.22). ■

### 5.2.2 Continuidade de $a_f$ :

Para verificar a continuidade da forma  $a_f$ , basta estimar  $a_f(v, \varphi) - a_f(w, \varphi)$  sobre cada elemento  $K$  da partição  $T_h$ .

**Demonstração.** ( da proposição 5.0.9). De fato,

$$\begin{aligned} |a_f(v, \varphi) - a_f(w, \varphi)|_K &\leq \int_K \alpha_\epsilon(x) |b(v) - b(w)| |\nabla v_f| |\nabla \varphi| + \int_K \alpha_\epsilon(x) |b(w)| |\nabla(v_f - w_f)| |\nabla \varphi| dx \\ &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \int_K |v - w| |\nabla v_f| |\nabla \varphi| dx + \alpha_1 \|b\|_\infty \int_K |\nabla(v_f - w_f)| |\nabla \varphi| dx \\ &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \|v - w\|_{0,4,K} \|\nabla v_f\|_{0,4,K} \|\nabla \varphi\|_{0,K} \\ &\quad + \alpha_1 \|b\|_\infty \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K} \|\nabla \varphi\|_{0,K} \\ &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \|v - w\|_{0,4,\Omega} \|\nabla v_f\|_{0,4,K} \|\nabla \varphi\|_{0,K} \quad (\|v - w\|_{0,4,K} \leq \|v - w\|_{0,4,\Omega}) \\ &\quad + \alpha_1 \|b\|_\infty \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K} \|\nabla \varphi\|_{0,K} \end{aligned}$$

(das estimativas (5.23) e (5.21) conclui-se que  $\|\nabla v_f\|_{0,4,K}$  é limitado)

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \|v - w\|_{0,\Omega} \|\nabla \varphi\|_{0,K} + C_2 \|\nabla(v_f - w_f)\|_{0,K} \|\nabla \varphi\|_{0,K} \\ &\leq C \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega} \|\nabla \varphi\|_{0,K} \quad (\text{Poincaré} + (5.22)). \end{aligned}$$

Temos, assim, chegado à relação (5.2). ■

### 5.3 Continuidade da Aplicação E

Para tratar da demonstração da proposição 5.0.10, pela quantidade de detalhes técnicos, vimos por conveniente tratá-la com resultados prévios formulados em forma de proposições, e para estabelecer as mesmas introduziremos alguns lemas que em princípio terão uma dependência sequencial.

Em concreto, a demonstração da proposição 5.0.10 será dada através das proposições 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4, que passaremos a enunciá-las. Por sua vez, a demonstração cada uma destas proposições serão dadas em forma separada em cada uma das seguintes partes desta seção.

Seja  $K \in T_h$ ,  $T_h$  triangulação do domínio  $\Omega$ , e para cada  $v \in V_h$ , seja  $v_r = v + v_b$ , com  $v_b \in H_0^1(K)$  tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(v)\nabla v_b] &= \operatorname{div}[\alpha_\epsilon(x)b(v)\nabla v] + f \quad \text{em } K, \\ v_b &= 0 \quad \text{sobre } \partial K. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Para cada  $v \in V_h$ , façamos

$$v_\epsilon := v(x) + \epsilon \chi(y) \cdot \nabla v(x), \quad \text{com } \chi \text{ dado por (3.20) e } y = \frac{x}{\epsilon}. \tag{5.26}$$

A partir daí, seja

$$\hat{v}_\epsilon = v_r - v_\epsilon. \tag{5.27}$$

Para cada  $v, \phi \in V_h$ , e  $K \in T_h$ , do Teorema do Valor Médio para integrais, existe  $x_K \in K$  tal que

$$\frac{1}{|K|} \int_K \bar{a}_v(x) \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx = \bar{a}_v(x_K) \nabla v \cdot \nabla \phi, \quad (5.28)$$

onde

$$\bar{a}_v(x) := b(v(x)) \bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{A}} \text{ é o tensor efetivo definido em (3.24)}. \quad (5.29)$$

Sem perda de generalidade podemos supor que  $K \in T_h$  é representado por o triângulo  $K_1$  descrito no apêndice A1, assim como seu correspondente conjunto  $K_\epsilon$ , também, descrito no mesmo apêndice.

**Proposição 5.3.1** Para  $v, \phi \in V_h$ , tem-se

$$\int_K \bar{a}_v(x_K) \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx = \frac{|K|}{|K_\epsilon|} \int_{K_\epsilon} a(v) \nabla v_\epsilon \cdot \nabla \phi \, dx, \quad (5.30)$$

com  $\bar{a}_v(x)$  através de (5.28).

**Proposição 5.3.2** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Dados  $v, w \in V_h$ , sejam os correspondentes  $v_\epsilon$  e  $w_\epsilon$  definidos através de (5.26). Se  $\|v\|_{1,\infty} + \|w\|_{1,\infty} \leq M$ , e  $I_1 := (a(v) \nabla v_\epsilon - a(w) \nabla w_\epsilon, \nabla \phi)_K$ , então

$$|I_1| \leq C(M) \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] \quad \forall K \in T_h. \quad (5.31)$$

**Proposição 5.3.3** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para cada  $v, w \in V_h$  tal que  $\|v\|_\infty + \|w\|_{1,\infty} \leq M$ , sejam, respectivamente,  $v_\epsilon, w_\epsilon$ , definidos através da relação (5.26). Se  $I_2 := (a(v) \nabla v_\epsilon - a(w) \nabla w_\epsilon, \nabla \phi)_{K \setminus K_\epsilon}$ , então

$$|I_2| \leq C\left(\frac{\epsilon}{h}\right) \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] \|\phi\|_{1,K} \quad \forall K \in T_h. \quad (5.32)$$

**Proposição 5.3.4** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para  $v, w \in V_h$  tal que  $\|v\|_{1,\infty,\Omega} + \|w\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$ , sejam, respectivamente,  $\hat{v}_\epsilon, \hat{w}_\epsilon$ ,

definidos através de (5.27). Se  $I_3 := (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \phi)_K$ , então

$$|I_3| \leq C(M) \left[ \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K} \quad \forall K \in T_h, \quad \forall \phi \in V_h. \quad (5.33)$$

Finalmente estamos com os elementos necessários para demonstrar a estimativa associada à aplicação  $\mathbb{E}(\cdot, \cdot)$  e, portanto, a propriedade de continuidade da aplicação  $E$  dada por (4.40).

**Demonstração.** (proposição 5.0.10:) Para cada  $v, w \in V_h$  e os correspondentes  $v_\epsilon$  e  $w_\epsilon$ , definidos em (5.26), da decomposição  $v_r = v_\epsilon + \hat{v}_\epsilon$  ( $w_r = w_\epsilon + \hat{w}_\epsilon$ ) dada em (5.27), segue que

$$\begin{aligned} [\mathbb{E}(v, \phi)_K - \mathbb{E}(w, \phi)_K] &= [(a(v)\nabla v_r, \nabla\phi)_K - (\bar{a}(v)\nabla v, \nabla\phi)_K] \\ &\quad - [(a(w)\nabla w_r, \nabla\phi)_K - (\bar{a}(w)\nabla w, \nabla\phi)_K] \\ &= (a(v)\nabla v_\epsilon - \bar{a}(v)\nabla v, \nabla\phi)_K - (a(w)\nabla w_\epsilon - \bar{a}(w)\nabla w, \nabla\phi)_K \\ &\quad + (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K \\ &= (a(v)\nabla v_\epsilon, \nabla\phi)_K - (\bar{a}(v)\nabla v, \nabla\phi)_K - (a(w)\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_K + (\bar{a}(w)\nabla w, \nabla\phi)_K \\ &\quad + (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K. \end{aligned}$$

Agora, de acordo com a identidade (5.30),

$$(\bar{a}(v)\nabla v, \nabla\phi)_K = \frac{|K|}{|K_\epsilon|} (a(v)\nabla v_\epsilon, \nabla\phi)_{K_\epsilon} \quad \text{e} \quad (\bar{a}(w)\nabla w, \nabla\phi)_K = \frac{|K|}{|K_\epsilon|} (a(w)\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_{K_\epsilon}.$$



Então

$$\begin{aligned}
[\mathbb{E}(v, \phi) - \mathbb{E}(w, \phi)]_K &= [(a(v)\nabla v_\epsilon, \nabla\phi)_K - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}(a(v)\nabla v_\epsilon, \nabla\phi)_{K_\epsilon}] \\
&\quad - [(a(w)\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_K - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}(a(w)\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_{K_\epsilon}] + (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K \\
&= (a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_K - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}(a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_{K_\epsilon} + (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K \\
&= (a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_K - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}(a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_K + \frac{|K|}{|K_\epsilon|}(a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_K \\
&\quad - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}(a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_{K_\epsilon} + (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K \\
&= (1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}) \underbrace{(a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_K}_{=I_1} + \frac{|K|}{|K_\epsilon|} \underbrace{(a(v)\nabla v_\epsilon - a(w)\nabla w_\epsilon)_{K \setminus K_\epsilon}}_{=I_2} \\
&\quad + \underbrace{(a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K}_{=I_3} \\
&\leq |1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}| |I_1| + \frac{|K|}{|K_\epsilon|} |I_2| + |I_3|.
\end{aligned}$$

Assim, das estimativas obtidas para  $|I_1|$ ,  $|I_2|$  e  $|I_3|$ , nas proposições 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}
|[\mathbb{E}(v, \phi) - \mathbb{E}(w, \phi)]_K| &\leq C(M) |1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}| [(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K}] |\phi|_{1,K} + \\
&\quad C \frac{|K|}{|K_\epsilon|} (\frac{\epsilon}{h}) [(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K}] |\phi|_{1,K} + \\
&\quad C(M) [\sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K}] |\phi|_{1,K}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que

$$\frac{|K|}{|K_\epsilon|} \leq 3 \quad \text{e} \quad |1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}| \leq C(\frac{\epsilon}{h}) \quad (\text{por (A.5) e (A.9), respectivamente}).$$

Como consequência,

$$|[\mathbb{E}(v, \phi) - \mathbb{E}(w, \phi)]_K| \leq C(M) [\sqrt{\frac{\epsilon}{h}} (\sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + \frac{\epsilon}{h} + 1) \|v - w\|_{1,K} + (h + \epsilon) \|v - w\|_{0,K}] |\phi|_{1,K}.$$

Portanto, chegamos à relação (5.4). ■

### 5.3.1 Demonstração da Proposição 5.3.1

**Demonstração.** Dado  $v \in V_h$ , seja o correspondente  $v_\epsilon$  dado por (5.26).

Então

$$\nabla v_\epsilon = \nabla v + (\nabla \chi_y)^t \nabla v. \quad (5.34)$$

Assim, para chegar ao resultado esperado, basta calcular

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K_\epsilon|} \int_{K_\epsilon} b(v(x_K)) \alpha_\epsilon(x) \nabla v_\epsilon \cdot \nabla \phi \, dx &= \frac{1}{|K_\epsilon|} b(v(x_K)) \int_{K_\epsilon} \alpha_\epsilon(x) [\nabla v + (\chi_y)^t \nabla v] \cdot \nabla \phi \, dx \quad (\text{por (5.34)}) \\ &= b(v(x_K)) \left\{ \frac{1}{|K_\epsilon|} \int_{K_\epsilon} \alpha_\epsilon(x) [I + (\chi_y)^t] \, dx \right\} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx \\ &= b(v(x_K)) \bar{\mathbf{A}} \nabla v \cdot \nabla \phi \quad (\text{de (3.24)}). \end{aligned}$$

Portanto, (5.30) conclui-se a partir de (5.28). ■

### 5.3.2 Demonstração da Proposição 5.3.2

**Lema 5.3.5** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para cada  $v \in V_h$ , e cada  $K \in T_h$ , seja  $v_r = v + v_b$  dado através do problema local (5.25). Se  $f$  é limitado, então

$$|v_r|_{1,K} \leq C(|v|_{1,K} + h^2). \quad (5.35)$$

**Demonstração.** Da equação (5.25) temos

$$\begin{aligned} (\alpha_\epsilon b(v) \nabla v_r, \nabla \varphi) &= (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(K), \\ v_r &= v \quad \text{sobre } \partial K. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Logo, tomando em particular  $\varphi = v_r - v = v_b \in H_0^1(K)$ , resulta

$$(\alpha_\epsilon b(v) \nabla v_r, \nabla v_r) = (\alpha_\epsilon b(v) \nabla v_r, \nabla v) + (f, v_b).$$

Assim, da hipótese de coercividade uniforme, no membro esquerdo, e da desigualdade de Schwarz, no membro direito, obtém-se

$$\begin{aligned}
\alpha_0 b_0 |v_r|_{1,K}^2 &\leq \alpha_1 |v_r|_{1,K} |v|_{1,K} + \|f\|_{0,K} \|v_b\|_{0,K} \\
&\leq \alpha_1 |v_r|_{1,K} |v|_{1,K} + C_1 h \|f\|_{0,K} |v_b|_{1,K} \quad (\text{desigualdade de Poincaré}) \\
&\leq \alpha_1 |v_r|_{1,K} |v|_{1,K} + C_1 h^2 |v_b|_{1,K} \quad (\text{porque } \|f\|_{0,K} \leq C \|f\|_{\infty} h) \\
&\leq \lambda |v_r|_{1,K}^2 + (\alpha_1^2 / (4\lambda)) |v|_{1,K}^2 + C_1 h^2 |v_b|_{1,K}.
\end{aligned}$$

Então  $(\alpha_0 b_0 - \lambda) |v_r|_{1,K}^2 \leq (\alpha_1^2 / (4\lambda)) |v|_{1,K}^2 + C_1 h^2 |v_b|_{1,K}$ . Agora, para  $\lambda = (1/2)\alpha_0 b_0$  podemos concluir que

$$|v_r|_{1,K}^2 \leq C_2 (|v|_{1,K}^2 + h^2 |v_b|_{1,K}). \quad (5.37)$$

Por outro lado, multiplicando (5.25) por  $v_b \in H_0^1(K)$  e integrando por partes, temos a seguinte identidade:

$$(\alpha_\epsilon b(v) \nabla v_b, \nabla v_b) = -(\alpha_\epsilon b(v) \nabla v, \nabla v_b) + (f, v_b).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 b_0 |v_b|_{1,K}^2 &\leq \alpha_1 |v|_{1,K} |v_b|_{1,K} + \|f\|_{0,K} \|v_b\|_{0,K} \\
&\leq \alpha_1 |v|_{1,K} |v_b|_{1,K} + C_1 h^2 |v_b|_{1,K} \quad (\text{Poincaré e } f \text{ limitado}).
\end{aligned}$$

Logo

$$|v_b|_{1,K} \leq C_3 (|v|_{1,K} + h^2). \quad (5.38)$$

Substituindo (5.38) em (5.37),

$$\begin{aligned}
|v_r|_{1,K}^2 &\leq C_2(|v|_{1,K}^2 + C_3 h^2(|v|_{1,K} + h^2)) \\
&\leq C_4(|v|_{1,K}^2 + \underbrace{h^2|v|_{1,K}}_{\leq \frac{|v|_{1,K}^2}{2} + \frac{h^4}{2}} + h^4) \\
&\leq C_4(|v|_{1,K}^2 + \frac{|v|_{1,K}^2}{2} + \frac{h^4}{2} + h^4) \\
&\leq C_5(|v|_{1,K}^2 + h^4).
\end{aligned}$$

Portanto, tirando a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade logo acima, tem-se a relação (5.35).

$$|v_r|_{1,K} \leq C(|v|_{1,K} + h^2).$$

Desta maneira temos verificado a relação (5.35). ■

**Lema 5.3.6** Associada à triangulação  $T_h$  de  $\Omega$ , seja  $V_r$  o espaço enriquecido (definido em (2.41)). Então, para cada  $v_r = v + v_b \in V_r$  é válida a seguinte desigualdade:

$$|v|_{1,K} \leq |v_r|_{1,K}. \quad (5.39)$$

**Demonstração.** Seja  $v_r$  um elemento qualquer do espaço  $V_r$ . Como  $\text{div}[(v_r - v)\nabla v] = \nabla(v_r - v) \cdot \nabla v$ , pois  $\nabla v|_K$  é constante, então, integrando ambos os membros sobre  $K \in T_h$  esta igualdade, resulta

$$(\nabla(v_r - v), \nabla v)_K = 0$$

ou

$$(\nabla v_r, \nabla v)_K = (\nabla v, \nabla v)_K. \quad (5.40)$$

Em função disto,

$$\begin{aligned}
(\nabla(v_r - v), \nabla(v_r - v))_K &= (\nabla v_r, \nabla v_r)_K - 2(\nabla v_r, \nabla v)_K + (\nabla v, \nabla v)_K \\
&= (v_r, v_r)_K - 2(v, v)_K + (v, v)_K \quad (5.40) \\
&= (v_r, v_r)_K - (v, v)_K.
\end{aligned}$$

Logo  $(\nabla v_r, \nabla v_r)_K = (\nabla v, \nabla v)_K + (\nabla(v_r - v), \nabla(v_r - v))_K$  e, portanto,

$$(\nabla v_r, \nabla v_r)_K \geq (\nabla v, \nabla v)_K.$$

Daí temos (5.39). ■

**Observação 5.3.1** Em particular, para  $u_r = v_r - w_r$  tem-se

$$|v - w|_{1,K} \leq |v_r - w_r|_{1,K}. \quad (5.41)$$

Por comodidade iremos convencionar o uso da seguinte notação simplificadora:

$$a(v) := \alpha_\epsilon(x)b(v). \quad (5.42)$$

**Lema 5.3.7** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para  $v, w \in V_h$ , tem-se

$$|v_r - w_r|_{1,K} \leq C(\|v - w\|_{\infty,K}(|v|_{1,K} + |w|_{1,K} + h^2) + |v - w|_{1,K}) \quad \forall K \in T_h. \quad (5.43)$$

**Demonstração.** Da hipótese de coercividade uniforme temos que,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 b_0 |v_r - w_r|_{1,K}^2 &\leq (a(v) \nabla(v_r - w_r), \nabla(v_r - w_r)) \\
&= (a(v) \nabla v_r, \nabla(v_r - w_r)) - (a(v) \nabla w_r, \nabla(v_r - w_r)) \\
&= (a(v) \nabla v_r, \nabla(v_r - w_r)) - ([a(v) - a(w) + a(w)] \nabla w_r, \nabla(v_r - w_r)) \\
&= (a(v) \nabla v_r, \nabla(v_r - w_r)) - (a(w) \nabla w_r, \nabla(v_r - w_r)) - ((a(w) - a(v)) \nabla w_r, \nabla(v_r - w_r))
\end{aligned}$$

Denominaremos cada uma das parcelas do membro direito da desigualdade logo acima com o  $E_i, i = 1, 2, 3$ , e em seguida, agrupando convenientemente, iremos determinar uma limitação superior para elas. Antes, porém, vamos reescrever a expressão correspondente para  $E_1$  de acordo com o raciocínio a seguir,

$$\begin{aligned}
E_1 &= (a(v) \nabla v_r, \nabla(v_r - w_r)) \\
&= (a(v) \nabla(v_r - w_r), \nabla v_r) \\
&= (a(v) \nabla v_r, \nabla v_r) - (a(v) \nabla w_r, \nabla v_r) \\
&= (a(v) \nabla v_r, \nabla v_r) - (a(v) \nabla v_r, \nabla w_r) \\
&= (a(v) \nabla(v_r - v + v), \nabla v_r) - (a(v) \nabla v_r, \nabla(w_r - w + w)) \\
&= (a(v) \nabla \underbrace{(v_r - v)}_{=v_b}, \nabla v_r) + (a(v) \nabla v, \nabla v_r) - (a(v) \nabla v_r, \nabla \underbrace{(w_r - w)}_{=w_b}) + (a(v) \nabla v_r, \nabla w) \\
&= (a(v) \nabla(v_r), \nabla v_b) + (a(v) \nabla v_r, \nabla v) - (a(v) \nabla v_r, \nabla(w_b)) + (a(v) \nabla v_r, \nabla w) \\
&= [(f, v_b) + (a(v) \nabla v_r, \nabla v)] - [(f, w_b) + (a(v) \nabla v_r, \nabla w)].
\end{aligned}$$

Portanto

$$E_1 = [(f, v_b - w_b) + (a(v) \nabla v_r, \nabla(v - w))]. \quad (5.44)$$

De maneira completamente análoga, também podemos reescrever  $E_2$  como

$$E_2 = [(f, w_b - v_b) + (a(v) \nabla w_r, \nabla(w - v))]. \quad (5.45)$$

Assim, na soma de (5.44) e (5.45), as parcelas relativas ao termo de fonte se cancelam e, portanto,

$$E_1 + E_2 = (a(v)\nabla v_r - a(w)\nabla w_r, \nabla(v - w)). \quad (5.46)$$

Agora, com o intuito de encontrar uma estimativa para (5.46), iremos reformular a expressão dada para  $E_{12} = E_1 + E_2$  a partir do raciocínio logo abaixo

$$\begin{aligned} E_{12} &:= ((a(v) - a(w) + a(w))\nabla v_r - a(w)\nabla w_r, \nabla(v - w)) \\ &= ((a(v) - a(w))\nabla v_r, \nabla(v - w)) + (a(w)\nabla(v_r - w_r), \nabla(v - w)) \\ &:= E_{121} + E_{122}. \end{aligned}$$

Como  $a(v) - a(w) = \alpha_\epsilon(x)(b(v) - b(w))$ , de acordo com (5.42), então

$$|a(v) - a(w)| \leq \alpha_1 \|b'\|_\infty |v - w| \leq C \|v - w\|_{\infty, K}.$$

Logo

$$|E_{121}| \leq C \|v - w\|_{\infty, K} |v_r|_{1, K} |v - w|_{1, K}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |E_{122}| &\leq |(\alpha_\epsilon(x)b(w)\nabla(v_r - w_r), \nabla(v - w))| \\ &\leq \alpha_1 \|b\|_\infty |v_r - w_r|_{1, K} |v - w|_{1, K} \\ &\leq C |v_r - w_r|_{1, K} |v - w|_{1, K}. \end{aligned}$$

As estimativas acima, para  $E_{121}$  e  $E_{122}$ , permitem a seguinte conclusão parcial:

$$\begin{aligned} |E_{12}| &\leq C (\|v - w\|_{\infty, K} |v_r| + |v_r - w_r|_{1, K}) |v - w|_{1, K} \\ &= C (\|v - w\|_{\infty, K} |v_r| |v - w|_{1, K} + |v_r - w_r|_{1, K} |v - w|_{1, K}). \end{aligned}$$

Agora, das relações (5.35) e (5.41),

$$|E_{12}| \leq C(\|v - w\|_{\infty, K}(|v|_{1, K} + h^2) + |v - w|_{1, K})|v_r - w_r|_{1, K}.$$

Finalmente, para a parcela  $E_3 = ((a(w) - a(v)\nabla w_r, \nabla(v_r - w_r)))$ , resulta evidente, em razão as idéias acima utilizadas, a seguinte limitação:

$$\begin{aligned} |E_3| &\leq C\|v - w\|_{\infty, K}|w_r|_{1, K}|v_r - w_r|_{1, K} \\ &\leq C\|v - w\|_{\infty, K}(|w|_{1, K} + h^2)|v_r - w_r|_{1, K}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Portanto, a desigualdade (5.43) segue das estimativas estabelecidas para  $E_{12}$  e  $E_3$ .

■

**Lema 5.3.8** Para cada  $v \in V_h$  e cada elemento  $K \in T_h$ , é válida a seguinte identidade:

$$|\nabla v| = \frac{1}{|K|^{1/2}}|v|_{1, K} \quad (|\nabla(\cdot)| \text{ indica a norma vetorial do gradiente de } (\cdot)). \quad (5.48)$$

**Demonstração.** Com efeito, basta calcular

$$\begin{aligned} |v|_{1, K} &= \left( \int_K |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= |\nabla v| \left( \int_K dx \right)^{1/2} \\ &= |\nabla v| |K|^{1/2}. \end{aligned}$$

■

**Lema 5.3.9** Dado  $K \in T_h$ ,  $T_h$  partição de  $\Omega$ , existe uma família de funções  $\xi_\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , com as seguintes características:

- a)  $\xi_\epsilon \in C_0^\infty(K)$ ;
- b)  $0 \leq \xi_\epsilon \leq 1$  em  $K$ ;



c)  $\xi_\epsilon \equiv 1$  fora de uma  $\epsilon$ -vizinhança de  $\partial K$ , que denotaremos com  $V_\epsilon(\partial K)$ ;

d)  $\epsilon|\nabla\xi_\epsilon| \leq C$  em  $K$ , onde  $C$  é uma constante que independe de  $\epsilon$ .

**Demonstração.** Para uma demonstração, veja V. V. Jikov e Oleinik (1994) ■

Para cada  $v, w \in V_h$ , e  $\xi_\epsilon$ , seja

$$\varphi_\epsilon := \epsilon(1 - \xi_\epsilon)(\boldsymbol{\chi}(y) \cdot \nabla v - \boldsymbol{\chi}(y) \cdot \nabla w), \quad y = \frac{x}{\epsilon}, \quad (5.49)$$

onde cada componente de  $\boldsymbol{\chi}$  satisfaz o correspondente problema de célula (3.20).

**Lema 5.3.10** Dados  $v, w \in V_h$ , e supondo  $\boldsymbol{\chi} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , para o correspondente  $\varphi_\epsilon$  dado por (5.49), tem-se

$$|\varphi_\epsilon|_{1,K} \leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |v - w|_{1,K}, \quad \forall K \in T_h. \quad (5.50)$$

**Demonstração.** Como  $\nabla\varphi_\epsilon = (1 - \xi_\epsilon)(\nabla_y \boldsymbol{\chi})^t \nabla(v - w) - \epsilon[\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla(v - w)] \nabla\xi_\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \int_K \nabla\varphi_\epsilon \cdot \nabla\varphi_\epsilon &= \int_K \{(1 - \xi_\epsilon)(\nabla_y \boldsymbol{\chi})^t \nabla(v - w) - \epsilon[\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla(v - w)] \nabla\xi_\epsilon\} \cdot \nabla\varphi_\epsilon \\ &= \int_K (1 - \xi_\epsilon)(\nabla_y \boldsymbol{\chi})^t \nabla(v - w) \cdot \nabla\varphi_\epsilon - \int_K \epsilon[\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla(v - w)] \nabla\xi_\epsilon \cdot \nabla\varphi_\epsilon \\ &\leq \|\nabla_y \boldsymbol{\chi}\|_\infty \int_K \underbrace{(1 - \xi_\epsilon)}_{\leq 1} |\nabla(v - w)| |\nabla\varphi_\epsilon| + \|\boldsymbol{\chi}\|_\infty \int_K \underbrace{\epsilon|\nabla\xi_\epsilon|}_{\leq 1} |\nabla(v - w)| |\nabla\varphi_\epsilon| \\ &\leq \|\nabla_y \boldsymbol{\chi}\|_\infty |\nabla(v - w)| \int_{V_\epsilon(\partial K)} |\nabla\varphi_\epsilon| + \|\boldsymbol{\chi}\|_\infty |\nabla(v - w)| \int_{V_\epsilon(\partial K)} |\nabla\varphi_\epsilon| \\ &\leq \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\infty} |\nabla(v - w)| \int_{V_\epsilon(\partial K)} |\nabla\varphi_\epsilon| \\ &\leq \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\infty} |\nabla(v - w)| |V_\epsilon(\partial K)|^{1/2} \|\nabla\varphi_\epsilon\|_{0,V_\epsilon(\partial K)} \\ &\leq \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\infty} |\nabla(v - w)| |V_\epsilon(\partial K)|^{1/2} \|\nabla\varphi_\epsilon\|_{0,K} \\ &\leq \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\infty} |\nabla(v - w)|_{1,K} \frac{|V_\epsilon(\partial K)|^{1/2}}{|K|^{1/2}} \|\nabla\varphi_\epsilon\|_{0,K} \quad (\text{de acordo com (5.48)}). \end{aligned}$$

Portanto

$$\|\nabla\varphi_\epsilon\|_{0,K} \leq \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\infty} |\nabla(v - w)|_{1,K} \frac{|V_\epsilon(\partial K)|^{1/2}}{|K|^{1/2}}. \quad (5.51)$$

Mas, da definição de  $V_\epsilon(\partial K)$  resulta que  $|V_\epsilon(\partial K)| \leq C_1\epsilon h$  e, por outra parte, sabe-se que  $|K| \geq C_2h^2$ . Logo

$$\frac{|V_\epsilon(\partial K)|}{|K|} \leq C_3 \frac{\epsilon}{h}. \quad (5.52)$$

De (5.51) e (5.52) segue (5.50). ■

A seguir passaremos a determinar algumas estimativas relativas a  $\hat{v}_\epsilon$  (5.27).

**Lema 5.3.11** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para  $\hat{v}_\epsilon$  dado por (5.27), e  $f$  limitado, tem-se a seguinte estimativa:

$$|\hat{v}_\epsilon|_{1,K} \leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} (|v|_{1,K} + h^2). \quad (5.53)$$

**Demonstração.** Como  $\hat{v}_\epsilon \in H^1(K)$  satisfaz o problema (A.17) então consideraremos a decomposição  $\hat{v}_\epsilon = \hat{v}_1 + \hat{v}_2$ , onde  $\hat{v}_1$  e  $\hat{v}_2$  são soluções, respectivamente, dos problemas

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a(v)\nabla\hat{v}_1] &= 0 \quad \text{em } K, \\ \hat{v}_\epsilon &= -\epsilon\chi \cdot \nabla v \quad \text{sobre } \partial K \end{aligned} \quad (5.54)$$

e

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a(v)\nabla\hat{v}_2] &= f \quad \text{em } K, \\ \hat{v}_\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial K. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Para  $\hat{v}_1$  sabe-se que ( ver V. V. Jikov e Oleinik (1994))

$$|\hat{v}_1|_{1,K} \leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |v|_{1,K}. \quad (5.56)$$

Resta, então, determinar uma estimativa para  $|\hat{v}_2|_{1,K}$ . Para tal, multiplicaremos (5.55) por  $\hat{v}_2 \in H^1(K)$  e integraremos por partes o membro esquerdo. Assim,

$$\begin{aligned} (a(v)\nabla\hat{v}_2, \nabla\hat{v}_2) &= (f, \hat{v}_2) \\ \alpha_0|\hat{v}_2|_{0,K}^2 &\leq \|f\|_{0,K}\|\hat{v}_2\|_{0,K} \\ &\leq (\|f\|_\infty h)\|\hat{v}_2\|_{0,K} \\ &\leq \|f\|_\infty h^2|\hat{v}_2|_{1,K} \quad (\text{Poincaré}). \end{aligned}$$

Então

$$|\hat{v}_2|_{1,K} \leq Ch^2|\hat{v}_2|_{1,K}. \quad (5.57)$$

De (5.56) e (5.57) segue (5.53). ■

**Lema 5.3.12** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Dados  $v, w \in V_h$  e os correspondentes  $v_\epsilon$  e  $w_\epsilon$  definidos através da relação (5.27), e para cada  $K \in K_h$ , tem-se

$$|\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K} \leq C\sqrt{\frac{\epsilon}{h}} [\|v - w\|_{\infty,K}(|v|_{1,K} + |w|_{1,K} + h^2) + |v - w|_{1,K}] \quad (5.58)$$

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned} \alpha_0 b_0 |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K}^2 &\leq (a(v)\nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon), \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) \quad (\text{hipótese de elipticidade uniforme}) \\ &= (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) - (a(v)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) \\ &= (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) - (a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) \\ &\quad + (a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) - (a(v)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) \\ &= (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) + ((a(w) - a(v))\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) \\ &= J1 + J2. \end{aligned}$$

Então

$$\alpha_0 b_0 |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K}^2 \leq |J1| + |J2|. \quad (5.59)$$

Inicialmente estimaremos  $J1 = (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon))$ . Subtraindo membro a membro as respectivas equações associadas a  $v$  e  $w$ , dadas através de (A.17), obtém-se

$$(a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - (a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\varphi) = 0, \quad \forall\varphi \in H_0^1(K).$$

Agora, tomando em particular  $\varphi = \nabla\hat{v}_\epsilon - \nabla\hat{w}_\epsilon + \epsilon\eta(1 - \xi_\epsilon)$ , com  $\eta = \chi(y)\cdot\nabla v - \chi(y)\cdot\nabla w$ , e  $\xi_\epsilon$  dado do lema 5.3.9, resulta

$$(a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)) = -(a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\epsilon\eta(1 - \xi_\epsilon))).$$

Assim,  $J1$  pode ser reescrito como segue

$$J1 = (a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon - a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, -\nabla\varphi_\epsilon),$$

onde  $\varphi_\epsilon$  é dado por (5.49).

A partir daí,

$$\begin{aligned} J1 &= ((a(v)\nabla\hat{v}_\epsilon, \nabla\varphi_\epsilon) - (a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, -\nabla\varphi_\epsilon)) \\ &= ((a(v) - a(w) + a(w))\nabla\hat{v}_\epsilon, \nabla\varphi_\epsilon) - (a(w)\nabla\hat{w}_\epsilon, -\nabla\varphi_\epsilon) \\ &= ((a(v) - a(w))\nabla\hat{v}_\epsilon, \nabla\varphi_\epsilon) - (a(w)\nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon), -\nabla\varphi_\epsilon) \\ &= J11 + J12. \end{aligned}$$

Por uma parte temos,

$$\begin{aligned} |J11| &\leq \int_K |a(v) - a(w)| |\nabla\hat{v}_\epsilon| |\nabla\varphi_\epsilon| dx \\ &\leq \|a'\|_\infty \int_K |v - w| |\nabla\hat{v}_\epsilon| |\nabla\varphi_\epsilon| dx \\ &\leq C \|v - w\|_{K,\infty} \int_K |\nabla\hat{v}_\epsilon| |\nabla\varphi_\epsilon| dx \\ &\leq C \|v - w\|_{K,\infty} \|\nabla\hat{v}_\epsilon\|_{0,K} \|\nabla\varphi_\epsilon\|_{0,K} \end{aligned}$$

Isto é,

$$J11 \leq C \|v - w\|_{K,\infty} |\nabla \hat{v}_\epsilon|_{1,K} |\nabla \varphi_\epsilon|_{1,K}. \quad (5.60)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |J12| &\leq \int_K |a(w)| |\nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)| |\nabla \varphi_\epsilon| dx \\ &\leq \alpha_1 \int_K |\nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)| |\nabla \varphi_\epsilon| dx \end{aligned}$$

e, então,

$$|J12| \leq C |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K} |\varphi_\epsilon|_{1,K}. \quad (5.61)$$

De (5.60) e (5.61) temos a seguinte estimativa parcial para  $J1$ :

$$J1 \leq C (\|v - w\|_{\infty,K} |\hat{v}_\epsilon|_{1,K} + |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K}) |\varphi_\epsilon|_{1,K}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |J1| &\leq C (\|v - w\|_{\infty,K} |\hat{v}_\epsilon|_{1,K} |\varphi_\epsilon|_{1,K} + |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K} |\varphi_\epsilon|_{1,K}) \\ &\leq C \left( \frac{1}{2} \|v - w\|_{\infty,K}^2 |\hat{v}_\epsilon|_{1,K}^2 + \frac{1}{2} |\varphi_\epsilon|_{1,K}^2 \right) + C |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K} |\varphi_\epsilon|_{1,K}. \end{aligned}$$

Então

$$|J1| \leq C (\|v - w\|_{\infty,K}^2 |\hat{v}_\epsilon|_{1,K}^2 + |\varphi_\epsilon|_{1,K}^2) + C^2 \lambda \frac{1}{4\lambda} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K}^2 \quad (\text{com } \lambda > 0 \text{ a ser escolhido}). \quad (5.62)$$

A seguir determinaremos uma estimativa para  $J2 = ([a(w) - a(v)]\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon))$ ,

$$\begin{aligned} |J2| &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty \int_K |w - v| |\nabla\hat{w}_\epsilon| |\nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon)| dx \\ &\leq C \|w - v\|_{\infty, K} |\hat{w}_\epsilon|_{1, K} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K} \\ &\leq C^2 \lambda \|v - w\|_{\infty, K}^2 |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 + \frac{1}{4\lambda} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2. \end{aligned}$$

Então

$$|J2| \leq C^2 \lambda \|v - w\|_{\infty, K}^2 |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 + \frac{1}{4\lambda} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2. \quad (5.63)$$

Agora, considerando (5.62) e (5.63) na desigualdade (5.59) segue,

$$\begin{aligned} \alpha_0 b_0 |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 &\leq C [\|v - w\|_{\infty, K}^2 |\hat{v}_\epsilon|_{1, K}^2 + |\varphi_\epsilon|_{1, K}^2] \\ &\quad + C^2 \lambda |\varphi_\epsilon|_{1, K}^2 + \frac{1}{4\lambda} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 \\ &\quad + C^2 \lambda \|v - w\|_{\infty, K}^2 |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 + \frac{1}{4\lambda} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 \\ &\leq C [\|v - w\|_{\infty, K}^2 (|\hat{v}_\epsilon|_{1, K}^2 + |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2) + (1 + \lambda) |\varphi_\epsilon|_{1, K}^2] + \frac{1}{2\lambda} |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2. \end{aligned}$$

Daí

$$(\alpha_0 b_0 - \frac{1}{2\lambda}) |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 \leq C [\|v - w\|_{\infty, K}^2 (|\hat{v}_\epsilon|_{1, K}^2 + \lambda |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2)] + (1 + \lambda) |\varphi_\epsilon|_{1, K}^2.$$

No caso especial em que  $\lambda = \frac{1}{\alpha_0 b_0}$ , a desigualdade correspondente será

$$|\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2 \leq C_0 [\|v - w\|_{\infty, K}^2 (|\hat{v}_\epsilon|_{1, K}^2 + |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}^2) + |\varphi_\epsilon|_{1, K}^2].$$

Tirando a raiz quadrada em ambos os membros na desigualdade logo acima, obtém-se.

$$|\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1, K} \leq C [\|v - w\|_{\infty, K} (|\hat{v}_\epsilon|_{1, K} + |\hat{w}_\epsilon|_{1, K}) + |\varphi_\epsilon|_{1, K}].$$

Finalmente, das estimativas estabelecidas para  $|\varphi_\epsilon|_{1,K}$  e  $|\hat{v}_\epsilon|_{1,K}$  (analogamente para  $|\hat{w}_\epsilon|_{1,K}$ ), respectivamente, em (5.50) e (5.53), resulta (5.58). ■

**Lema 5.3.13** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para cada  $v, w \in V_h$  tal que  $\|v\|_\infty + \|w\|_{1,\infty} \leq M$ , sejam, respectivamente,  $v_\epsilon, w_\epsilon$ , definidos através da relação (5.26). Então

$$|v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} \leq C(M) \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right]. \quad (5.64)$$

**Demonstração.** Dado  $v \in V_h$ , de acordo com (5.27), então  $v_\epsilon = v_r - \hat{v}_\epsilon$  se, e somente se,  $v_\epsilon = v_r - \hat{v}_\epsilon$ . Analogamente,  $w_\epsilon = w_r - \hat{w}_\epsilon$ . Assim,

$$v_\epsilon - w_\epsilon = (v_r - w_r) + (\hat{w}_\epsilon - \hat{v}_\epsilon) \Rightarrow |v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} \leq |v_r - w_r|_{1,K} + |\hat{w}_\epsilon - \hat{v}_\epsilon|_{1,K}.$$

Então, dos lemas (5.3.7) e (5.3.12) segue que

$$\begin{aligned} |v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} &\leq C[\|v - w\|_{\infty,K}(|v|_{1,K} + |w|_{1,K} + h^2) + |v - w|_{1,K}] \\ &\quad + C\sqrt{\frac{\epsilon}{h}}[\|v - w\|_{\infty,K}(|v|_{1,K} + |w|_{1,K} + h^2) + |v - w|_{1,K}]. \end{aligned}$$

Logo

$$|v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} \leq \hat{C} \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) [\|v - w\|_{\infty,K} |v|_{1,K} + \|v - w\|_{\infty,K} |w|_{1,K} + h^2 \|v - w\|_{\infty,K} + |v - w|_{1,K}]. \quad (5.65)$$

Agora, utilizando a desigualdade inversa (1.4.2), temos que  $\|v - w\|_{\infty,K} |v|_{1,K} \leq (h^{-1} \|v - w\|_{0,K})(h \|v\|_{1,\infty,K})$  e, portanto,

$$\|v - w\|_{\infty,K} |v|_{1,K} \leq C \|v - w\|_{0,K} \|v\|_{1,\infty,K}. \quad (5.66)$$

O mesmo raciocínio permite concluir o seguinte:

$$\|v - w\|_{\infty,K} |w|_{1,K} \leq C \|v - w\|_{0,K} \|w\|_{1,\infty,K} \quad \text{e} \quad (5.67)$$

$$h^2 \|v - w\|_{\infty,K} \leq h \|v - w\|_{0,K}. \quad (5.68)$$

Considerando (5.66), (5.67) e (5.68) em (5.65), obtém-se

$$|v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} \leq C \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \underbrace{(\|v\|_{1,\infty,K} + \|w\|_{1,\infty,K})}_{\leq M} [\|v - w\|_{0,K} + |v - w|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K}].$$

Portanto

$$|v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} \leq C(M) \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) [\|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K}].$$

■

**Lema 5.3.14** Nas hipóteses dos lemas (5.3.5), (5.3.11) e (5.3.13), tem-se

$$\|v - w\|_{\infty,K} |w_\epsilon|_{1,K} \leq C(M) \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) [\|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K}]. \quad (5.69)$$

**Demonstração.** Para  $w_\epsilon = w_r - \hat{w}_\epsilon$ , mediante a desigualdade triangular, obtém-se

$$|w_\epsilon|_{1,K} \leq |w_r|_{1,K} + |\hat{w}_\epsilon|_{1,K}.$$

Mas, dos lemas (5.3.5) e (5.3.11), respectivamente, temos

$$|w_r|_{1,K} \leq C(|w|_{1,K} + h^2) \quad \text{e} \quad |\hat{w}_\epsilon|_{1,K} \leq C \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |w|_{1,K} + h^2\right).$$



Então,

$$\begin{aligned}
\|v - w\|_{\infty,K} |w_\epsilon|_{1,K} &\leq C \left[ \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \|v - w\|_{\infty,K} |w|_{1,K} + \|v - w\|_{\infty,K} |w|_{1,K} + h^2 \|v - w\|_{\infty,K} \right] \\
&\leq C \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{0,K} \underbrace{\|w\|_{1,\infty,K}}_{\leq M} + h \|v - w\|_{0,K} \right] \\
&\leq C(M) \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right].
\end{aligned}$$

Desta forma temos chegado à relação (5.69). ■ Finalmente, mediante os lemas acima descritos, a seguir provaremos a proposição 5.3.2.

**Demonstração.** De fato, dado que

$$\begin{aligned}
I_1 &= (a(v)\nabla v_\epsilon - a(w))\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_K \\
&= (a(v)\nabla v_\epsilon - a(v)\nabla w_\epsilon + a(v)\nabla w_\epsilon - a(w))\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_K \\
&= (a(v)\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon), \nabla\phi)_K + ((a(v) - a(w))\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_K \\
&:= I_{11} + I_{12}.
\end{aligned}$$

Então

$$|I_1| \leq |I_{11}| + |I_{12}|. \quad (5.70)$$

A seguir estimaremos cada uma das parcelas do membro direito de (5.70).

Para  $I_{11} = (a(v)\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon), \nabla\phi)_K$  resulta evidente a seguinte limitação:

$$|I_{11}| \leq C |v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K} |\phi|_{1,K}. \quad (5.71)$$

Mas, utilizando em (5.71) a estimativa para  $|v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K}$  estabelecida em (5.64), obtém-se

$$|I_{11}| \leq C(M) \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K}. \quad (5.72)$$

Por último, para  $I_{12} = ([a(v) - a(w)]\nabla w_\epsilon, \nabla\phi)_K$  temos,

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty (|v - w| |\nabla w_\epsilon|, \nabla|\phi|)_K \\ &\leq C \|v - w\|_{\infty, K} |w_\epsilon|_{1, K} |\phi|_{1, K}. \end{aligned}$$

Daí, fazendo uso da estimativa para  $\|v - w\|_{\infty, K} |w_\epsilon|_{1, K}$  dada em (5.69), tem-se

$$|I_{12}| \leq C(M) \left[1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right] \|v - w\|_{1, K} + h \|v - w\|_{0, K} |\phi|_{1, K}. \quad (5.73)$$

Portanto, das relações (5.72), (5.73) e (5.70), segue o resultado (5.31). ■

### 5.3.3 Demonstração da proposição 5.3.3

**Lema 5.3.15** Para cada  $v \in V_h$  e seu correspondente  $v_\epsilon$  dado por (5.26), tem-se

$$\|\nabla v_\epsilon\|_{0, K \setminus K_\epsilon} \leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |v|_{1, K}, \quad \forall K \in T_h, \quad (5.74)$$

com  $K_\epsilon$  definido no apêndice A.

**Demonstração.** Multiplicando ambos os membros de (5.34) por  $\nabla v_\epsilon$  e integrando o resultado sobre  $K \setminus K_\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \int_{K \setminus K_\epsilon} |\nabla v_\epsilon|^2 dx &= \int_{K \setminus K_\epsilon} \nabla v_\epsilon \cdot [I + (\nabla_y \mathcal{X})^t] \nabla v dx \\ &\leq \|I + (\nabla_y \mathcal{X})^t\|_\infty \left( \int_{K \setminus K_\epsilon} \nabla v_\epsilon dx \right) \cdot \nabla v \quad (\nabla v|_K \text{ constante}) \\ &\leq C |\nabla v| \|v_\epsilon\|_{0, K \setminus K_\epsilon} \left( \int_{K \setminus K_\epsilon} dx \right)^{1/2} \quad (\text{Schwarz}) \\ &\leq C \frac{|v|_{1, K}}{|K|^{1/2}} \|\nabla v_\epsilon\|_{0, K \setminus K_\epsilon} |K \setminus K_\epsilon|^{1/2} \quad (\text{lema 5.3.8}) \\ &\leq C \sqrt{\frac{|K \setminus K_\epsilon|}{|K|}} |v|_{1, K} \|\nabla v_\epsilon\|_{0, K \setminus K_\epsilon} \\ &\leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |v|_{1, K} \|\nabla v_\epsilon\|_{0, K \setminus K_\epsilon}. \end{aligned}$$

Daí segue a relação (5.74). ■

Na sequência faremos a demonstração da proposição 5.3.3.

**Demonstração.** Somando e subtraindo  $a(v)\nabla w_\epsilon$  na expressão para  $I_2$  e associando convenientemente os termos, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= (a(v)\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon), \nabla\phi)_{0,K\setminus K_\epsilon} + ([a(v) - a(w)\nabla w_\epsilon, \nabla\phi])_{0,K\setminus K_\epsilon} \\ &:= I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Agora estimaremos  $I_{21}$  de acordo como segue

$$\begin{aligned} |I_{21}| &\leq C \int_{K\setminus K_\epsilon} |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)| |\nabla\phi| \, dx \\ &= C |\nabla\phi| \int_{K\setminus K_\epsilon} |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)| \, dx \\ &= C \frac{|\phi|_{1,K}}{\sqrt{|K|}} \int_{K\setminus K_\epsilon} |\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)| \, dx \quad (\text{lema 5.3.8}) \\ &\leq C \frac{|\phi|_{1,K}}{\sqrt{|K|}} \|\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)\|_{0,K\setminus K_\epsilon} |K \setminus K_\epsilon|^{1/2} \quad (\text{Schwarz}) \\ &= C \sqrt{\frac{|K \setminus K_\epsilon|}{|K|}} \|\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)\|_{0,K\setminus K_\epsilon} |\phi|_{1,K} \\ &\leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \|\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)\|_{0,K\setminus K_\epsilon} |\phi|_{1,K} \quad (\text{por (A.2)}) \end{aligned}$$

Isto é,

$$|I_{21}| \leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \|\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)\|_{0,K\setminus K_\epsilon} |\phi|_{1,K},$$

mas, por sua vez, do lema 5.3.15 com  $v - w$  em lugar de  $v$ , temos

$$\|\nabla(v_\epsilon - w_\epsilon)\|_{0,K\setminus K_\epsilon} \leq C \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K}.$$

Assim

$$|I_{21}| \leq C \left(\frac{\epsilon}{h}\right) |v_\epsilon - w_\epsilon|_{1,K}.$$

Agora utilizando a relação (5.64), segue

$$|I|_{21} \leq C(M) \left[ \left( \frac{\epsilon}{h} + \left( \frac{\epsilon}{h} \right)^{3/2} \right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right]. \quad (5.75)$$

Para  $I_{22} = ([a(v) - a(w)] \nabla w_\epsilon, \nabla \phi)_{K \setminus K_\epsilon}$ ,

$$\begin{aligned} |I_{22}| &\leq C \|v - w\|_{\infty,K} \|\nabla w_\epsilon\|_{0,K \setminus K_\epsilon} \|\nabla \phi\|_{0,K \setminus K_\epsilon} \\ &\leq C \|v - w\|_{\infty,K} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |w_\epsilon|_{1,K} \right) \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |\phi|_{1,K} \right) \quad (\text{por (5.74)}) \\ &\leq C \left( \frac{\epsilon}{h} \right) (\|v - w\|_{\infty,K} |w_\epsilon|_{1,K}) |\phi|_{1,K} \\ &\leq C \left( \frac{\epsilon}{h} \right) \left[ \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K} \quad (\text{por (5.69)}). \end{aligned}$$

Então

$$|I_{22}| \leq C \left( \frac{\epsilon}{h} \right) \left[ \left( 1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K}. \quad (5.76)$$

Portanto, de (5.75) e (5.76), segue a estimativa (5.32). ■

### 5.3.4 Demonstração da proposição 5.3.4

Por último, a demonstração da proposição 5.3.4 é dada como segue.

**Demonstração.** Com efeito,

$$\begin{aligned} I_3 &= (a(v) \nabla \hat{v}_\epsilon - a(v) \nabla \hat{w}_\epsilon + a(v) \nabla \hat{w}_\epsilon - a(w) \nabla \hat{w}_\epsilon, \phi)_K \\ &= (a(v) \nabla (\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon), \nabla \phi)_K + ([a(v) - a(w)] \nabla \hat{w}_\epsilon, \nabla \phi)_K. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
|(a(v)\nabla(\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon), \nabla\phi)_K| &\leq \alpha_1 \|b\|_\infty |\hat{v}_\epsilon - \hat{w}_\epsilon|_{1,K} |\phi|_{1,K} \\
&\text{a estimativa (5.64)} \Rightarrow \\
&\leq C(M) \left[ \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\right) \|v - w\|_{1,K} + h \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K}.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Por outra lado,

$$\begin{aligned}
|([a(v) - a(w)]\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K| &\leq \alpha_1 \|b'\|_\infty (|v - w| |\nabla\hat{w}_\epsilon|, |\nabla\phi|)_K \\
&\leq C \|v - w\|_{\infty,K} (|\nabla\hat{w}_\epsilon|, |\nabla\phi|)_K \\
&\leq C \|v - w\|_{\infty,K} |\nabla\hat{w}_\epsilon|_{1,K} |\phi|_{1,K} \\
&\leq C \|v - w\|_{\infty,K} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} |w|_{1,K} + h^2 \right] |\phi|_{1,K} \quad (5.53) \\
&\quad (\text{desigualdade inversa (1.4.2)}) \Rightarrow \\
&= C \left[ \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \underbrace{\|v - w\|_{\infty,K} |w|_{1,K}}_{\leq \|v - w\|_{0,K} \|w\|_{1,\infty,K}} + h \underbrace{(h \|v - w\|_{\infty,K})}_{\leq \|v - w\|_{0,K}} \right] |\phi|_{1,K} \\
&\leq C \left[ \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \|w\|_{1,\infty,K} + h \right) \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K}, \quad (\|w\|_{1,\infty,K} \leq M).
\end{aligned}$$

Logo

$$|([a(v) - a(w)]\nabla\hat{w}_\epsilon, \nabla\phi)_K| \leq C(M) \left[ \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + h \right) \|v - w\|_{0,K} \right] |\phi|_{1,K}. \tag{5.79}$$

De (5.78) e (5.79) em (5.77), resulta (5.33). ■

#### 5.4 Propriedade Invariante do Operador $\Phi$

Finalizamos o presente capítulo, formalizando a demonstração da proposição 4.3.6, que faz referência da propriedade do operador  $\Phi$  (4.39) ser invariante sobre o conjunto  $B$  (4.43). Antes que tudo, introduzimos o lema a seguir. No que vem a seguir, a notação  $C(M)$  indicará que  $C$  depende de  $M$ .

**Lema 5.4.1** Para quaisquer  $v \in V_h \cap W^{1,\infty}(\Omega)$  com  $\|v\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$ , é válida a estimativa a seguir.

$$|a(v, g_h^x) - a_b(v, g_h^x)| \leq C(M)\bar{E}|\ln h|. \quad (5.80)$$

**Demonstração.** Da definição de  $E(., .)$  dada por (4.40) segue em particular que

$$|a(v, g_h^x) - a_b(v, g_h^x)| \leq \bar{E}\|v\|_{1,\Omega}\|g_h^x\|_{1,\Omega}.$$

Mas, sabe-se de (5.10) que  $\|v\|_{1,\Omega} \leq C\|v\|_{1,\infty,\Omega}$  e, por outro parte, como por hipótese estamos considerando  $\|v\|_{1,\infty,\Omega} \leq M$ , então

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C(M).$$

Do lema A.4.1 temos

$$\|g_h^x\|_{1,\Omega} \leq C\sqrt{\|g_h^x\|_{1,1,\Omega}}.$$

Então

$$|a(v, g_h^x) - a_b(v, g_h^x)| \leq C\bar{E}\sqrt{\|g_h^x\|_{1,1,\Omega}}.$$

Agora, utilizando a relação (A.20) no membro direito da desigualdade logo acima resulta

$$|a(v, g_h^x) - a_b(v, g_h^x)| \leq C\bar{E}\sqrt{|\ln h|}.$$

Mas, para  $h < 1$ , sabe-se que  $\sqrt{|\ln h|} \leq |\ln h|$ . A partir daí chegamos ao resultado esperado em (5.80). ■

Finalmente estamos com os pré-requisitos necessários para poder demonstrar a proposição 4.3.6.

**Demonstração. (Proposição 4.3.6)** Com o intuito de chegarmos a este resultado, usaremos o operador projeção definido em (4.32) para redefinir o oper-

ador  $\Phi$  (4.39). Isto é, dado que

$$A(u; \Phi(v), w) = A(u; u, w) + a(v, w) - a_b(v, w) - a_f(v, w) - R(u, v, w), \forall w \in V_h$$

e

$$A(u; u, w) = A(u; P_h u, w) \quad \forall w \in V_h,$$

então,  $\Phi$  pode ser explicitado, também, mediante a relação:

$$A(u; \Phi(v) - P_h u, w) = a(v, w) - a_b(v, w) - a_f(v, w) - R(u, v, w), \forall w \in V_h. \quad (5.81)$$

Considerando em particular  $w = g_h^x$  no membro membro esquerdo de (5.81), tem-se

$$A(u; \Phi(v) - P_h u, g_h^x) = \partial(\Phi(v) - P_h u)(x).$$

De outra parte, a partir das estimativas (5.80) e (5.20), o membro direito de (5.81) é limitado por

$$C(M)(\bar{E} |\ln h| + h \|\nabla g_h^x\|_{0,\Omega} + |R(u, v, g_h^x)|).$$

onde, de acordo com a relação (A.21),  $\|g_h^x\|_{1,\Omega} \leq C |\ln h|$  e, por outro lado, sabe-se de (5.11) que

$$|R(u, v, g_h^x)| \leq C(M) \|u - v\|_{1,\infty}^2 \|g_h^x\|_{1,\Omega}.$$

Então

$$\partial(\Phi(v) - P_h u)(x) \leq C(M) (\|u - v\|_{1,\infty}^2 + \bar{E} + h) |\ln h|.$$

Da desigualdade triangular, tem-se

$$\|u - v\|_{1,\infty,\Omega}^2 \leq 2(\|u - P_h u\|_{1,\infty,\Omega}^2 + \|P_h u - v\|_{1,\infty,\Omega}^2).$$

Em resumo temos

$$\|\Phi(v) - P_h u\|_{1,\infty,\Omega} \leq C(M)(\|u - P_h u\|_{1,\infty,\Omega}^2 + \|P_h u - v\|_{1,\infty,\Omega}^2 + \bar{E} + h) |\ln h|. \quad (5.82)$$

Devemos mostrar que o membro direito desta última inequação deve ser limitado por  $\sqrt{\bar{E}} + \sqrt{h}$ . Para tal, usaremos os seguintes fatos:

i) Por construção: Para cada  $v \in B$  (4.43),

$$\|P_h u - v\|_{1,\infty,\Omega} \leq \sqrt{\bar{E}} + \sqrt{h};$$

ii) Em particular:  $P_h : V \rightarrow V_h$ ,  $A(u; P_h u, w) = A(u; u; w) \quad \forall w \in V_h$ ,

$$\|P_h u - u\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch \quad \text{de acordo com (4.33)}.$$

Considerando os fatos (i) e (ii) em (5.82), obtém-se

$$\begin{aligned} \|\Phi(v) - P_h u\|_{1,\infty,\Omega} &\leq C(M)(h^2 + (\sqrt{\bar{E}} + \sqrt{h})^2 + \bar{E} + h) |\ln h| \\ &\leq 3C(M)(h + \bar{E}) |\ln h| \\ &\leq [3C(M)\sqrt{\bar{E}} |\ln h|] \sqrt{\bar{E}} + [3C(M)\sqrt{h} |\ln h|] \sqrt{h}. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{1/2} |\ln h| = 0$ , existe  $h_0 > 0$  tal que

$$3C(M)h^{1/2} |\ln h| \leq 1, \quad 0 < h < h_0.$$

Por outro lado, admitindo que  $\sqrt{\bar{E}} |\ln h| \leq 1/[3C(M)]$ , então, o membro direito de (5.82) será limitado superiormente por  $\sqrt{\bar{E}} + \sqrt{h}$ . Isto é,

$$\|\Phi(v) - P_h u\|_{1,\infty,\Omega} \leq \sqrt{\bar{E}} + \sqrt{h}.$$

Temos assim confirmado que aplicação  $\Phi$  é invariante sobre  $B$ :  $\Phi(B) \subset B$ . ■



# Capítulo 6

## Análise de Erro

O presente capítulo está reservado à análise de erro associada às formulações RFB completo e RFB reduzido introduzidos no quarto capítulo.

### 6.1 Resultado de Melhor Aproximação para a Formulação RFB Completo

A seguir vamos estabelecer um resultado de aproximação em  $V_r$  tipo o clássico lema de Céa para nosso **problema modelo multiescala não linear**. Este resultado será dado através da proposição 6.6 a ser formulado mais abaixo. Para tal, restringindo o problema variacional (3.5) ao espaço  $V_r$ , tem-se o seguinte problema: achar  $u_r \in V_r$  tal que

$$a(u_r, v) = (f, v_r) \quad \forall v_r \in V_r \quad (6.1)$$

Em seguida determinaremos uma estimativa de erro para  $u^\epsilon - u_r$  na norma de  $H_0^1(\Omega)$ . A estratégia a seguir será considerar a linearização da forma (6.1) em torno da solução no espaço enriquecido  $u_r$ , a qual será denotada com  $A(u_r; \cdot, \cdot)$ . Temos, desta forma, o seguinte problema linear: determinar  $w \in H_0^1(\Omega)$  de maneira que

$$A(u_r; w, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (6.2)$$

onde

$$A(u_r; w, v) = \int_{\Omega} [\alpha_{\epsilon}(x) b(u_r) \nabla w \cdot \nabla v + \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) w \nabla u_r \cdot \nabla v] dx. \quad (6.3)$$

Para a forma linear (6.3) introduzimos a propriedade de coercividade uniforme através do lema a seguir.

**Lema 6.1.1** Sejam  $\alpha_{\epsilon}(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Para  $u_r$  suficientemente pequena na norma de  $W^{1,\infty}(\Omega)$ , a forma bilinear  $A(u_r; \cdot, \cdot)$  é uniformemente coerciva em  $V$ .

Omitiremos a demonstração deste lema, pois para sua prova, em linhas gerais, basta trocar  $u_r$  por  $u$  na demonstração da proposição 4.3.1.

A identidade a seguir será grande utilidade na demonstração da proposição que vem mais adiante.

**Lema 6.1.2** Para cada  $v_r \in V_r$ , tem-se a seguinte identidade:

$$A(u_r; u^{\epsilon} - u_r, v_r) = \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) [b(u_r) - b(u^{\epsilon})] \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla v_r dx + \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) (u^{\epsilon} - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx. \quad (6.4)$$

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned} A(u_r; u^{\epsilon} - u_r, v_r) &= A(u_r; u^{\epsilon}, v_r) - A(u_r; u_r, v_r) \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b(u_r) \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla v_r dx + \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) u^{\epsilon} \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b(u_r) \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx}_{=(f, v_r)} - \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) u_r \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b(u_r) \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla v_r dx - \underbrace{\int_{\Omega} f v_r dx}_{a(u^{\epsilon}, v_r)} + \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) (u^{\epsilon} - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b(u_r) \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla v_r dx - \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b(u^{\epsilon}) \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla v_r dx + \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) (u^{\epsilon} - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx \\ &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) [b(u_r) - b(u^{\epsilon})] \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla v_r dx + \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon}(x) b'(u_r) (u^{\epsilon} - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla v_r dx. \quad (6.5) \end{aligned}$$

■

Finalizamos a presente seção formulando o seguinte resultado de melhor aproximação no espaço enriquecido  $V_r$ ; isto é, apresentamos um lema do tipo Céa para nosso problema modelo não linear multiescala.

Para  $u_\epsilon$  solução do problema variacional (3.5) e  $u_r$ , solução do problema (6.1), segue.

**Proposição 6.1.3** Sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente.

Então, para  $u_r$  e  $u^\epsilon$  suficientemente pequenos na norma de  $W^{1,\infty}$ , tem-se

$$\|\nabla(u^\epsilon - u_r)\|_{0,\Omega} \leq C \|\nabla(u^\epsilon - w_r)\|_{0,\Omega} \quad \forall w_r \in V_r. \quad (6.6)$$

**Demonstração.** Seja  $w_r$  um elemento qualquer de  $V_r$ . Com o propósito de verificar a estimativa (6.6), calculemos

$$\begin{aligned} A := A(u_r; u^\epsilon - u_r, u^\epsilon - u_r) &= A(u_r; u^\epsilon - u_r, u^\epsilon - w_r + w_r - u_r) \\ &= A(u_r; u^\epsilon - u_r, u^\epsilon - w_r) + A(u_r; u^\epsilon - u_r, w_r - u_r). \end{aligned}$$

Assim, aplicando a identidade (6.4), na segunda parcela da última igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Omega} \alpha_\epsilon b(u_r) \nabla(u^\epsilon - u_r) \cdot \nabla(u^\epsilon - w_r) dx + \int_{\Omega} \alpha_\epsilon b'(u_r) (u^\epsilon - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla(u^\epsilon - w_r) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \alpha_\epsilon (b(u_r) - b(u^\epsilon)) \nabla u^\epsilon \cdot \nabla(w_r - u_r) dx + \int_{\Omega} \alpha_\epsilon b'(u_r) (u^\epsilon - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla(w_r - u_r) dx. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Então

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Omega} \alpha_\epsilon b(u_r) \nabla(u^\epsilon - u_r) \cdot \nabla(u^\epsilon - w_r) dx + \int_{\Omega} \alpha_\epsilon b'(u_r) (u^\epsilon - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla(u^\epsilon - u_r) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \alpha_\epsilon (b(u_r) - b(u^\epsilon)) \nabla u^\epsilon \cdot \nabla(w_r - u_r) dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Agora denominaremos com  $I_1, I_2$  e  $I_3$  a primeira, segunda e terceira parcelas, respectivamente, da equação (6.8). Em seguida, estimaremos em forma separada cada uma das correspondentes expressões .

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon} b(u_r) \nabla(u^{\epsilon} - u_r) \cdot \nabla(u^{\epsilon} - w_r) dx \\
&\leq \alpha_1 \|b'\|_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla(u^{\epsilon} - u_r)| |\nabla(u^{\epsilon} - w_r)| \\
\Rightarrow |I_1| &\leq c_1 \|\nabla(u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega} \|\nabla(u^{\epsilon} - w_r)\|_{0,\Omega},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

onde  $c_1 := \alpha_1 \|b'\|_{\infty}$ . Em forma semelhante será tratada a estimativa para  $I_2$ .

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon} b'(u_r)(u^{\epsilon} - u_r) \nabla u_r \cdot \nabla(u^{\epsilon} - u_r) dx \\
&\leq c_1 \int_{\Omega} |u^{\epsilon} - u_r| |\nabla u_r| |\nabla(u^{\epsilon} - u_r)| dx \\
&\leq c_1 \|u_r\|_{1,\infty} \int_{\Omega} |u^{\epsilon} - u_r| |\nabla(u^{\epsilon} - u_r)| dx.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Como  $u^{\epsilon} - u_r$  está nas hipóteses do teorema de Poincaré então

$$\|u^{\epsilon} - u_r\|_{0,\Omega} \leq c_{\Omega} \|\nabla(u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}.$$

Daí segue que

$$|I_2| \leq c_2 \|u_r\|_{1,\infty} \|\nabla(u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2 \quad (c_2 = c_1 c_{\Omega}). \tag{6.11}$$

Por último, determinaremos a estimativa para última parcela de (6.8)

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\Omega} \alpha_{\epsilon} (b(u_r) - b(u^{\epsilon})) \nabla u^{\epsilon} \cdot \nabla (w_r - u_r) \, dx \\
&\leq \alpha_1 \|b'\|_{1,\infty} \int_{\Omega} |u_r - u^{\epsilon}| |\nabla u^{\epsilon}| |\nabla (w_r - u_r)| \, dx \\
&\leq c_1 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \int_{\Omega} |u_r - u^{\epsilon}| |\nabla (w_r - u_r)| \, dx \\
&\leq c_1 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \int_{\Omega} |u_r - u^{\epsilon}| |\nabla (w_r - u^{\epsilon} + u^{\epsilon} - u_r)| \, dx \\
&\leq c_1 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \int_{\Omega} |u_r - u^{\epsilon}| (|\nabla (u^{\epsilon} - w_r)| + |\nabla (u^{\epsilon} - u_r)|) \, dx.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Tomando em consideração as desigualdade de Cauchy-Schwarz e, em seguida, a de Poincaré, em cada uma das parcelas da inequação acima, obtêm-se

$$|I_3| \leq c_2 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2 + c_2 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega} \|\nabla (u^{\epsilon} - w_r)\|_{0,\Omega}.$$

Do lema 6.1.1, existe  $\beta > 0$ , independente de  $\epsilon$ , de maneira que

$$A(u_r; u^{\epsilon} - u_r, u^{\epsilon} - u_r) \geq \beta \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2.$$

e, além disso, considerando as estimativas obtidas para  $I_1, I_2$  e  $I_3$  na relação (6.8), resulta

$$\begin{aligned}
\beta \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2 &\leq c_1 \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega} \|\nabla (u^{\epsilon} - w_r)\|_{0,\Omega} + c_2 \|u_r\|_{1,\infty} \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad + c_2 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2 + c_2 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega} \|\nabla (u^{\epsilon} - w_r)\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
(\beta - c_2(\|u_r\|_{1,\infty} + \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty})) \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega}^2 &\leq c_1 \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega} \|\nabla (u^{\epsilon} - w_r)\|_{0,\Omega} \\
&\quad + c_2 \|u^{\epsilon}\|_{1,\infty} \|\nabla (u^{\epsilon} - u_r)\|_{0,\Omega} \|\nabla (u^{\epsilon} - w_r)\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|\nabla(u^\epsilon - u_r)\|_{0,\Omega} \leq c_3(1 + \|u^\epsilon\|_{1,\infty})\|\nabla(u^\epsilon - w_r)\|_{0,\Omega}/(\beta - c_2(\|u_r\|_{1,\infty} + \|u^\epsilon\|_{1,\infty})),$$

onde  $c_3 := \max\{c_1, c_2\}$  e, desde que  $\|u_r\|_{1,\infty} + \|u^\epsilon\|_{1,\infty}$  seja suficientemente pequeno.

Daí conclui-se o resultado (6.6). ■

## 6.2 Convergência do RFB Reduzido

Nesta parte do trabalho iremos estudar a convergência do esquema numérico **RFB reduzido** proposto a partir da metodologia residual free bubble. Isto é, mostraremos que  $u_h$  (solução do problema discreto (4.23)) converge para  $u$  (solução fraca do problema efetivo (4.28)). Este resultado será formulado mediante o teorema a seguir.

**Teorema 6.2.1** Seja  $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$  a solução fraca do problema efetivo associado ao problema multiescala não linear dado em (3.25), seja  $u_h$  a solução de (4.17), e sejam  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  nas hipóteses (3.2) e (3.3), respectivamente. Então, para  $h$  suficientemente pequeno, existe uma constante  $C$ , que independe de  $h$ , tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(M) \left[ \left( \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^3} + \frac{\epsilon}{h} + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} \right) + h \right]. \quad (6.13)$$

**Demonstração.**

Para cada  $v \in V_h$ , via expansão de Taylor, tem-se

$$\begin{aligned} a(u_h, v) &= a(u + (u_h - u), v) \\ &= a(u, v) + A(u; u_h - u, v) + R(u, u_h, v) \\ &= (f, v) + A(u; u_h - u, v) + R(u, u_h, v) \\ &= a_r(u_h, v) + A(u; u_h - u, v) + R(u, u_h, v). \end{aligned}$$

Ou, de maneira equivalente

$$A(u; u - u_h, v) = a_r(u_h, v) - a(u_h, v) + R(u, u_h, v) = a_f(u_h, v) + a_b(u_h, v) - a(u_h, v) + R(u, u_h, v)$$

A partir de  $E(., .) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ ., dado por (4.40),  $A(u; u - u_h, v)$  pode ser reescrito como segue

$$A(u; u - u_h, v) = E(u_h, v) + a_f(u_h, v) + R(u, u_h, v).$$

Como  $A(u; P_h u - u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$  então

$$A(u; u - u_h, v) + \underbrace{A(u; P_h u - u, v)}_{=0} = E(u_h, v) + a_f(u_h, v) + R(u, u_h, v) \quad \forall v \in V_h.$$

Assim,

$$A(u; P_h u - u_h, v) = E(u_h, v) + a_f(u_h, v) + R(u, u_h, v) \quad \forall v \in V_h. \quad (6.14)$$

Do resultado de coercividade estabelecido em 4.3.1, para o membro esquerdo de (6.14), com  $v = P_h u - u_h$ , temos que

$$A(u; P_h u - u_h, P_h u - u_h) \geq C \|P_h u - u_h\|_{1,\Omega}^2. \quad (6.15)$$

Já, para o membro direito de (6.14), a partir das estimativas para  $|R|$  e  $|a_f|$ , dadas em (5.7) e (5.20), respectivamente, e como, em particular,

$$E(u_h, P_h u - u_h) \leq \bar{E} \|u_h\|_{1,\Omega} \|P_h u - u_h\|_{1,\Omega} \quad (4.42),$$

obtém-se

$$\|P_h u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(\bar{E} + h + \|u - u_h\|_{1,4,\Omega}^2). \quad (6.16)$$

Como

$$\|u - u_h\|_{1,4,\Omega}^2 \leq C \|u - u_h\|_{1,\infty} \|u - u_h\|_{1,\Omega} \quad (\text{desigualdade de interpolação})$$



então

$$\|P_h u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(\|u - u_h\|_{1,\infty})\|u - u_h\|_{1,\Omega} + \bar{E} + h).$$

Uma vez que

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq \|P_h u - u\|_{1,\infty,\Omega} + \|P_h u - u_h\|_{1,\infty,\Omega},$$

e como  $u_h \in B$  (4.43), e por outra parte sabe-se que  $\|P_h u - u\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch$  (4.33), então, existe  $h_0 > 0$  tal que para cada  $0 < h \leq h_0$  podemos supor

$$C\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo

$$\|P_h u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{2}\|u - u_h\|_{1,\Omega} + C(\bar{E} + h). \quad (6.17)$$

Em seguida, somando  $\|P_h u - u\|_{1,\Omega}$  em ambos os membros de (6.17) resulta

$$\|P_h u - u_h\|_{1,\Omega} + \|P_h u - u\|_{1,\Omega} \leq \|P_h u - u\|_{1,\Omega} + \frac{1}{2}\|u - u_h\|_{1,\Omega} + C(\bar{E} + h). \quad (6.18)$$

Mas, por desigualdade triangular temos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|P_h u - u_h\|_{1,\Omega} + \|P_h u - u\|_{1,\Omega}.$$

Daí (6.18) resulta

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|P_h u - u\|_{1,\Omega} + \frac{1}{2}\|u - u_h\|_{1,\Omega} + C(\bar{E} + h).$$

Então

$$\frac{1}{2}\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|P_h u - u\|_{1,\Omega} + C(\bar{E} + h).$$

Agora, como  $\|P_h u - u\|_{1,\Omega} \leq Ch$  então

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(h + \bar{E}).$$

Finalmente, do corolário 5.0.11 conclui-se com a demonstração do teorema. ■

**Observação 6.2.1** Para  $\epsilon < h$ , tem-se:

•

$$\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{h}\right)^3} + \frac{\epsilon}{h} + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}} < C\sqrt{\frac{\epsilon}{h}}. \quad (6.19)$$

• de (6.19) e (6.13),

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(M)\left[\sqrt{\frac{\epsilon}{h}} + h\right]. \quad (6.20)$$

# Capítulo 7

## Resultados Numéricos, Conclusões e Futuros Trabalhos

No presente capítulo, na seção 7.2, serão exibidos os resultados numéricos relativos à versão unidimensional do problema modelo multiescala não linear, para uma escolha particular do coeficiente  $\alpha_\epsilon$  e o termo de fonte  $f$  a ser especificado mais adiante. Estes resultados estão relacionados aos gráficos das aproximações numéricas correspondentes às metodologias Galerkin e residual free bubble. Também neste capítulo, nas seções 7.3 e 7.4, respectivamente, iremos discutir conclusões e os futuros trabalhos referente a esta tese.

### 7.1 Implementação

Nesta seção exibiremos o procedimento seguido para a implementação do método de elementos finitos proposto a partir da metodologia residual free bubble, para o modelo multiescala não linear unidimensional

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u^\epsilon)\frac{du^\epsilon}{dx}] = f \quad \text{em } I, \quad (7.1)$$

$$u^\epsilon(0) = u^\epsilon(1) = 0, \quad (7.2)$$

onde  $I$  representa o intervalo aberto  $(0, 1)$ .

Como veremos mais adiante, a implementação via Galerkin para (7.1) será uma situação particular deste procedimento.

Em seguida faremos uma comparação, via exemplos numéricos, das duas metodologias com o intuito de colocar em evidência que a metodologia residual free bubble mantém sua eficiência no tratamento numérico de problemas não lineares com coeficientes altamente oscilatórios.

Os resultados numéricos que mostraremos a seguir serão dados para uma situação particular do problema modelo multiescala não linear em uma dimensão (7.1).

Para tal, no modelo (7.1) consideraremos

$$f(x) = 1, \quad \alpha_\epsilon(x) = \frac{1}{2 + 1.8 \sin(\frac{2\pi x}{\epsilon})}, \quad b(t) = 2 + \sin(t). \quad (7.3)$$

A solução exata para o correspondente problema (7.1) é dado através da relação seguinte:

$$\cos(u^\epsilon) - 2u^\epsilon - 1 = g(x), \quad (7.4)$$

onde

$$g(x) = x^2 + 1.8 \frac{\epsilon}{2\pi} \left[ -x \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) \right] - a \left( 2x - \frac{1.8\epsilon}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) + \frac{0.9\epsilon}{\pi} \right)$$

e

$$a = a2/a1,$$

$$a1 = 2 - \frac{0.9\epsilon}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right) \quad \text{e} \quad a2 = 1 + \frac{0.9\epsilon}{\pi} \left( -\cos\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right) \right).$$

A seguir serão exibiremos alguns os gráficos das soluções  $u^\epsilon$  do problema modelo multiescala unidimensional não linear (7.1) correspondentes aos coeficientes e termo de fonte dados por (7.3).

**Observação 7.1.1** Os gráficos (7.1)-(7.4), das soluções da sequência de problemas (7.1), correspondentes a  $\epsilon = 1/4, \epsilon = 1/8, \epsilon = 1/16, \epsilon = 1/32$ , respectivamente, colocam em evidência a influência do caráter oscilatório do coeficiente  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  em relação à solução do respectivo problema.

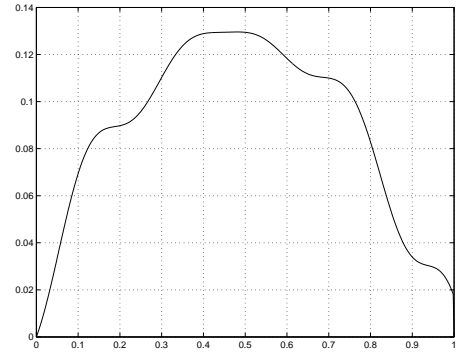
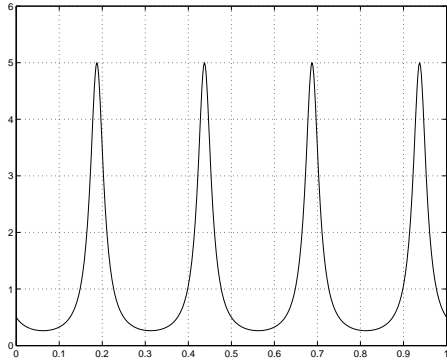


Figura 7.1: Gráficos do coeficiente  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e da solução exata  $u^\epsilon(\cdot)$  para  $\epsilon = 1/4$ .

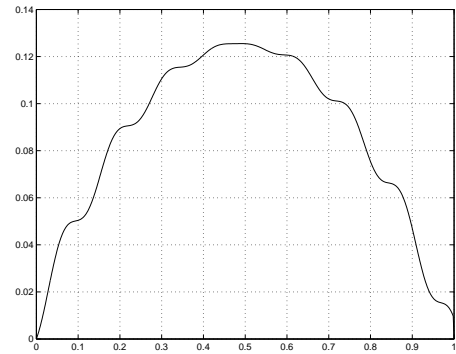
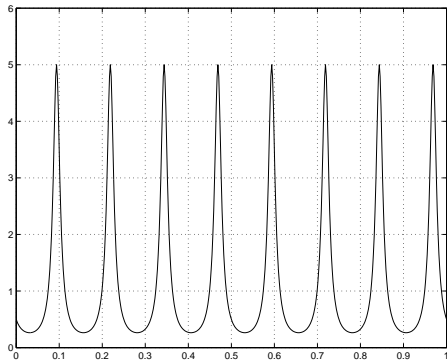


Figura 7.2: Gráficos do coeficiente  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e da solução exata  $u^\epsilon(\cdot)$  para  $\epsilon = 1/8$ .

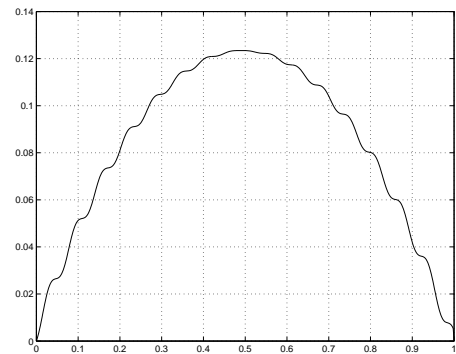
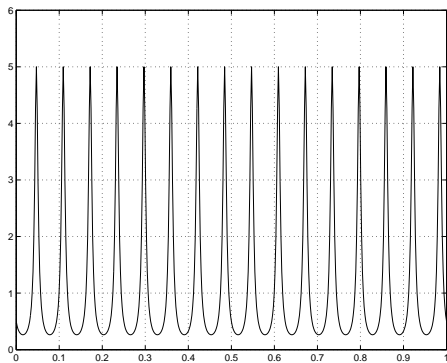


Figura 7.3: Gráficos do coeficiente  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e da solução exata  $u^\epsilon(\cdot)$  para  $\epsilon = 1/16$ .

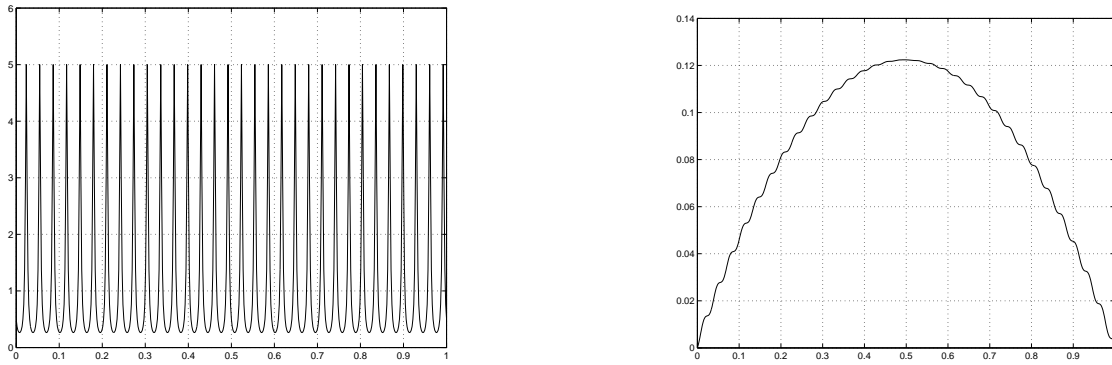


Figura 7.4: Gráficos do coeficiente  $\alpha_\epsilon(\cdot)$  e da solução exata  $u^\epsilon(\cdot)$  para  $\epsilon = 1/32$ .

### 7.1.1 Procedimento de Implementação via Método de Newton

A seguir detalharemos o sistema linear decorrente do uso do Método de Newton a ser utilizado para determinar soluções aproximadas de acordo com as duas metodologias de elementos finitos antes anunciadas: Galerkin e RFB.

Seja  $n$  o número de elementos e seja  $xn = [xn(1), xn(2), \dots, xn(n+1)]$  os respectivos nós associados à partição do intervalo  $I = [0, 1]$ . Admitiremos uma partição uniforme com parâmetro de malha  $h$ . Desta maneira,

$$xn(1) = 0, xn(2) = h, \dots, xn(n+1) = 1.$$

Definiremos o  $i$ -ésimo elemento (subintervalo) com

$$I_i = (xn(i), xn(i+1)), \quad i = 1, \dots, n.$$

A respectiva base para o espaço de elementos finitos das funções lineares por partes

$(V_h)$  a denotaremos com  $\{\psi_i\}_{i=1}^{n+1}$ ,

onde, para  $j = 2, 3, \dots, n$ ,

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-xn(j-1)}{h} & \text{se } x \in I_{j-1}, \\ \frac{xn(j+1)-x}{h} & \text{se } x \in I_j, \end{cases}$$

e

$$\frac{d\psi_j}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{sobre } I_{j-1}, \\ -\frac{1}{h} & \text{sobre } I_j. \end{cases}$$

Então a solução numérica associada a (7.1), via metodologia proposta no presente trabalho (RFB), poder expressa como

$$u_h = \sum_{j=1}^{n+1} U(i)\psi_j \quad (7.5)$$

para alguma  $\mathbf{U} = (U(1), U(2), \dots, U(n+1))^T$ , onde cada  $U(i)$  depende do parâmetro  $\epsilon$ . A incógnita  $\mathbf{U}$  é determinada através da solução do sistema

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad (7.6)$$

onde cada componente da aplicação não linear  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é dado por

$$F_i(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{I_i} \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \frac{du_h}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx + \int_{I_i} \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \frac{du_b}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \right] - \int_I f(x) \psi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (7.7)$$

Para estimar a solução do problema numérico discreto (7.6), faremos uso do método de Newton clássico. Com este intuito, iremos explicitar o sistema linear correspondente ao referido método.

Para cada  $j$  fixo, a equação (7.6) é reduzida para

$$\begin{aligned} & \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \frac{du_h}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} + \int_{I_j} \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \frac{du_h}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} \\ & + \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \frac{du_b}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} + \int_{I_j} \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b) \frac{du_b}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} \\ & = \int_{I_j} \psi_{j-1} + \int_{I_j} \psi_j, \end{aligned}$$

onde, a partir de (7.5),

$$u_h|_{I_{j-1}} = U(j-1)\psi_{j-1} + U(j)\psi_j \quad (7.8)$$

e

$$u_h|_{I_j} = U(j)\psi_j + U(j+1)\psi_{j+1}. \quad (7.9)$$

Então

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{h} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub) \frac{du_h}{dx}}_{=A1} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_{I_j} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub) \frac{du_h}{dx}}_{A2} \\ & + \underbrace{\frac{1}{h} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub) \frac{du_b}{dx}}_{=B2} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_{I_j} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub) \frac{du_b}{dx}}_{B2} = h, \end{aligned} \quad (7.10)$$

com  $u_b|_{I_{j-1}} \in H_0^1(I_{j-1})$  solução da equação local

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h) \frac{du_b}{dx}] = \frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h) \frac{du_h}{dx}] + 1 \quad \text{em } I_{j-1}, \quad (7.11)$$

e uma equação local correspondente para  $u_b|_{I_j} \in H_0^1(I_j)$ .

Uma vez que  $u_h|_{I_{j-1}} = U(j-1)\psi_{j-1} + U(j)\psi_j$ , então

$$A1 = \frac{1}{h^2} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub)[-U(j-1) + U(j)],$$

ou, de maneira equivalente,

$$A1 = -\frac{U(j-1)}{h^2} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub) + \frac{U(j)}{h^2} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub).$$

Em forma análoga, tem-se

$$A2 = \frac{U(j)}{h^2} \int_{I_j} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub) - \frac{U(j+1)}{h^2} \int_{I_j} \alpha_\epsilon(x)b(u_h + ub).$$



Resta explicitar as expressões para  $B1$  e  $B2$ . Para tal, usando a linearidade de (7.11) e representação de  $u_h$  dada em (7.8), mostra-se que

$$u_b|_{I_{j-1}} = U(j-1)u_b^{j-1} + U(j)u_b^j + u_f^{j-1}, \quad (7.12)$$

onde

i)  $u_b^{j-1} \in H_0^1(I_{j-1})$  verifica

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)\frac{du_b^{j-1}}{dx}] = \frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)\frac{d\psi_{j-1}}{dx}], \quad \text{em } I_{j-1}. \quad (7.13)$$

ii)  $u_b^j \in H_0^1(I_{j-1})$  é tal que

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)\frac{du_b^j}{dx}] = \frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)\frac{d\psi_j}{dx}], \quad \text{em } I_{j-1}. \quad (7.14)$$

iii)  $u_f^{j-1} \in H_0^1(I_{j-1})$  satisfaz

$$-\frac{d}{dx}[\alpha_\epsilon(x)b(u_h)u_f^{j-1}] = 1, \quad \text{em } I_{j-1}. \quad (7.15)$$

**I:** Desconsiderando o termo de fonte.

Então, (7.12) é reduzida para

$$u_b|_{I_{j-1}} = U(j-1)u_b^{j-1} + U(j)u_b^j \quad (7.16)$$

Resolvendo o problema local (7.13), obtém-se

$$u_b^{j-1}(x) = \psi_j(x) + C^{j-1} \int_{x_{n(j-1)}}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt, \quad (7.17)$$

com  $C^{j-1} = -1/\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx$ .

De igual maneira, a solução do problema local (7.14) é dado por

$$u_b^j(x) = -\psi_j(x) + C^j \int_{xn(j-1)}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt, \quad (7.18)$$

onde  $C^j = 1/\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx$ .

Então, substituindo (7.17) e (7.18) em (7.16), obtém-se

$$\begin{aligned} u_b|_{I_{j-1}} &= U(j-1)\psi_j(x) - \frac{U(j-1)}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \int_{xn(j-1)}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt \\ &\quad - U(j)\psi_j(x) + \frac{U(j)}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \int_{xn(j-1)}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{du_b}{dx}|_{I_{j-1}} &= \frac{U(j-1)}{h} - \frac{U(j-1)}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} \\ &\quad - \frac{U(j)}{h} + \frac{U(j)}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))}. \end{aligned}$$

De igual forma, para  $u_h|_{I_j}$  dado por (7.9), temos

$$\begin{aligned} u_b|_{I_j} &= U(j)u_b^j + U(j+1)u_b^{j+1} \\ &= U(j)\left[\psi_{j+1}(x) - \frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \int_{xn(j)}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt\right] \\ &\quad + U(j+1)\left[-\psi_{j+1}(x) + \frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \int_{xn(j)}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt\right], \end{aligned}$$

e a correspondente expressão para  $\frac{du_b}{dx}|_{I_j}$ .

Agora, substituindo  $A_1, A_2, B_1$ , e  $B_2$  em (7.10), tem-se

$$-\frac{\int_{I_{j-1}} \frac{b(u_h+u_b)}{b(u_h)} dx}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j-1)}{h} + \left( \frac{\int_{I_{j-1}} \frac{b(u_h+u_b)}{b(u_h)} dx}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} + \frac{\int_{I_j} \frac{b(u_h+u_b)}{b(u_h)} dx}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \right) \frac{U(j)}{h} - \frac{\int_{I_j} \frac{b(u_h+u_b)}{b(u_h)} dx}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j+1)}{h} = h \quad j = 2, \dots, n.$$

Se de  $b(u_h+u_b) = b(u_h) + b'(u_h)u_b + \dots$  consideramos unicamente a primeira parcela, recaímos na formulação apresentada no presente trabalho para o correspondente caso unidimensional. Assim, o sistema acima é simplificado para

$$-\frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j-1)}{h} + \left( \frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} + \frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \right) \frac{U(j)}{h} - \frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j+1)}{h} = h \quad j = 2, \dots, n.$$

**II:** Contribuição do termo de fonte.

A solução do problema local associado ao termo de fonte (7.15) é dada por

$$u_f^{j-1}(x) = - \int_{x_{n(j-1)}}^x \frac{t}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt + C_f^{j-1} \int_{x_{n(j-1)}}^x \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt,$$

onde  $C_f^{j-1} = \frac{1}{(\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt)} \int_{I_{j-1}} \frac{t}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt$ .

Então,

$$\frac{du_f^{j-1}}{dx} = -\frac{x}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h)} + \frac{C_f^{j-1}}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h)}, \quad x \in I_{j-1}.$$

Uma expressão equivalente é dada para  $u_f|_{I_j}$ , e daí

$$\frac{du_f^j}{dx} = -\frac{x}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h)} + \frac{C_f^j}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h)}, \quad x \in I_j,$$

com  $C_f^j = \frac{1}{(\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt)} \int_{I_j} \frac{t}{\alpha_\epsilon(t)b(u_h(t))} dt$ .

Agora, seja  $u_b|_{I_{j-1}}$  dado através de (7.11), e seja a correspondente expressão para

$u_b|_{I_j}$  dada por

$$u_b|_{I_j} = U(j)u_b^j + U(j+1)u_b^{j+1} + u_f^j.$$

Com os dados acima estamos em condições de determinar a contribuição do termo de fonte no sistema (7.6). Para tal, calculemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon b(u_h) \frac{du_f^{j-1}}{dx} &= \frac{1}{h} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon b(u_h) \left[ \frac{-x}{\alpha_\epsilon b(u_h)} + \frac{C_f^{j-1}}{\alpha_\epsilon b(u_h)} \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_{I_{j-1}} (-x + C_f^{j-1}) dx \\ &= \frac{xn(j) + xn(j-1)}{2} + C_f^{j-1} \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h} \int_{I_j} \alpha_\epsilon b(u_h) \frac{du_f^j}{dx} &= \frac{1}{h} \int_{I_j} \alpha_\epsilon b(u_h) \left[ \frac{-x}{\alpha_\epsilon b(u_h)} + \frac{C_f^j}{\alpha_\epsilon b(u_h)} \right] \\ &= \frac{xn(j+1) + xn(j)}{2} - C_f^j \end{aligned}$$

Assim, a contribuição do termo de fonte é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{I_{j-1}} \alpha_\epsilon b(u_h) \frac{du_f^{j-1}}{dx} - \frac{1}{h} \int_{I_j} \alpha_\epsilon b(u_h) \frac{du_f^j}{dx} &= \frac{xn(j) + xn(j-1)}{2} + C_f^{j-1} \\ &\quad + \frac{xn(j+1) + xn(j)}{2} - C_f^j \\ &= \frac{xn(j+1) + xn(j-1)}{2} + C_f^{j-1} - C_f^j \\ &= h + C_f^{j-1} - C_f^j. \end{aligned}$$

Assim, o sistema resultante será:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{U}) &= \sum_{j=2}^n \left[ -\frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j-1)}{h} + \left( \frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} + \frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \right) \frac{U(j)}{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \right) \frac{U(j+1)}{h} + C_f^{j-1} - C_f^j \mathbf{e}_j, \quad U = (U(2), \dots, U(n)). \end{aligned}$$

Logo, cada componente de  $\mathbf{F}$  é dado por

$$F_i(U) = \underbrace{-\frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j-1)}{h}}_{=A_i} + \underbrace{\left( \frac{1}{\int_{I_{j-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} + \frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \right) \frac{U(j)}{h}}_{=B_i} - \underbrace{\frac{1}{\int_{I_j} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \frac{U(j+1)}{h}}_{=C_i} + \underbrace{C_f^{j-1} - C_f^j}_{=D_i}.$$

A matriz Jacobiana associada a  $\mathbf{F}$  está dada por

$$\mathbf{DF}(\mathbf{U}) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \right)_{i,j=2}^n,$$

onde

$$\frac{\partial F_i}{\partial U_j} = \frac{\partial A_i}{\partial U_j} + \frac{\partial B_i}{\partial U_j} + \frac{\partial C_i}{\partial U_j} + \frac{\partial D_i}{\partial U_j},$$

onde, para  $K(i, j) := \frac{\partial U_i}{\partial U_j}$ , entradas desta matriz são dadas como segue.

$$\frac{\partial A_i}{\partial U_j} = -\frac{K(i-1, j) \left( \int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \right) + U(i-1) \int_{I_{i-1}} \frac{b'(u_h(x))(K(i-1, j)\psi_{i-1} + K(i, j)\psi_i)}{\alpha_\epsilon(x)(b(u_h(x)))^2} dx}{\left( \int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \right)^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial U_j} = & - \int_{I_{i-1}} \frac{b'(u_h(x))(K(i-1, j)\psi_{i-1} + K(i, j)\psi_i)}{\left( \int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \right)^2} dx \\ & - \int_{I_i} \frac{b'(u_h(x))(K(i, j)\psi_i + K(i+1, j)\psi_{i+1})}{\left( \int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \right)^2} dx \\ & + \left( \frac{1}{\int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} + \frac{1}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx} \right) K(i, j), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial U_j} = -\frac{K(i, j) \left( \int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \right) + U(i) \int_{I_i} \frac{b'(u_h(x))(K(i, j)\psi_i + K(i+1, j)\psi_{i+1})}{\alpha_\epsilon(x)(b(u_h(x)))^2} dx}{\left( \int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \right)^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_f^{i-1}}{\partial U_j} &= \frac{1}{\left(\int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx\right)^2} \int_{I_{i-1}} \frac{b'(u_h(x))(K(i-1,j)\psi_{i-1} + K(i,j)\psi_i)}{\alpha_\epsilon(x)(b(u_h(x)))^2} \int_{I_{i-1}} \frac{t}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \\ &\quad - \frac{1}{\int_{I_{i-1}} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h)} dx} \int_{I_{i-1}} \frac{x b'(u_h(x))(K(i-1,j)\psi_{i-1} + K(i,j)\psi_i)}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x)) dx^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_f^i}{\partial U_j} &= \frac{1}{\left(\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx\right)^2} \int_{I_i} \frac{b'(u_h(x))(K(i,j)\psi_i + K(i+1,j)\psi_{i+1})}{\alpha_\epsilon(x)(b(u_h(x)))^2} dx \int_{I_i} \frac{x}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x))} dx \\ &\quad - \frac{1}{\int_{I_i} \frac{1}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h)} dx} \int_{I_i} \frac{x b'(u_h(x))(K(i,j)\psi_i + K(i+1,j)\psi_{i+1})}{\alpha_\epsilon(x)b(u_h(x)) dx^2}. \end{aligned}$$

Portanto, com os elementos acima, estamos em condições de explicitar o sistema linear associado ao método de Newton: dada uma aproximação para (7.6) (com  $b(u_h)$  em lugar de  $b(u_h + u_b)$ ), o corretor de Newton  $\delta\mathbf{U}$  é determinado a partir do sistema:

$$\mathbf{DF}(\mathbf{U})\delta\mathbf{U} = -\mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad (7.19)$$

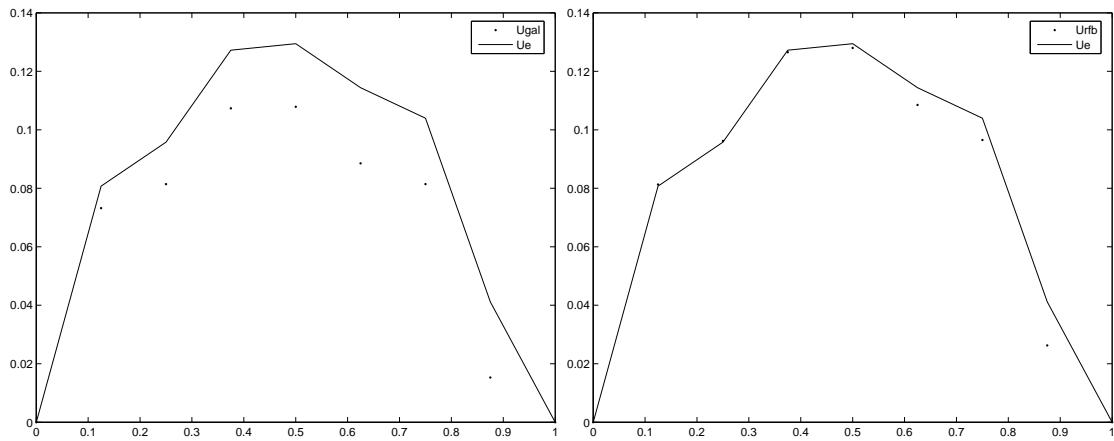
## 7.2 Testes Numéricos: Galerkin e RFB reduzido

Da formulação numérica introduzida mediante o uso da metodologia RFB, as soluções numéricas para o problema multiescala (7.1) são determinadas mediante um processo iterativo a partir do sistema (7.19) de acordo com o método clássico de Newton. Usaremos estas aproximações para estabelecer uma comparação, via exemplos numéricos, com as soluções obtidas por meio da metodologia de elementos finitos clássica (Galerkin).

Os gráficos que serão exibidos a seguir representam as aproximações para o problema modelo não linear (7.1), com coeficientes e termo de fonte são dados por (7.3), que resultam de introduzir o método de Galerkin com elementos finitos lineares por partes e o a formulação numérica RFB reduzido. Estes gráficos serão comparados ao correspondente gráfico da solução exata de nosso problema modelo, tomando em consideração diferentes valores para os parâmetros  $\epsilon$  e  $h$ .

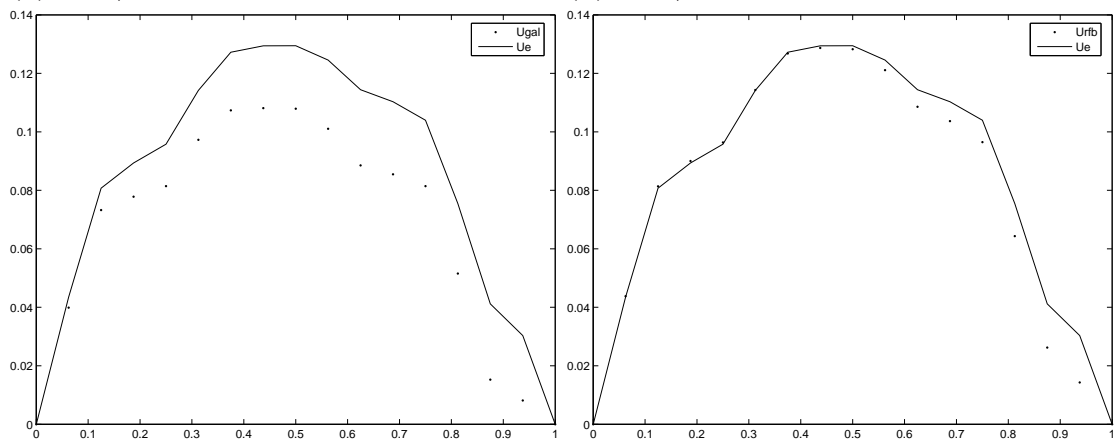
Trataremos os casos  $h < \epsilon$  e  $\epsilon < h$  em forma separada.

Caso 7.2.1 ( $h < \epsilon$ )



(a)  $h=1/8$

(b)  $h=1/8$

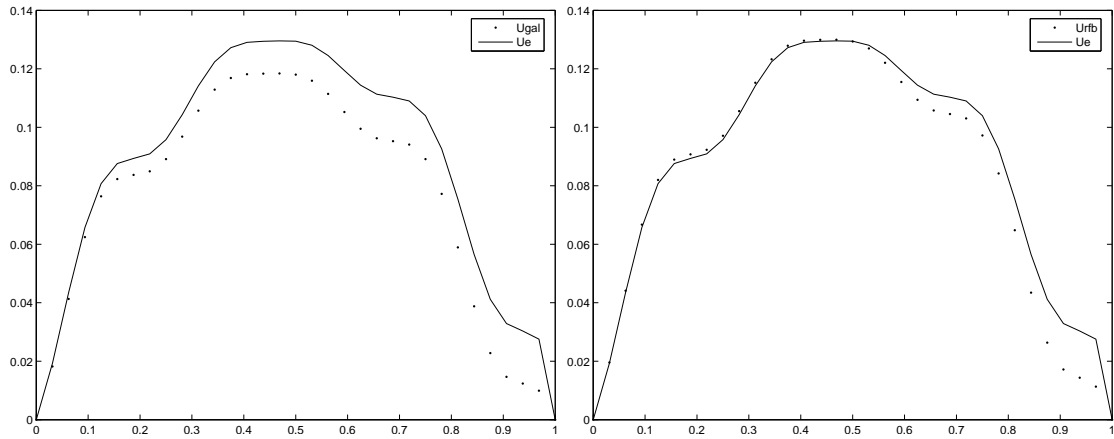


(c)  $h=1/16$

(d)  $h=1/16$

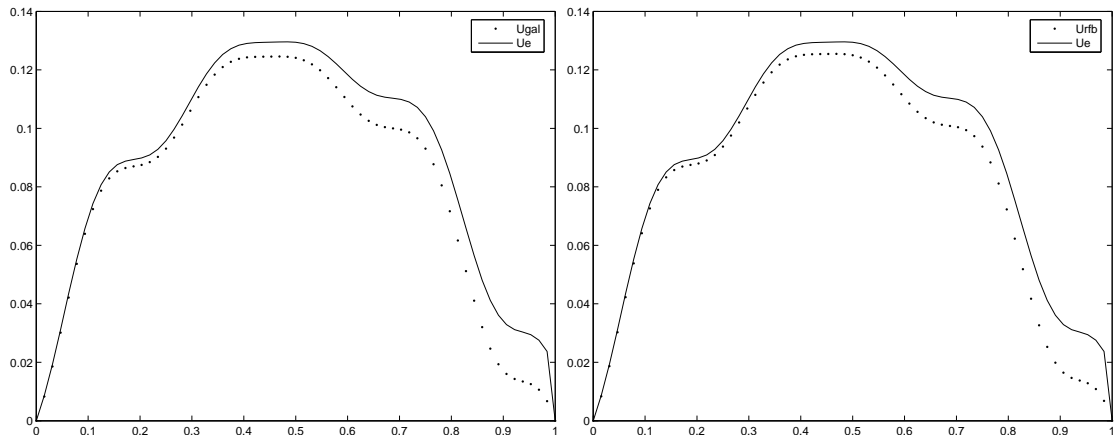
$U_{gal}$  : Solução Galerkin.       $U_e$  : Solução exata.       $U_{rfb}$  : Solução RFB.

Figura 7.5: Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com  $\epsilon = 1/4$ .



(a)  $h=1/32$

(b)  $h=1/32$



(c)  $h=1/64$

(d)  $h=1/64$

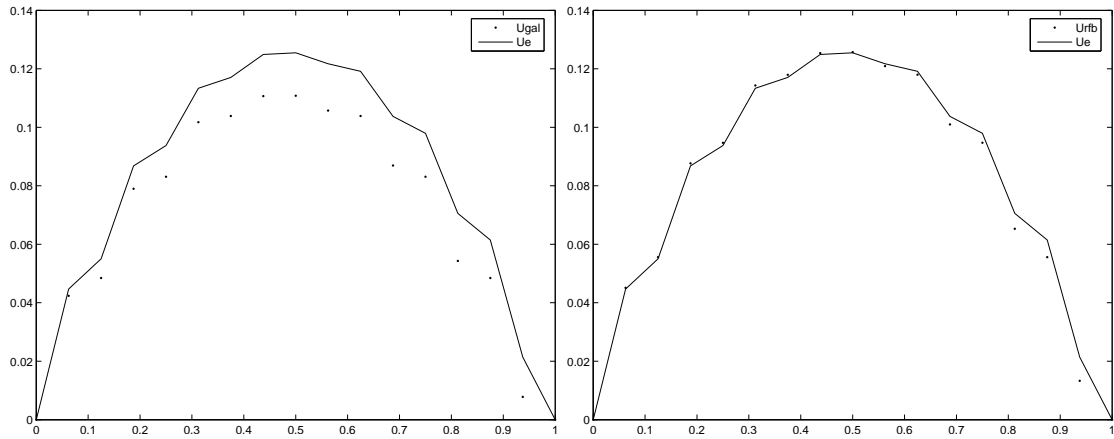
$U_{gal}$  : Solução Galerkin.

$U_e$  : Solução exata.

$U_{gal}$  : Solução RFB reduzido.

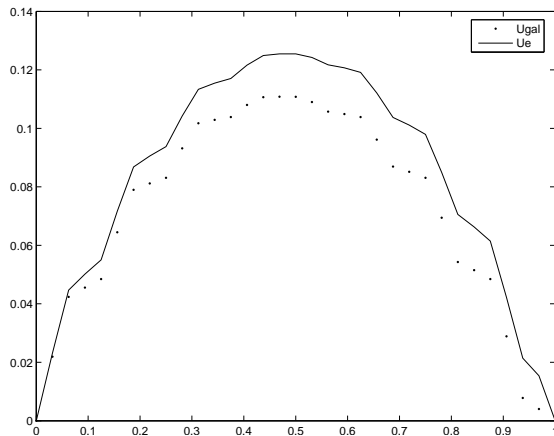
Figura 7.6: Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com  $\epsilon = 1/4$ .



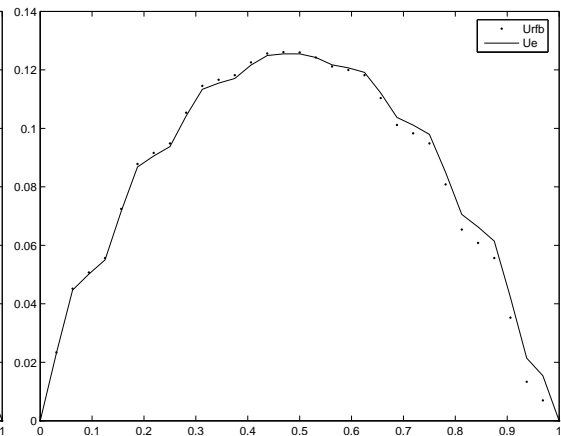


(a)  $h=1/16$

(b)  $h=1/16$



(c)  $h=1/32$



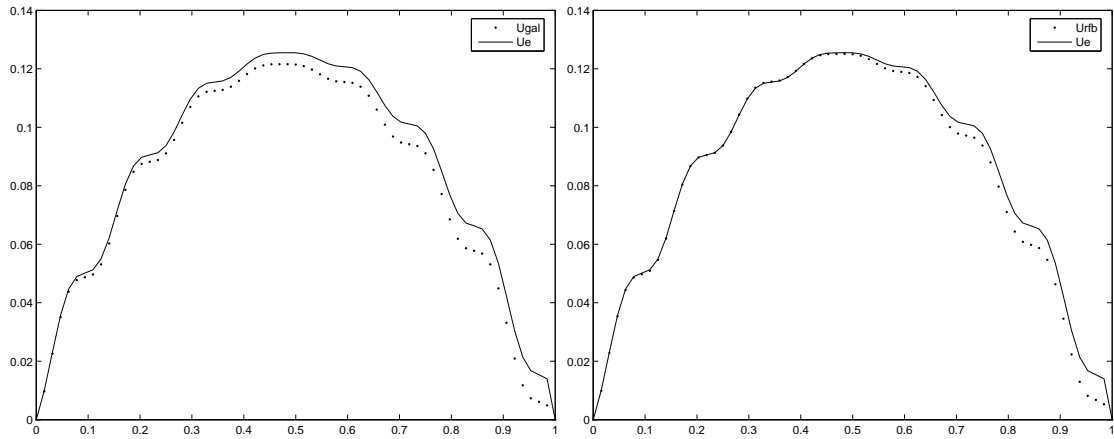
(d)  $h=1/32$

$U_{gal}$  : Solução Galerkin.

$U_e$  : Solução exata.

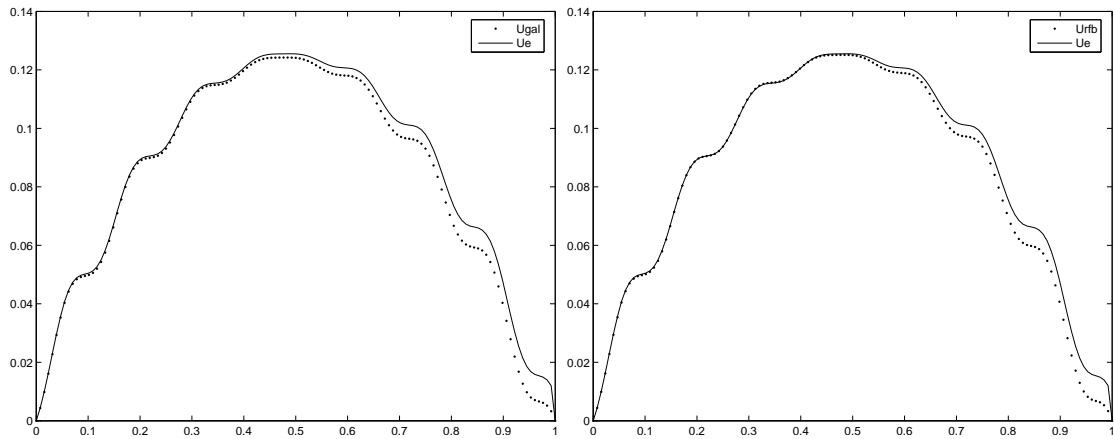
$U_{gal}$  : Solução RFB reduzido.

Figura 7.7: Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com  $\epsilon = 1/8$ .



(a)  $h=1/64$

(b)  $h=1/64$



(c)  $h=1/128$

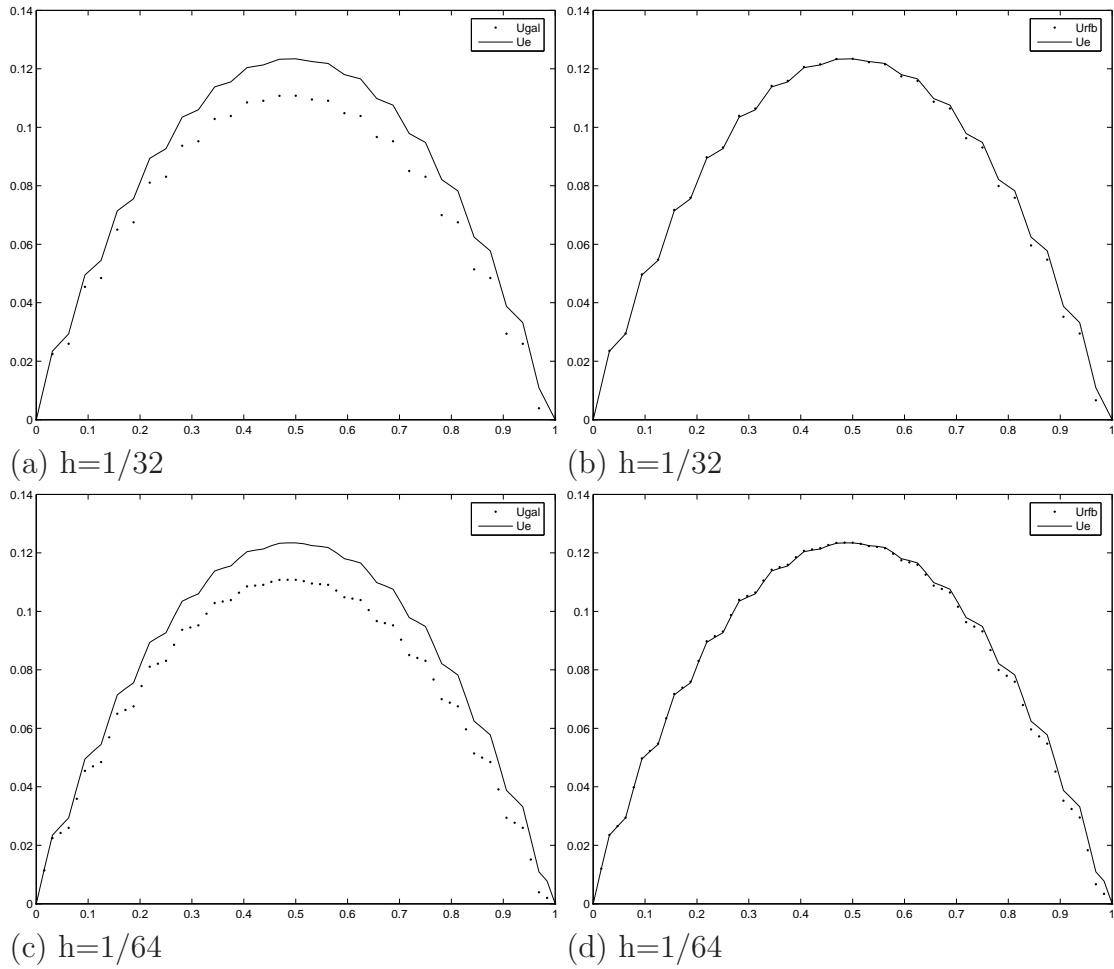
(d)  $h=1/128$

$U_{gal}$  : Solução Galerkin.

$U_e$  : Solução exata.

$U_{gal}$  : Solução RFB reduzido.

Figura 7.8: Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com  $\epsilon = 1/8$ .

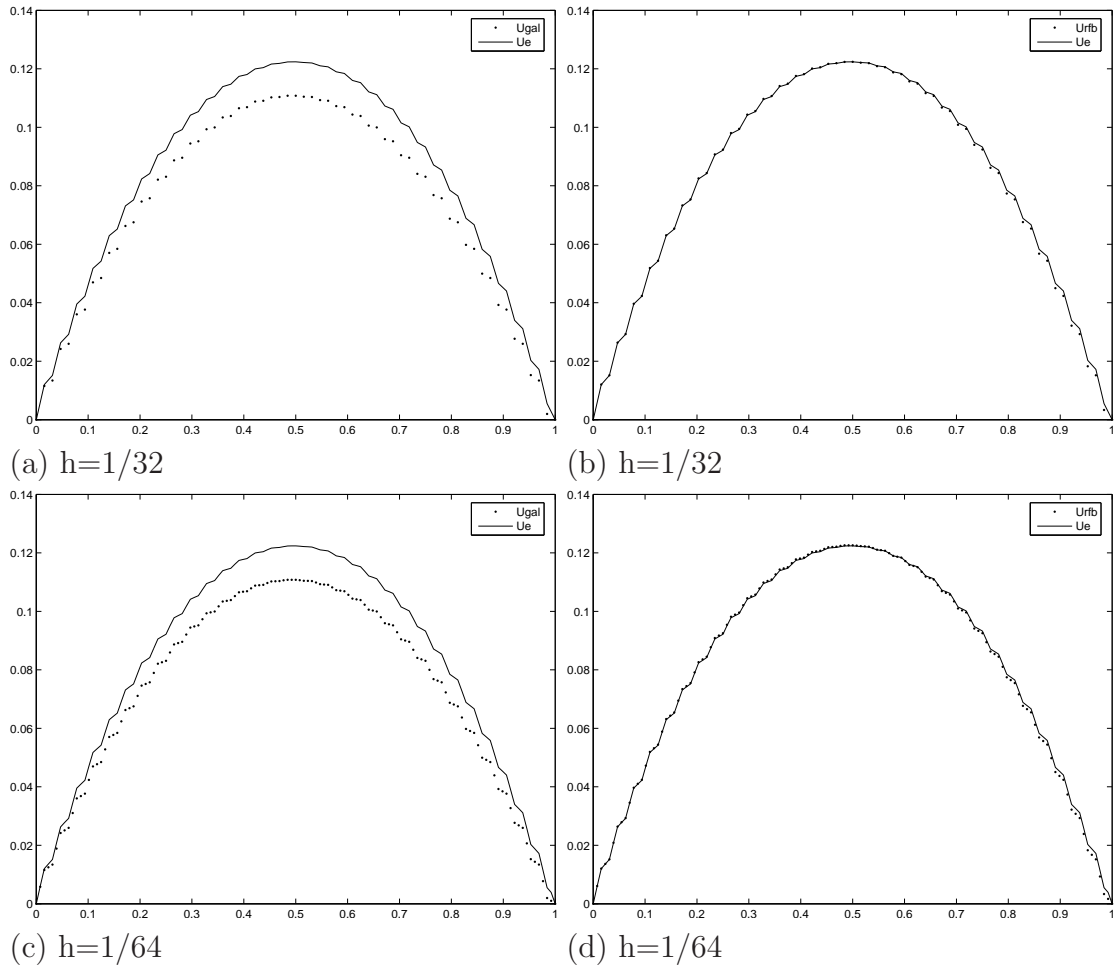


$U_{gal}$  : Solução Galerkin.

$U_e$  : Solução exata.

$U_{gal}$  : Solução RFB reduzido.

Figura 7.9: Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com  $\epsilon = 1/16$ .

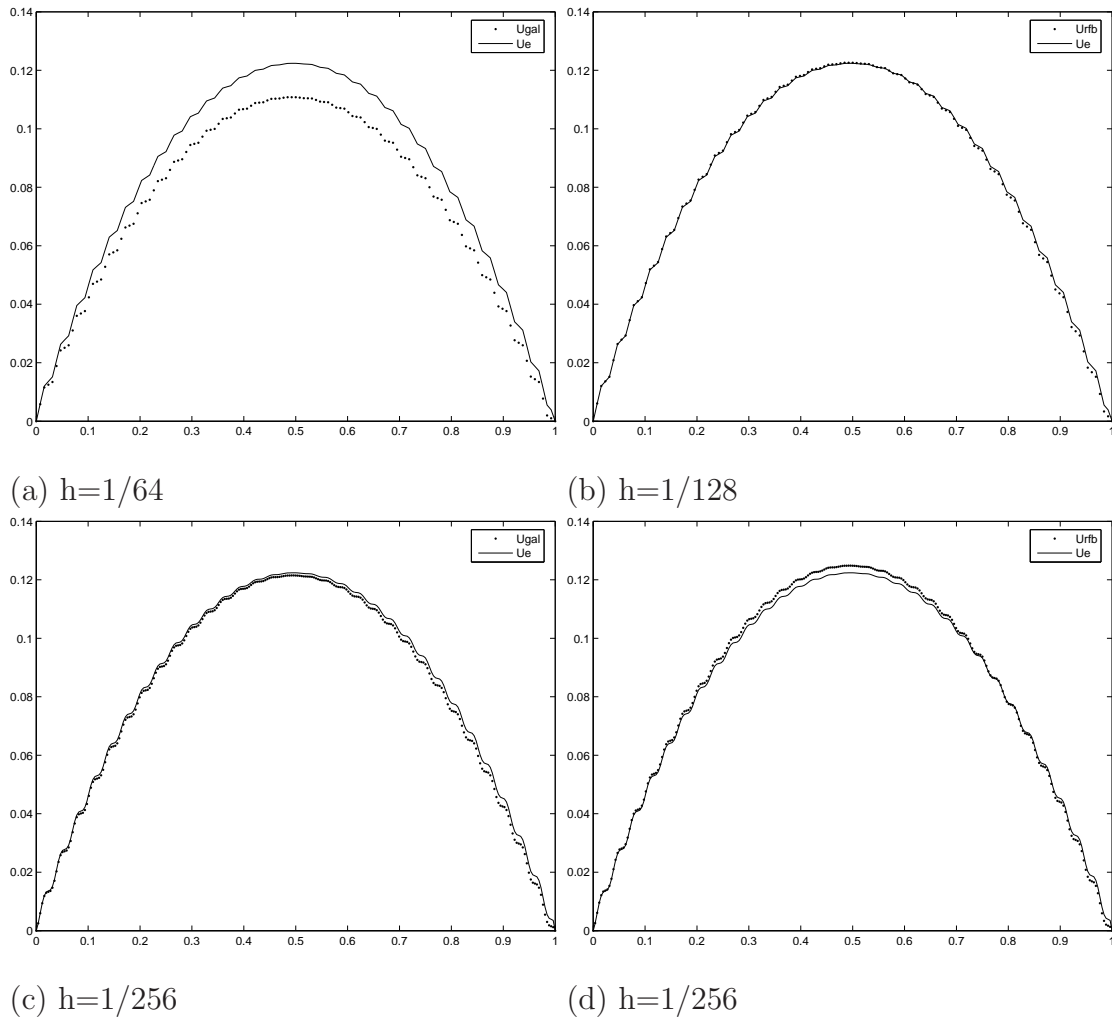


$U_{gal}$  : Solução Galerkin.

$U_e$  : Solução exata.

$U_{gal}$  : Solução RFB reduzido.

Figura 7.10: Comparação entre as soluções exata e as aproximações via Galerkin e RFB com  $\epsilon = 1/32$ .



$U_a$  : Solução aproximada.

$U_e$  : Solução exata.

Figura 7.11: Comparação entre as soluções exata e a aproximada via Galerkin com  $\epsilon = 1/32$ .

Nos gráficos acima, para efeitos de comparar as metodologias consideradas, estão presentes a melhor aproximação via Galerkin e a correspondente via RFB reduzido.

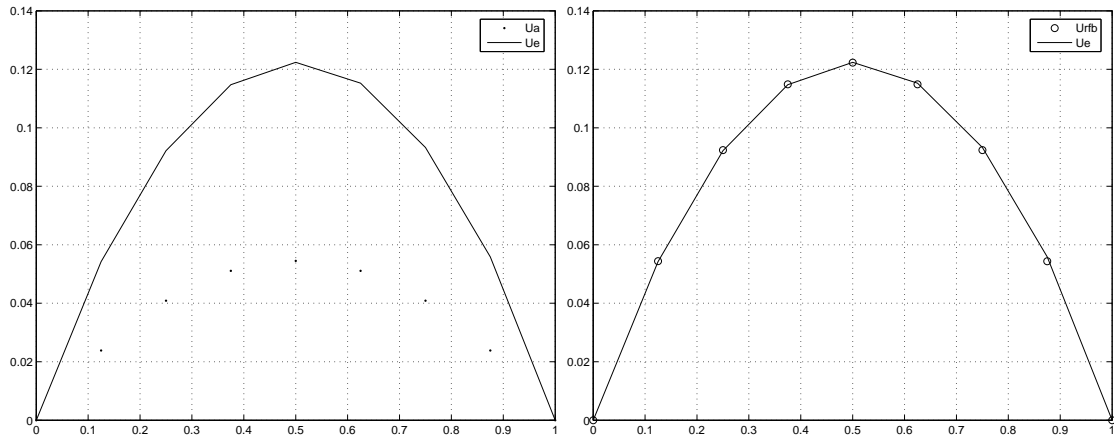
Em relação aos gráficos 7.5 - 7.11 acima mostrados, podemos destacar o seguinte:

- (a) A medida que o coeficiente  $\alpha_\epsilon$  se torna mais oscilante, isto é, quando consideramos valores do parâmetro  $\epsilon$  cada vez menores ( $\epsilon = 1/4, \dots, 1/32$ ), as correspondentes aproximações numéricas via método de Galerkin para (7.1) resultam cada vez piores.

- (b) Nota-se nestes gráficos que, a melhora na aproximação Galerkin só acontece quando refinamos a malha, como pode observar-se, em particular, nos gráficos (7.10)-(7.11), quando fixamos o valor  $\epsilon = 1/32$  e consideramos os diferentes valores para o parâmetro da malha:  $h = 1/64, \dots, 1/256$ .
- (c) Observa-se nos gráficos 7.5 - 7.11 que a formulação RFB reduzido se manifesta mais acurado, quando comparado com o respectivo caso tratado com a metodologia de elementos finitos clássica.
- (d) As duas formulações numéricas têm o mesmo comportamento para o caso em que  $h$  é muito menor que  $\epsilon$ , como fica evidente nos gráficos (c) e (d) de (7.6) e(7.8).

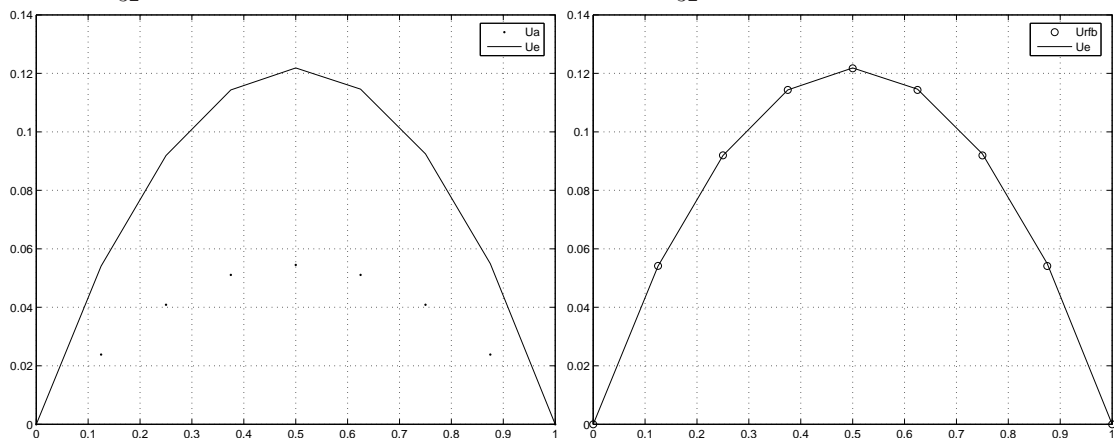
**Caso 7.2.2** ( $\epsilon < h$ ). Nos gráficos (7.12) e (7.13), para efeitos de comparar as metodologias consideradas, estão presentes a melhor aproximação via Galerkin e a correspondente via RFB reduzido.

Como o indicam as figuras logo abaixo, este caso é totalmente favorável à formulação RFB reduzido. Isto é, o processo de homogeneização numérica é dado através desta formulação.



(a)  $\epsilon = \frac{1}{32}$

(b)  $\epsilon = \frac{1}{32}$



(c)  $\epsilon = \frac{1}{64}$

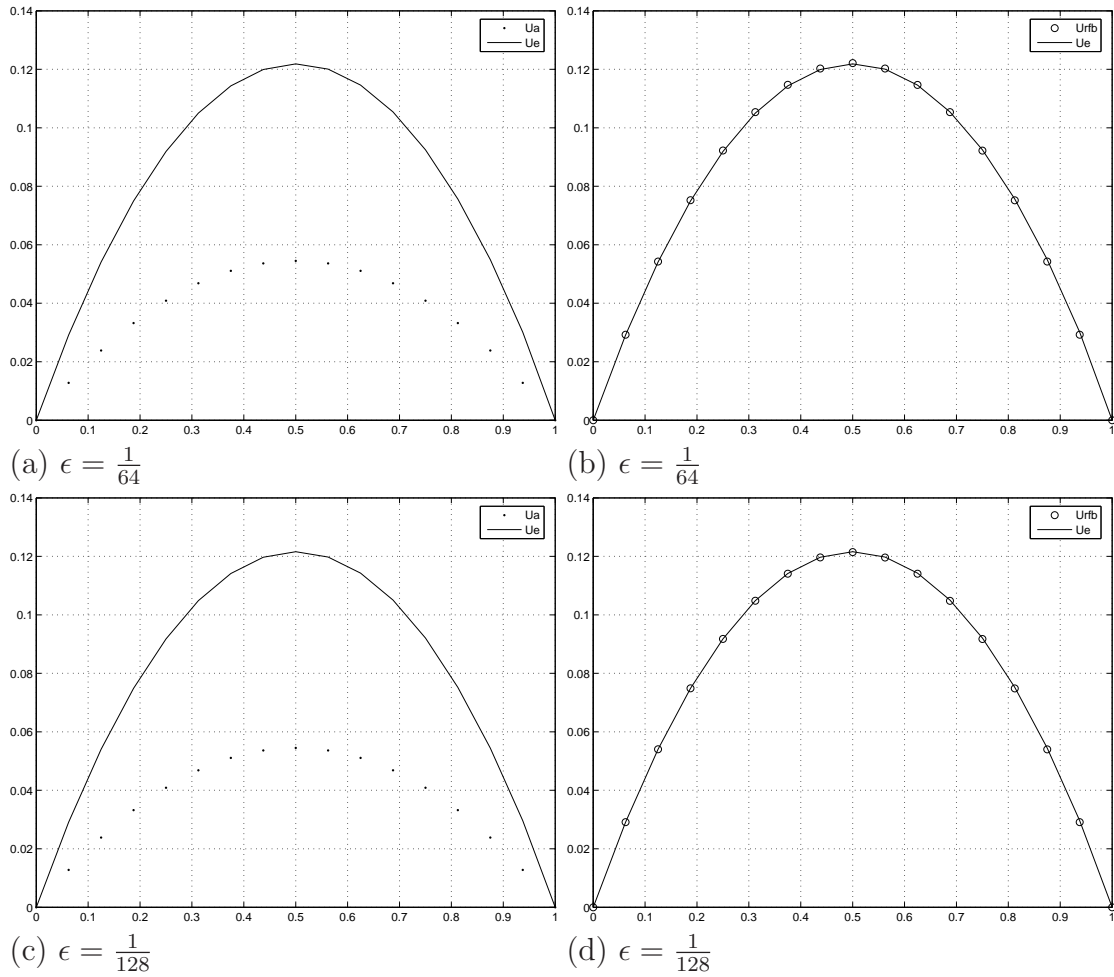
(d)  $\epsilon = \frac{1}{64}$

Ua: Solução aproximada via Galerkin.

Ue: Solução exata.

Urfb: Solução aproximada via RFB.

Figura 7.12: Comparação entre as soluções exata e as aproximadas via Galerkin e RFB, com  $h = 1/8$ , respectivamente.



Ua: Solução aproximada via Galerkin.

Ue: Solução exata.

Urfb: Solução aproximada via RFB.

Figura 7.13: Comparação entre as soluções exata e as aproximadas via Galerkin e RFB, com  $h = 1/16$ , respectivamente.



### 7.3 Conclusões

Nesta seção comunicaremos algumas das conclusões relativas ao presente trabalho, as quais serão destacadas de acordo com o correspondente capítulo. Antes, porém, cabe destacar que embora nosso modelo tenha sido estudado com as metodologias multiescala MSFEM e HMM em Chen e Savchuk (2008) e W. E e Zhang (2004), respectivamente, não há relatos na literatura especializada de alguém ter tratado nosso modelo não linear com o método RFB. Além disso, os autores antes citados partem do pressuposto que o operador não linear associado ao problema efetivo em questão, quando linearizado em torno da solução homogeneizada, é um isomorfismo de  $H_0^1(\Omega)$  em  $H_0^{-1}(\Omega)$ . No presente trabalho esta hipótese é substituída pela hipótese de **solução suficientemente pequena** na norma  $W^{1,\infty}$ .

- a) No capítulo 3, sob certas hipóteses em relação ao coeficiente oscilatório  $\alpha_\epsilon$ , formalizamos o problema de Cauchy associado ao problema (3.1) que foi o objeto de estudo. Revemos em particular a questão de existência de solução. Em seguida, utilizando ideias clássicas, determinamos de maneira didática o problema efetivo correspondente ao modelo não linear (3.1). Isto é corroborado com o resultado obtido mediante um procedimento matemático rigoroso dado em Boccardo e Murat (1981). Não podemos deixar de mencionar que, mediante um procedimento formal semelhante, Tokarzewski e Adrianov (2001) chegam à mesma equação efetiva.
- b) No capítulo 4 mostramos como diversas versões do RFB podem ser obtidas de forma matematicamente consistente para o tratamento numérico de nosso problema modelo multiescala não linear (3.1) e propomos um algoritmo numérico. Também, neste capítulo, analisamos a questão de existência de solução numérica correspondente à formulação de elementos finitos RFB que propusemos.
- c) Através da identidade (4.27), estabelecemos a conexão entre a metodologia

RFB e o processo de homogeneização para nosso problema modelo não linear multiescala. A mesma identidade permite justificar a nossa proposta de formulação numérica RFB reduzida.

- d) No capítulo 6 temos introduzido uma análise de erro correspondente às formulações numéricas no ambiente da metodologia RFB: **RFB completo** e **RFB reduzido** apresentados no presente trabalho. Isto é dado através da proposição 6.1.3 e teorema 6.2.1, respectivamente. A taxa de convergência obtida para a formulação reduzida permite recuperar a taxa determinada em Chen e Savchuk (2008) e W. E e Zhang (2004) para nosso modelo não linear, como explicitado na observação (6.19).
- e) O teorema 6.2.1 é uma resposta afirmativa, via metodologia RFB, ao problema de homogeneização numérica que pode ser formulado a partir do problema não linear (3.1) tratado . Para este objetivo temos exigido a hipótese de periodicidade sobre o coeficiente  $\alpha_\epsilon$ .

#### 7.4 Futuros trabalhos

- a) Analisar cada uma das outras possíveis formulações numéricas sugeridas a partir de (4.16).
- b) Estender o mesmo estudo para uma classe maior de problemas elípticos não lineares com coeficientes oscilatórios.
- c) Realizar estudo semelhante com o correspondente problema de evolução associado ao problema modelo multiescala não linear tratado no presente trabalho.
- d) Implementação numérica para o problema modelo multiescala bidimensional não linear tratado no presente trabalho.

## Referências Bibliográficas

- J. L. Lions A. Bensoussan e G. Papanicolaou. Studies in mathematics and its applications. In: **Asymptotic analysis for periodic structures**. North-Holland Publishing Company, 1978.
- G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, 23:1482–1518, 1992.
- G. Allaire. Periodic homogenization and effective mass theorems for the schödinger equation. Relatório técnico, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, September 5, 2006.
- M. Artola e G. Duvaut. Un résultat d’homogénéisation pour une classe de problèmes de diffusion non lineares stationaires. **Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5° série**, 4:1–28, 1982.
- L. L. Auriaul e J. Lewandrouwska. Diffusion/adsorption macrotransport in porus media: homogenization analysis. **Geotechnique**, 43:457–469, 1993.
- L. Boccardo e F. Murat. Remarque sur l’homogeneisation de certens problemes quase-lineares. **Portugaliae Mathematica**, 41:1–4, 1982.
- L. Boccardo e T. Murat. Homogénéisation de problèmes equase-linéaries. **PUBL. IRMA**, 3:1–17, 1981.
- S. Brenner e R. Scott. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**. Springer, 1994.

- H. Brezis. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.
- F. Brezzi. **Interacting with the Subgrid World**. páginas 69–82, Chapman and Hall/CRC, 2000.
- F. Brezzi e A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. **Math.Models Methods Appl. Sci.**, 4:571–587, 1994.
- Z. Chen. Multiscale methods for elliptic homogenization problems. **Numer. Equations Methods Partial Differential Equations**, 22:317–360, 2006.
- Z. Chen e T. Y. Savchuk. Analysis os the multitscale element method for nonlinear and random homogenization problems. **SIAM J. Numer. Anal.**, 46 , Number 1:260–279, 2008.
- P. Ciarlet. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. North-Holland, NY, 1978.
- D. Cioranescu e P. Donato. **Introduction to Homogenization**. Oxford Univ. Press, 1999.
- John B. Conway. **A Course in Functional Analysis**. Springer-Verlag, 1985.
- L. Díaz e R. Naulin. A proof of schauder-tychonoff theorem. **Divulaciones Matemáticas**, 14:47–57, 2006.
- W. E e B. Engquist. Heterogeneous multi-scale methods. **Commun. Math. Sci**, 1:87–132, 2003.
- L. P. Franca e A. Russo. Deriving upwinding, mass lumping and seridual-free bubbles. **Appl. Math. Lett.**, 9:83–88, 1996.
- M. H. Holmes. Texts in applied mathematics, no. 20. In: **Introduction to Perturbation Methods**. Springer-Verlag, 1995.

- U. Hornung. **Homogenization and Porous Media**. Springer Verlag, New York, 1997.
- T. Y. Hou e X. H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. **J. Comput. Phys.**, 134:169–189, 1997.
- P. Ming e X. Yue. Numerical methods for multiscale elliptic problems. **Journal of Computational Physics**, 214:421–445, 2006.
- G. A. Pavliotis e A. S. M. Stuart. Multiscale methods: Averaging and homogenization. In: **Texts in Applied Mathematics, Vol. 53**. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- J. Touma P. L. Wierenga. R. Haverkamp, M. Vauclin e G. Vachaud. A comparison of numerical solution models for one-dimensional infiltration. **Soil. Sci. Soc. Am. J.**, 41:285–294, 1977.
- R. Rannacher e R. Scott. Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximation. **Math. Comp**, 54:437–445, 1982.
- F. Rochinha e A . L. Madureira. Modelagem multiescala em materiais e estruturas. Relatório técnico, Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, Volume 12, 2004.
- E. Sanchez-Palencia. Non homogeneous media and vibration theory. In: **Lectures Notes in Physics, 127**. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- G. Sangalli. Capturing small scales in elliptic problems using a residual free bubble finite element method and simulation. **A SIAM Interdisciplinary Journal**, 1: 485–503, 2003.
- M. Sarkis e H. Versieux. A three-scale finite element method for elliptic equations with rapidly oscillating periodic coefficients. In: **Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 55, p. 763-770**, 2006.

- X. H. Wu T. Y. Hou e Z. Cai. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients. **Math. Comp.**, 68: 913–943, 1999.
- S. Tokarzewski e I. Adrianov. Effective coefficients for real non-linear and fictitious linear temperature-dependent periodic composites. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 36:187–195, 2001.
- S. M. Kozlov V. V. Jikov e O. A. Oleinik. **Homogenization of differential operators and integral functions**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- H. Versieux e M. Sarkis. Numerical boundary corrector for elliptic equations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 22:577–589, 2006.
- P. Ming W. E e P. Zhang. Analysis on the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems. **Journal of the American Mathematical Society**, 18:121–156, 2004.
- J. Xu. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear pdes. **SIAM J. Numer. Anal.**, 33:1759–1777, 1996.
- T. Y. Hou Y. E. Efendiev e V. Ginting. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications. **Comm. Math. Sci.**, 2:553–589, 2004.

# Apêndice A

## A.1 Apêndice A1

Seja  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  o domínio computacional e seja  $T_h$  uma partição uniforme de  $\Omega$  em triângulos cujos catetos têm tamanho  $h$ . Seja  $l = \lceil \frac{h}{\epsilon} \rceil$  e, portanto,  $l\epsilon < \epsilon(l+1)$ . A seguir tomaremos como referência o primeiro elemento  $T_h$ , denotado com  $K_1$  e, cujos vértices são  $(0, 0)$ ,  $(h, 0)$  e  $(h, h)$ . Também consideraremos o elemento acima de  $K_1$ , o qual o denotaremos com  $K_2$ , com vértices  $(0, 0)$ ,  $(h, h)$  e  $(0, h)$ . A partir destes elementos, formamos o quadrado  $Q = K_1 \cup K_2$ .

**Proposição A.1.1** No interior de  $K_1$  há um número finito de células de lado  $\epsilon$ , tal que

$$\text{área}(K_1) - \text{área}(K_\epsilon) \leq ch\epsilon, \quad (\text{A.1})$$

onde  $K_\epsilon$  representa a união das células interiores ao  $K_1$

**Demonstração.** Consideremos uma partição uniforme do quadrado  $Q$  em células cujos lados têm tamanho  $\epsilon$ . Agora, partindo de  $(0, 0)$ , na horizontal (assim como vertical) teremos  $l$  quadradinhos de tamanho  $\epsilon$ . Caso seja  $l\epsilon \leq h$ , à direita da última coluna de quadradinhos, se forma uma parte de  $K_1$  com o formato de um quadrilátero que pode-se decompor num retângulo, de base  $b$  e altura  $h - b$ , e um triângulo retângulo de cateto  $b$ , com  $b \leq \epsilon$ . Este quadrilátero o denotaremos com  $KV$ . Logo, em relação a sua área temos

$$|KV| = b(h - b) + \frac{b^2}{2} \leq bh - \frac{b^2}{2} = bh \leq \epsilon h.$$

O número de quadradinhos interiores ( $N_i$ ) a  $K$  é dado por

$$N_i = (l - 1) + (l - 2) + \dots + 1 = \frac{l(l - 1)}{2}.$$

A partir daí, seja

$$K_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{l(l-1)/2} I_\epsilon(x_K^i),$$

com  $I_\epsilon(x_K^i) = x_K^i + \epsilon I$ ,  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ , e  $x_K^i$  representa o centro da  $i$ -ésima célula no interior de  $K_1$ .

Note-se que, o número de quadradinhos sobre a diagonal de  $K_1$  coincide com o número  $l$  (quantidade de quadradinhos na horizontal). Desta maneira, devemos retirar de  $K_1$ ,  $l$  triângulos com catetos de tamanho  $\epsilon$  para, assim, destacar as células interiores a  $K_1$ . Denotaremos com  $KD$  a união destes triangulinhos. Então a área de  $KD$  será:

$$|KD| = l\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right).$$

Como  $\epsilon l \leq h$  então

$$|KD| = \frac{\epsilon}{2}(l\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}(h).$$

Daí,

$$|KD| \leq \frac{\epsilon h}{2}.$$

Em conclusão temos:

$$|K_1 \setminus K_\epsilon| = |KD \cup KV| = |KD| + |KV| \leq \frac{2}{3}\epsilon h. \quad (\text{A.2})$$

■



## A.2 Apêndice A2

**Proposição A.2.1** Se  $l = \lceil \frac{h}{\epsilon} \rceil$ , então  $(\frac{h}{l\epsilon})$  é limitado.

**Demonstração.**

$$\begin{aligned} l &= \lceil \frac{h}{\epsilon} \rceil \\ \Leftrightarrow \\ l &\leq \frac{h}{\epsilon} < l + 1 \\ 1 &\leq \frac{h}{l\epsilon} < 1 + \frac{1}{l} \\ 1 &\leq \left(\frac{h}{l\epsilon}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{l}\right)^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Como  $(1 + \frac{1}{l})^2 \leq (1 + \frac{1}{l})^l \quad \forall l \geq 2$  então de (A.3) segue que

$$1 \leq \left(\frac{h}{l\epsilon}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{l}\right)^l$$

Por outro lado, como

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^l = e$$

então

$$1 \leq \left(\frac{h}{l\epsilon}\right)^2 < 3. \tag{A.4}$$

Temos com isto confirmado a validade da proposição. ■

**Observação A.2.1** Em particular temos a seguinte limitação:

$$1 \leq \frac{|K|}{|K_\epsilon|} < 3, \tag{A.5}$$

onde  $K$  representa o quadrado formado por dois elementos triangulares.

**Proposição A.2.2**

$$1 - \frac{|K_\epsilon|}{|K|} \leq 2\left(\frac{\epsilon}{h}\right). \tag{A.6}$$

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|K_\epsilon|}{|K|} &= 1 - \frac{(l\epsilon)^2}{h^2} \\ &= \frac{\epsilon}{h} \left( \frac{h}{\epsilon} - \frac{l^2\epsilon}{h} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Seja  $t = \frac{h}{\epsilon}$  e seja  $g(t) = t - \frac{l^2}{t}$ . Então

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{(t+l)(t-l)}{t} \\ &= \left(1 + \frac{l}{t}\right)(t-l). \end{aligned}$$

Como  $l \leq t < l+1$  então

$$0 < \frac{l}{t} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 < t-l < 1.$$

Logo

$$g(t) \leq 1 + \frac{l}{t}$$

e, portanto,

$$g(t) \leq 2. \quad (\text{A.8})$$

De (A.8) e (A.7) segue (A.6). ■

### Proposição A.2.3

$$\left| 1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|} \right| \leq 6 \left( \frac{\epsilon}{h} \right). \quad (\text{A.9})$$

**Demonstração.** É evidente o seguinte:

$$\frac{|K|}{|K_\epsilon|} - 1 = \frac{|K|}{|K_\epsilon|} \left( 1 - \frac{|K_\epsilon|}{|K|} \right). \quad (\text{A.10})$$

De acordo com a observação feita na proposição A.2.1:

$$1 \leq \frac{|K|}{|K_\epsilon|} \leq 3$$

então de (A.10) segue que

$$\frac{|K|}{|K_\epsilon|} - 1 \leq 3\left(1 - \frac{|K_\epsilon|}{|K|}\right)$$

e, por outro lado, da estimativa (A.6) resulta

$$\frac{|K|}{|K_\epsilon|} - 1 \leq 6\left(\frac{\epsilon}{h}\right). \quad (\text{A.11})$$

Mas,

$$\begin{aligned} -6\left(\frac{\epsilon}{h}\right) &\leq 1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|} \\ &\leq \frac{|K|}{|K_\epsilon|} - 1 \quad \text{pois} \quad \left(1 - \frac{|K|}{|K_\epsilon|}\right) \leq 0, \end{aligned}$$

então

$$-6\left(\frac{\epsilon}{h}\right) \leq \frac{|K|}{|K_\epsilon|} - 1. \quad (\text{A.12})$$

Portanto, de (A.11) e (A.12) conclui-se a validade da limitação (A.9). ■

### A.3 Apêndice A3

Os três lemas a seguir são necessários para caracterizar  $\hat{v}_\epsilon$  mediante o problema de Dirichlet (A.17) formulado na proposição A.3.4. O mesmo servirá como estratégia na procura de estimas para  $\hat{v}_\epsilon$ , as quais, por sua vez, servirão como recurso para nossa análise de erro.

**Lema A.3.1** Para cada  $v \in V_h$  tem-se a seguinte identidade:

$$\nabla(\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla v) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \chi^j}{\partial x_i} e_i, \quad (\text{A.13})$$

onde  $\boldsymbol{\chi}$  é dado mediante (3.20).

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned} \nabla(\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla v) &= \nabla\left[\left(\sum_k \chi^k e_k\right) \cdot \left(\sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} e_i\right)\right] \\ &= \nabla\left(\sum_{i,k} \chi^k \frac{\partial v}{\partial x_i} \delta_{i,k}\right) \\ &= \nabla\left(\sum_i \chi^i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_i \nabla\left(\chi^i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\chi^i \frac{\partial v}{\partial x_i})\right) e_j \\ &= \sum_i \left[\sum_j \left(\frac{\partial \chi^i}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \underbrace{\chi^i \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}}_{=0}\right] e_j. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial \chi^i}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j}$  então

$$\nabla(\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla v) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_j} e_j.$$

■

**Observação A.3.1** Em forma compacta a identidade (A.13) pode ser dada mediante a equação

$$\nabla(\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla v) = \frac{1}{\epsilon} (\nabla_y \boldsymbol{\chi})^t \nabla v.$$

**Lema A.3.2** Para cada  $v \in V_h$ ,

$$\operatorname{div}[a(v) \nabla(\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla v)] = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{i,j} \frac{\partial a(v)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\chi$  é dado através de (3.20).

**Demonstração.** De acordo com (A.13) temos que

$$a(v)\nabla(\chi \cdot \nabla v) = \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \chi^j}{\partial x_i} a(v) e_i.$$

Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[a(v)\nabla(\chi \cdot \nabla v)] &= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \operatorname{div}\left[\frac{\partial \chi^j}{\partial x_i} a(v) e_i\right] \\ &= \sum_j \left[ \frac{\partial v}{\partial x_j} \sum_i \operatorname{div}\left(a(v) \frac{\partial \chi^j}{\partial x_i} e_i\right) \right] \\ &= \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \operatorname{div}\left[a(v) \sum_i \frac{\partial \chi^j}{\partial x_i} e_i\right] \\ &= \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \operatorname{div}[a(v)\nabla \chi^j] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \operatorname{div}[a(v)\nabla_y \chi^j], \quad \text{onde } \nabla \chi^j = \frac{1}{\epsilon} \nabla_y \chi^j \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \operatorname{div}_y[a(v)\nabla_y \chi^j], \quad \text{onde } \operatorname{div}_y[a(v)\nabla_y \chi^j] = - \sum_i \frac{\partial a(v)}{\partial y_i} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(- \sum_i \frac{\partial a(v)}{\partial y_i}\right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\sum_i \frac{\partial a(v)}{\partial x_i}\right), \quad \text{uma vez que } \frac{\partial a(v)}{\partial y_i} = \epsilon \frac{\partial a(v)}{\partial x_i} \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \sum_{i,j} \frac{\partial a(v)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Desta maneira temos verificado a igualdade (A.14). ■

**Lema A.3.3** Seja  $v$  um elemento qualquer do espaço  $V_h$ . Então

$$\operatorname{div}[a(v)\nabla v] = \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial a(v)}{\partial x_i}. \quad (\text{A.15})$$

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[a(v)\nabla v] &= \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \operatorname{div}[a(v)e_j] \\
&= \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} [\nabla a(v) \cdot e_j + a(v) \operatorname{div}(e_j)] \\
&= \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \left[ \sum_i \frac{\partial a(v)}{\partial x_i} (e_i \cdot e_j) \right], \quad \text{onde } e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial a(v)}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Então segue a identidade (A.15). ■

**Observação A.3.2** A partir das identidades (A.14) e (A.15), conclui-se que

$$-\operatorname{div}[a(v)\nabla v] = \epsilon \operatorname{div}[a(v)\nabla(\chi \cdot \nabla v)] \quad (\text{A.16})$$

Temos, assim, os elementos necessários para demonstrar a seguinte proposição:

**Proposição A.3.4** Para cada  $v \in V_h$ ,  $\hat{v}_\epsilon$ , definido em (5.27), satisfaz

$$-\operatorname{div}[a(v)\nabla \hat{v}_\epsilon] = f \quad \text{em } K, \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{v}_\epsilon = -\epsilon \chi \cdot \nabla v \quad \text{sobre } \partial K.$$

**Demonstração.** Com efeito,

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}[a(v)\nabla \hat{v}_\epsilon] &= -\operatorname{div}[a(v)\nabla(v_r - v_\epsilon)] \\
&= -\operatorname{div}[a(v)\nabla v_r] + \operatorname{div}[a(v)\nabla v_\epsilon] \\
&= f + \operatorname{div}[a(v)\nabla v_\epsilon] \\
&= f + \operatorname{div}[a(v)(v + \epsilon \chi \cdot \nabla v)], \quad \text{a segunda parcela é nula por (A.16)}.
\end{aligned}$$

Daí segue (A.17). ■

#### A.4 Apêndice A4

Seja  $A(u; \cdot, \cdot)$  dada por (4.29) a forma bilinear coerciva de acordo com a proposição 4.3.1.

**Definição A.4.1** Dado  $x \in \Omega$ , diz-se que  $g_h^x \in V_h$  é função de Green discreta associada à forma bilinear  $A(u; \cdot, \cdot)$  se

$$A(u; g_h^x, v) = (\partial v)(x), \forall v \in V_h, \quad (\text{A.18})$$

onde  $\partial$  representa  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  ou  $\frac{\partial}{\partial x_2}$ .

**Lema A.4.1** Para cada função de Green discreta tem-se a seguinte relação:

$$\|g_h^x\|_{1,\Omega} \leq C \sqrt{\|g_h^x\|_{1,1,\Omega}}. \quad (\text{A.19})$$

**Demonstração.** Se em particular tomamos  $v = g_h^x$  e ao mesmo tempo consideramos a hipótese de coercividade na relação (A.18), então

$$\|g_h^x\|_{1,\Omega}^2 \leq (\partial g_h^x)(x).$$

Logo, integrando sobre  $\Omega$  temos que

$$\|g_h^x\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\partial g_h^x(x)| dx.$$

Daí segue a desigualdade (A.19). ■

**Lema A.4.2** Para cada função de Green  $g_h^x$ ,

$$\|g_h^x\|_{1,1,\Omega} \leq |\ln h|. \quad (\text{A.20})$$

**Demonstração.** Uma prova da relação (A.20) pode ser encontrada em Rannacher e Scott (1982). ■

**Observação A.4.1** Dos lemas A.4.1 e A.4.2 com  $w = g_h^x$ , conclui-se

$$\|\nabla g_h^x\|_{0,\Omega} \leq C\sqrt{|\ln h|} \leq C|\ln h|, \text{ para } h < 1. \quad (\text{A.21})$$