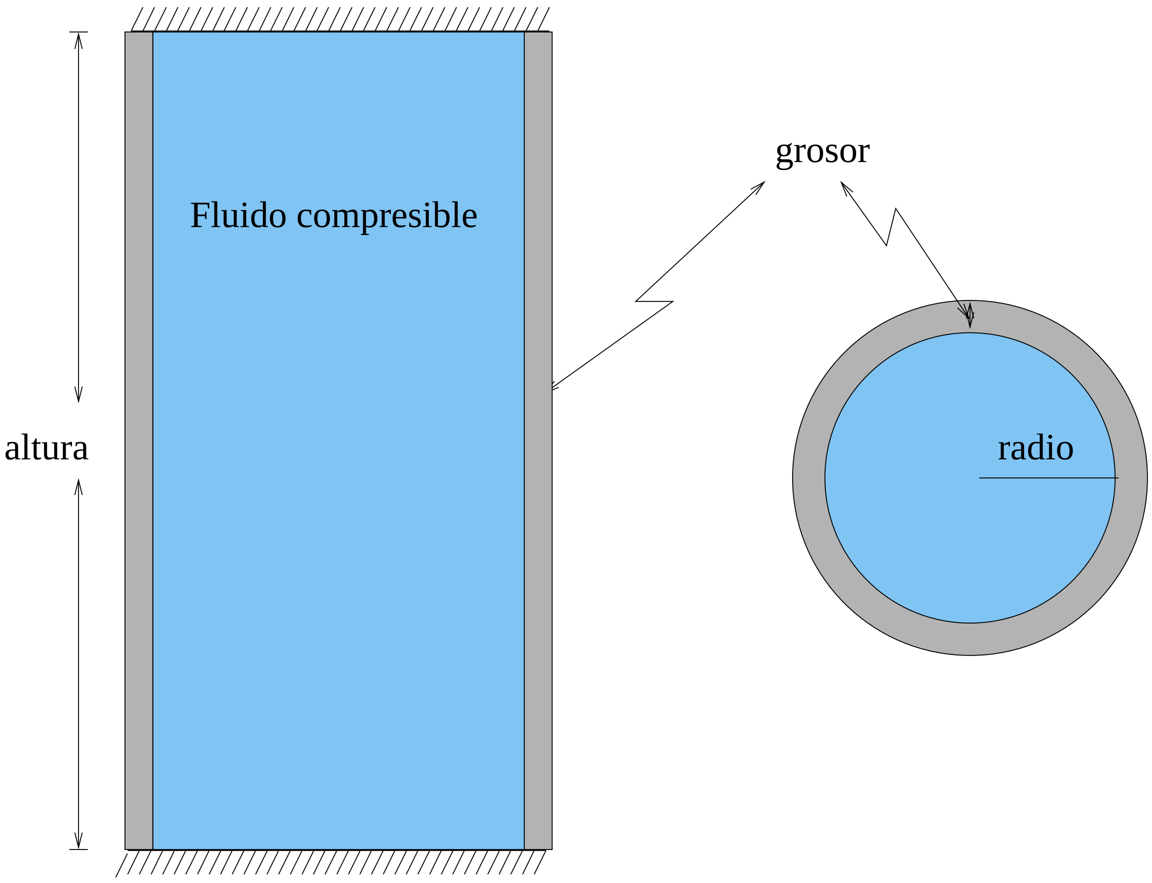
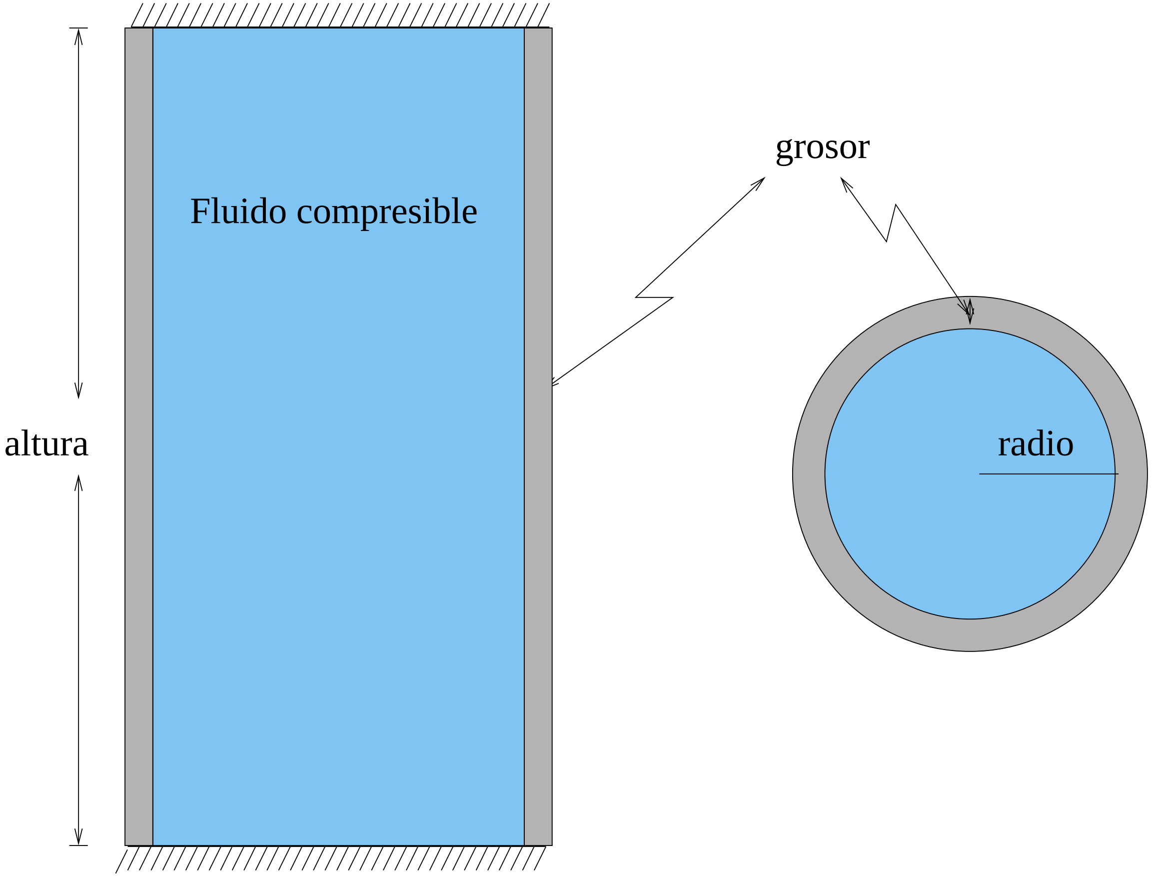
Cálculo de los modos de vibración de placas y cáscaras por elementos cuadrilaterales de bajo orden: MITC4

Erwin Carlos Hernández Hernández

Introducción. Problemática

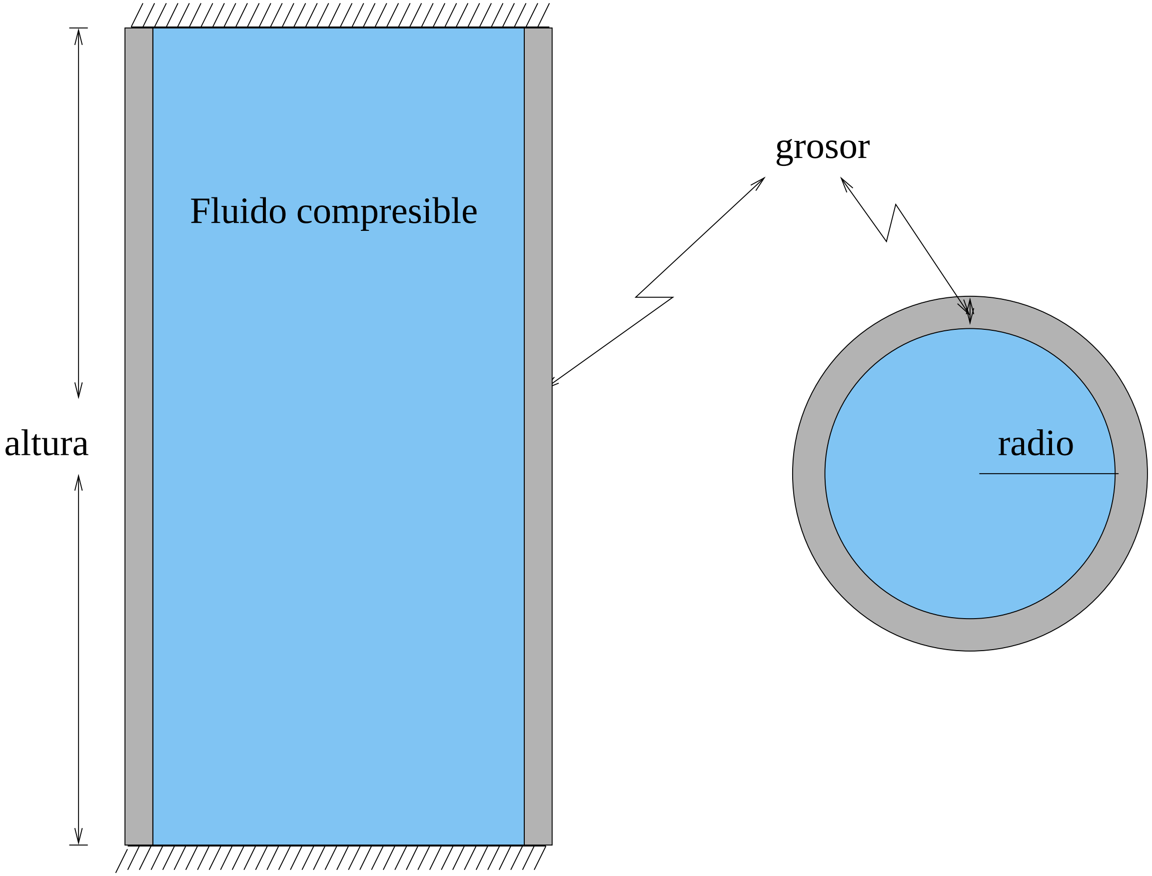


Introducción. Problemática



- Fluido
- Cáscara
- Interacción

Introducción. Problemática



- Fluido
- Cáscara

  ⇒modelo,

  ⇒métodos.
- Interacción

Estructuras Delgadas

Cáscara (Shell): sólido 3D, en el cual una de las dimensiones, el grosor, es pequeño comparado con las otras dos.

Estructuras Delgadas

Cáscara (Shell): sólido 3D, en el cual una de las dimensiones, el grosor, es pequeño comparado con las otras dos.

- Ingenieros:

- Matemáticos:

Estructuras Delgadas

Cáscara (Shell): sólido 3D, en el cual una de las dimensiones, el grosor, es pequeño comparado con las otras dos.

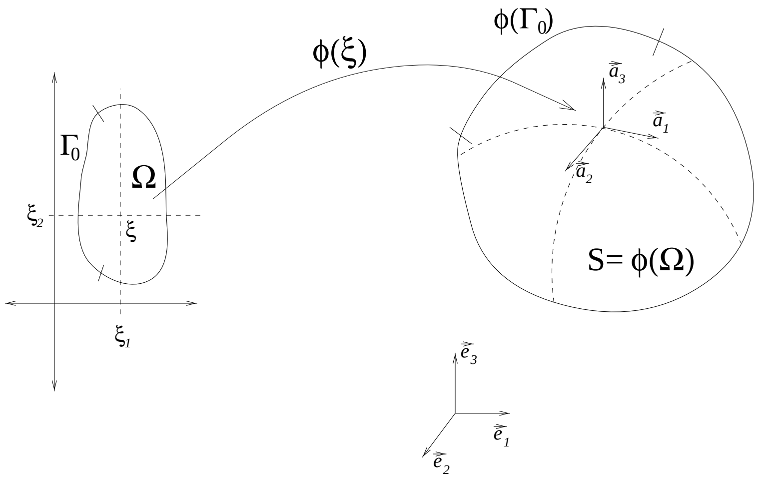
- Ingenieros: Elementos de cáscaras (degenerar elementos finitos 3D, hipótesis cinemáticas sobre el grosor)
  - Mayor versatilidad
  - Menor análisis matemático
- Matemáticos:

Estructuras Delgadas

Cáscara (Shell): sólido 3D, en el cual una de las dimensiones, el grosor, es pequeño comparado con las otras dos.

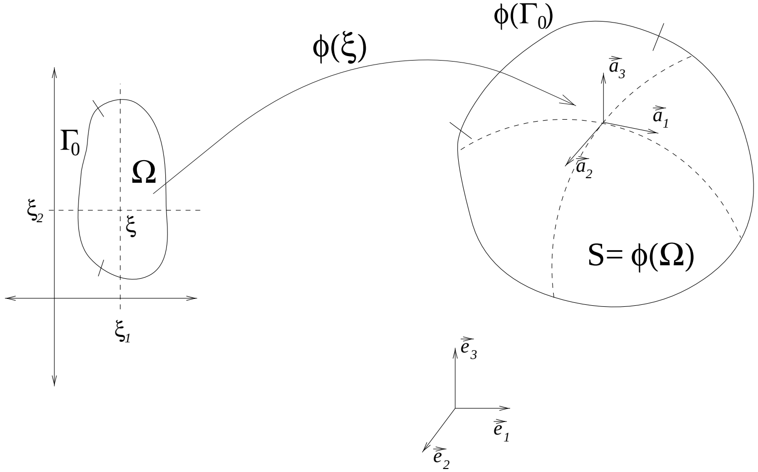
- Ingenieros: Elementos de cáscaras (degenerar elementos finitos 3D, hipótesis cinemáticas sobre el grosor)
  - Mayor versatilidad
  - Menor análisis matemático
- Matemáticos: Discretización de modelos clásicos bidimensionales.
  - Menor versatilidad (*carta*)
  - Mayor análisis matemático

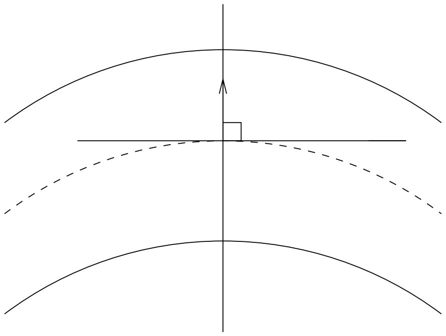
Modelos clásicos de cáscaras



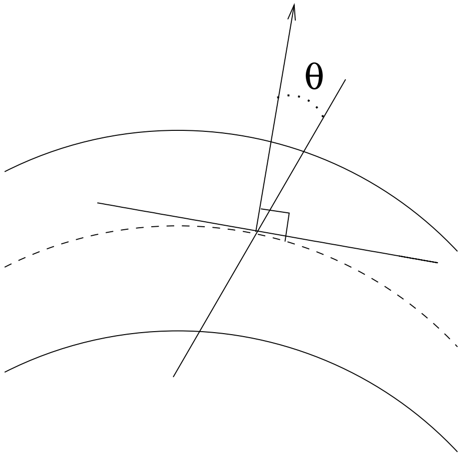
Superficie media de la cáscara.

Modelos clásicos de cáscaras





Antes de la def.



Despues de la def.

Superficie media de la cáscara.

Modelo de Naghdi

$$\mathcal{U} := \left\{ (\vec{u} := (\underline{u}, u_3), \underline{\theta} := (\theta_1, \theta_2)) \in [H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^2 \right\} \cap \mathcal{B}C.$$

Modelo de Naghdi

$$\mathcal{U} := \left\{(\vec{u} := (\underline{u}, u_3), \underline{\theta} := (\theta_1, \theta_2)) \in [H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^2\right\} \cap \mathcal{B}C.$$

$$\begin{cases} Hallar \;\; \omega \in \mathbb{R}^+ \;\; y \;\; (\vec{u}, \underline{\theta}) \in \mathcal{U} \;\; tales \;\; que \\ A\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big) = \omega^2 B\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big) \qquad \forall\, (\vec{v}, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Modelo de Naghdi

$$\mathcal{U} := \left\{ (\vec{u} := (\underline{u}, u_3), \underline{\theta} := (\theta_1, \theta_2)) \in [H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^2 \right\} \cap \mathcal{B}C.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Hallar \;\; \omega \in \mathbb{R}^+ \;\; y \;\; (\vec{u}, \underline{\theta}) \in \mathcal{U} \;\; tales \;\; que \\ A\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta}) \Big) = \omega^2 B\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta}) \Big) \qquad \forall\, (\vec{v}, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} A\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta}) \Big) \;&:=\; t^3 D^f \Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta}) \Big) \\ &+\; t D^m(\vec{u}, \vec{v}) + t D^c \Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta}) \Big). \end{aligned}$$

Modelo de Naghdi

$$\mathcal{U} := \left\{ (\vec{u} := (\cancel{\underline{u}}, u_3), \underline{\theta} := (\theta_1, \theta_2)) \in [H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^2 \right\} \cap \mathcal{B}C.$$

$$\begin{cases} Hallar \;\; \omega \in \mathbb{R}^+ \;\; y \;\; (\vec{u}, \underline{\theta}) \in \mathcal{U} \;\; tales \;\; que \\ A\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big) = \omega^2 B\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big) \qquad \forall\, (\vec{v}, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A\Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big) \;\; &:= \;\; t^3 D^f \Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big) \\ &+ \;\; \cancel{t D^m (\vec{u}, \vec{v})} + t D^c \Big((\vec{u}, \underline{\theta}), (\vec{v}, \underline{\eta})\Big). \end{aligned}$$

Caso particular: Flexión de Placas de Reissner-Mindlin.

Caso Particular: Placas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal convexo.

(PC) *Hallar* $(\beta, w) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^2 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ y $\lambda := \rho\,\omega^2/t^2 > 0$:

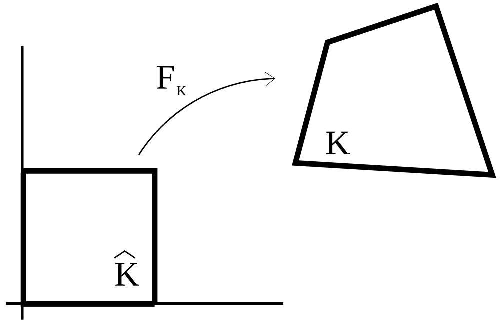
$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\beta,\eta) + (\gamma, \nabla v - \eta) = \lambda \left[(w,v) + \dfrac{t^2}{12}(\beta,\eta) \right] & \\ \gamma = \dfrac{\kappa}{t^2}(\nabla w - \beta) & \forall (\eta, v) \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^2 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

$$a(\beta,\eta) := \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{2} (1-\nu)\varepsilon_{ij}(\beta)\varepsilon_{ij}(\eta) + \nu \,\mathrm{div}\, \beta \,\mathrm{div}\, \eta \right]$$

$\varepsilon_{ij}(\beta)$: tensor lineal de deformación.

Discretización.

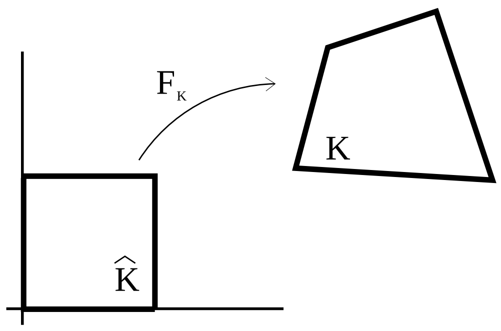
$$\begin{cases} Hallar\ \ \omega_h \in \mathbb{R}^+\ \ y\ \ (\vec{u}_h, \underline{\theta}_h) \in \mathcal{U}_h\ \ tales\ \ que \\ A_h\Big((\vec{u}_h, \underline{\theta}_h), (\vec{v}_h, \underline{\eta}_h)\Big) = \omega_h^2 B\Big((\vec{u}_h, \underline{\theta}_h), (\vec{v}_h, \underline{\eta}_h)\Big)\ \forall\, (\vec{v}_h, \underline{\eta}_h) \in \mathcal{U}_h \end{cases}$$



Transformacion bilineal

Discretización.

$$\begin{cases} Hallar \;\; \omega_h \in \mathbb{R}^+ \;\; y \;\; (\vec{u}_h, \underline{\theta}_h) \in \mathcal{U}_h \;\; tales \;\; que \\ A_h\Big((\vec{u}_h, \underline{\theta}_h), (\vec{v}_h, \underline{\eta}_h)\Big) = \omega_h^2 B\Big((\vec{u}_h, \underline{\theta}_h), (\vec{v}_h, \underline{\eta}_h)\Big) \; \forall \, (\vec{v}_h, \underline{\eta}_h) \in \mathcal{U}_h \end{cases}$$



Transformacion bilineal

MITC4:

$$D^c \longrightarrow D^c\Big(\mathbf{R}(\vec{u}_h, \underline{\theta}_h), \mathbf{R}(\vec{v}_h, \underline{\eta}_h)\Big)$$

$\mathbf{R}$: Operador de integración reducida.

Discretización. Placas.

Sea $\{\mathcal{T}_h\}$ decomposición de Ω en cuadrilateros convexos K.

$$H_h \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2, \quad W_h \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega), \quad \Gamma_h \subset \mathrm{L}^2(\Omega),$$

con $\nabla W_h \subset \Gamma_h$.

(PD) *Hallar* $(\beta_h, w_h) \in H_h \times W_h$ y $\lambda_h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a(\beta_h, \eta) + (\gamma_{th}, \nabla v - \mathbf{R}\eta) = \lambda_h \left[(w_h, v) + \dfrac{t^2}{12}(\beta_h, \eta) \right] \\ \gamma_{th} = \dfrac{\kappa}{t^2}(\nabla w_h - \mathbf{R}\beta_h) \qquad \forall (\eta, v) \in H_h \times W_h. \end{cases}$$

Discretización. Placas.

Método MITC4:

$$H_h^1 := \{\eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \eta|_K \in Q(K)^2, \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

$$W_h := \{\eta \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \eta|_K \in Q(K)^2, \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

donde $Q(K) := \{p : p \circ F_K \in Q_1(\hat{K})\}$.

$$\Gamma_h := \{\psi \in H_0(\mathrm{rot}, \Omega) : \psi|_K \in \mathcal{N}(K), \ \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\mathcal{N}(K) := \{p : p \circ F_K = DF_K^{-T}\widehat{p}, \ \widehat{p} \in Q_{0,1}(\hat{K}) \times Q_{1,0}(\hat{K})\}.$$

Discretización. Placas.

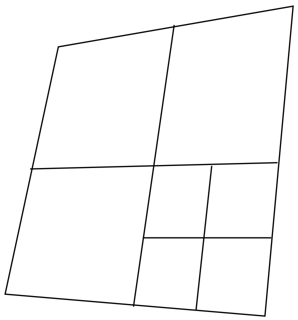
Operador de Reducción

$$\mathbf{R} : \mathrm{H}^1(\Omega)^2 \cap H_0(\mathrm{rot}, \Omega) \longrightarrow \Gamma_h,$$

$$\int_\ell \mathbf{R}\psi \cdot \tau = \int_\ell \psi \cdot \tau.$$

$$\int_K \mathsf{rot}\,(\psi - \mathbf{R}\psi) = 0, \quad \|\psi - \mathbf{R}\psi\|_0 \leq Ch\|\psi\|_1.$$

Convergencia.



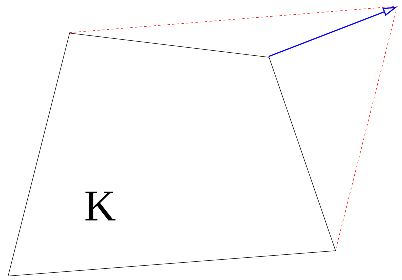
Macro elementos (MITC4)

Teorema: Sea (β, w) y (β_h, w_h) las correspondientes autofunciones asociadas a los autovalores λ_k y λ_{kh}. Entonces,

$$\|(\beta, w) - (\beta_h, w_h)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)^2 \times \mathrm{H}^1(\Omega)} \leq Ch,$$

con C una constante independiente de t y h. $\square$

Convergencia.



Mallas asintóticamente afines

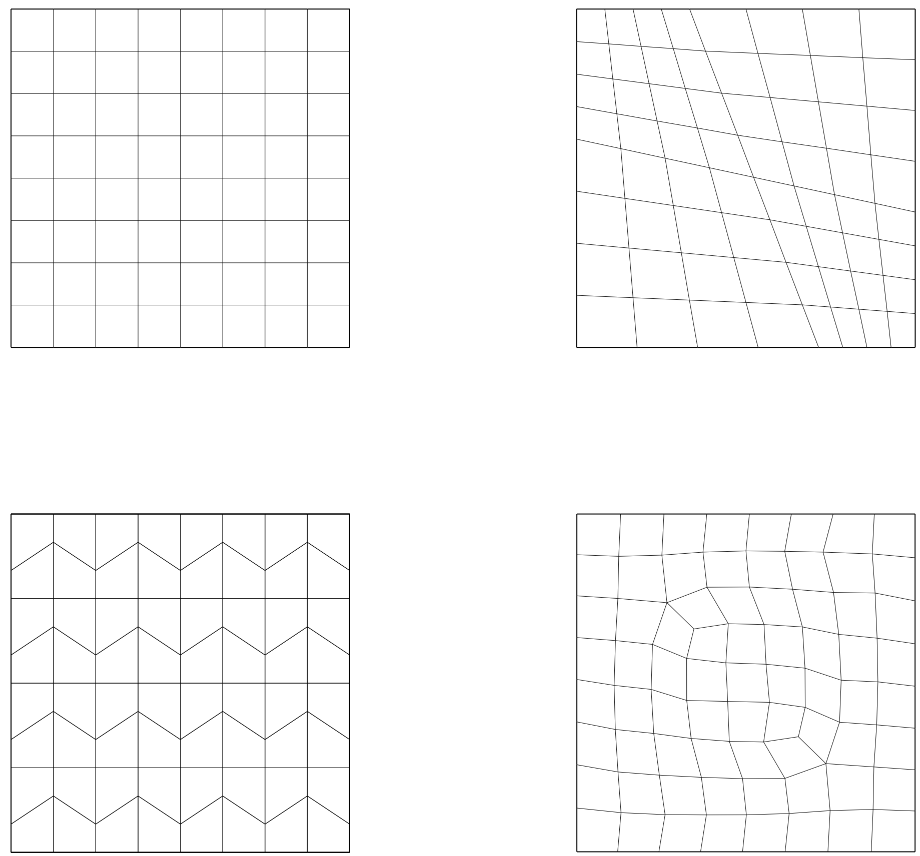
Teorema: Entonces,

$$|\lambda_k - \lambda_{kh}| \leq Ch^2$$

$$\|(\beta, w) - (\beta_h, w_h)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2 \times \mathrm{L}^2(\Omega)} \leq Ch^2,$$

con una constante C independiente de t y h. $\square$

Ejemplos numéricos.



Mallados de una placa cuadrada.

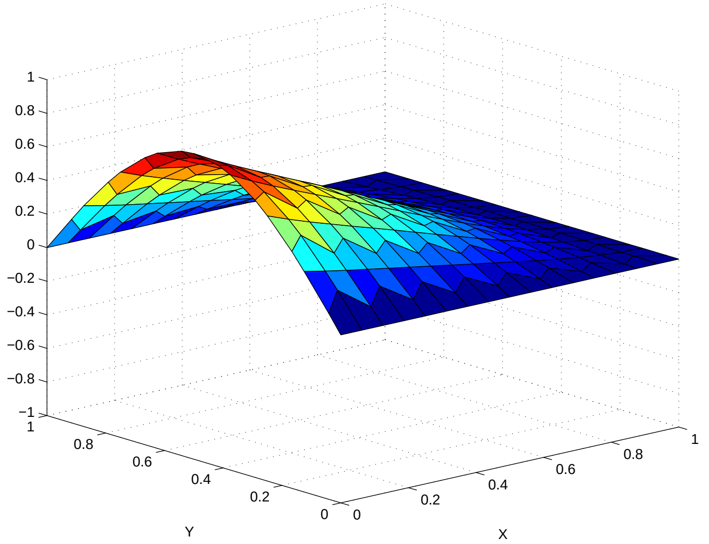
Ejemplos numéricos. ***Placa S-C-S-F*** $t/L = 0.1$

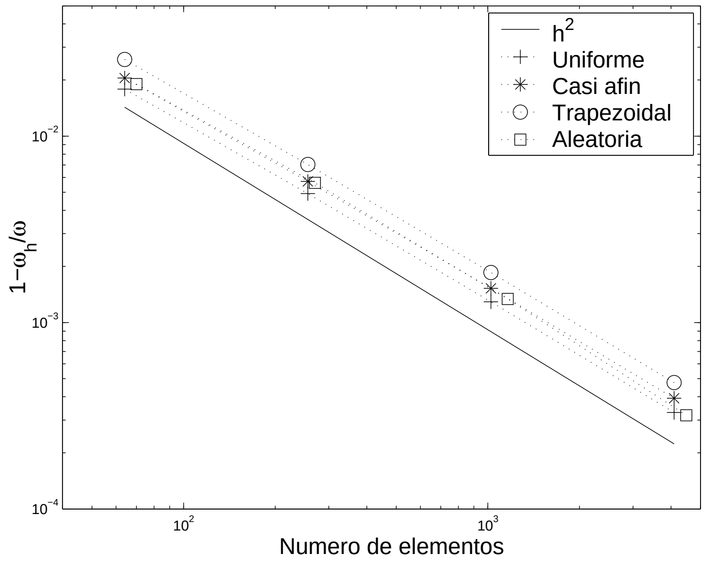
Mesh	Mode	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	"exact"	H-H
$\mathcal{T}_h^U$	$\hat{\omega}_{11}$	0.6004	0.5983	0.5977	0.5975	0.598
	$\hat{\omega}_{21}$	1.4955	1.4860	1.4835	1.4826	1.483
$\mathcal{T}_h^A$	$\hat{\omega}_{11}$	0.6009	0.5984	0.5977	0.5975	0.598
	$\hat{\omega}_{21}$	1.4975	1.4866	1.4836	1.4826	1.483
$\mathcal{T}_h^T$	$\hat{\omega}_{11}$	0.6017	0.5986	0.5978	0.5975	0.598
	$\hat{\omega}_{21}$	1.4996	1.4871	1.4838	1.4829	1.483
$\mathcal{T}_h^R$	$\hat{\omega}_{11}$	0.6009	0.5983	0.5977	0.5975	0.598
	$\hat{\omega}_{21}$	1.4978	1.4865	1.4837	1.4827	1.483

Ejemplos numéricos. Placa S-C-S-F $t/L = 0.0001$.

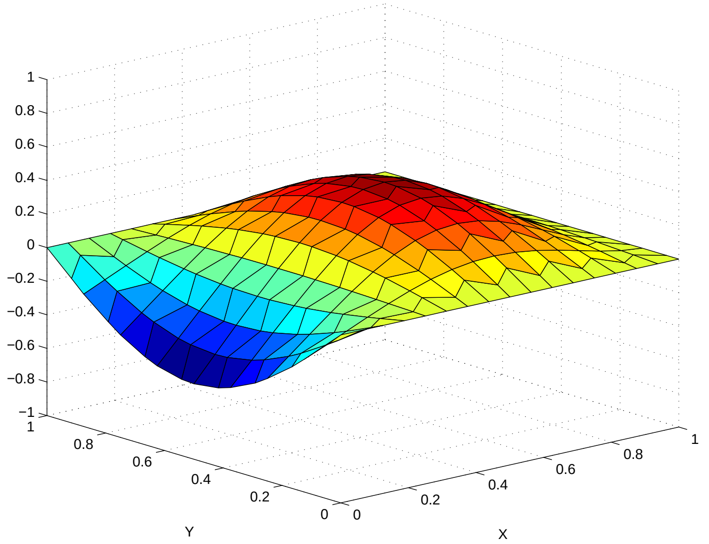
Mesh	Mode	$N=16$	$N=32$	$N=64$	“exact"
$\mathcal{T}_h^U$	$\hat{\omega}_{11}$	$0.6213{\times}10^{-3}$	$0.6196{\times}10^{-3}$	$0.6192{\times}10^{-3}$	$0.6190{\times}10^{-3}$
	$\hat{\omega}_{21}$	$1.6255{\times}10^{-3}$	$1.6164{\times}10^{-3}$	$1.6141{\times}10^{-3}$	$1.6134{\times}10^{-3}$
$\mathcal{T}_h^A$	$\hat{\omega}_{11}$	$0.6217{\times}10^{-3}$	$0.6197{\times}10^{-3}$	$0.6192{\times}10^{-3}$	$0.6190{\times}10^{-3}$
	$\hat{\omega}_{21}$	$1.6274{\times}10^{-3}$	$1.6169{\times}10^{-3}$	$1.6142{\times}10^{-3}$	$1.6134{\times}10^{-3}$
$\mathcal{T}_h^T$	$\hat{\omega}_{11}$	$0.6233{\times}10^{-3}$	$0.62.3{\times}10^{-3}$	$0.6194{\times}10^{-3}$	$0.6190{\times}10^{-3}$
	$\hat{\omega}_{21}$	$1.6313{\times}10^{-3}$	$1.6181{\times}10^{-3}$	$1.6146{\times}10^{-3}$	$1.6133{\times}10^{-3}$
$\mathcal{T}_h^R$	$\hat{\omega}_{11}$	$0.6218{\times}10^{-3}$	$0.6197{\times}10^{-3}$	$0.6192{\times}10^{-3}$	$0.6190{\times}10^{-3}$
	$\hat{\omega}_{21}$	$1.6283{\times}10^{-3}$	$1.6171{\times}10^{-3}$	$1.6143{\times}10^{-3}$	$1.6131{\times}10^{-3}$

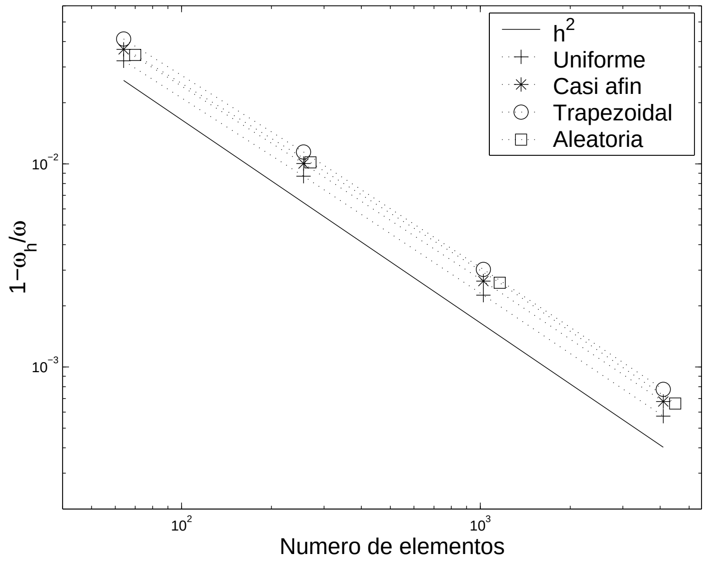
Primer modo de una Placa S-C-S-F



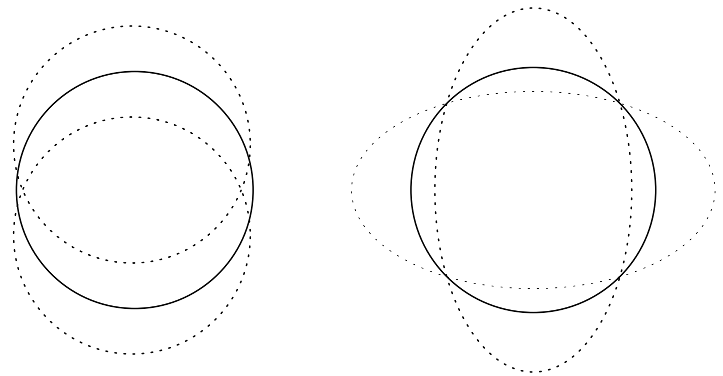


Segundo modo de una Placa S-C-S-F

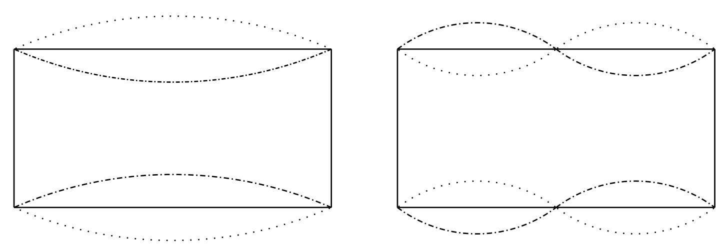




Estructuras más generales. Cáscara Cilíndrica.



Modos Circunferenciales

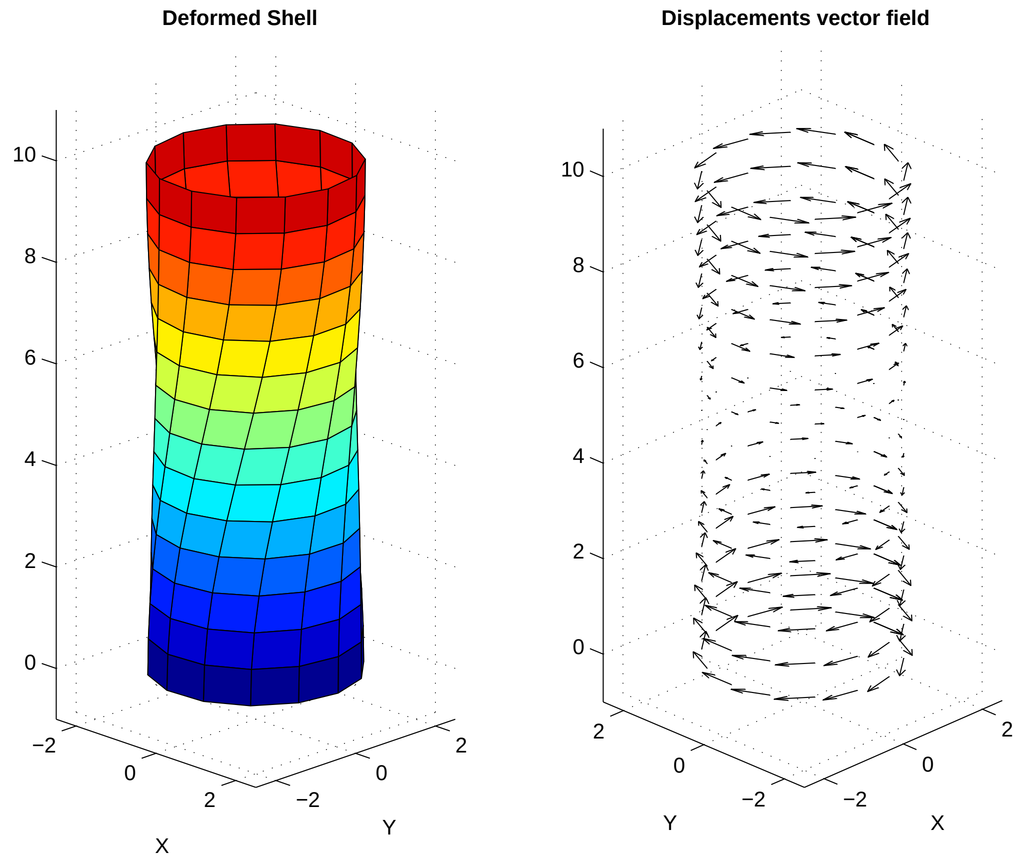


Modos Axiales

Estructuras más generales. Cáscara Cilíndrica.

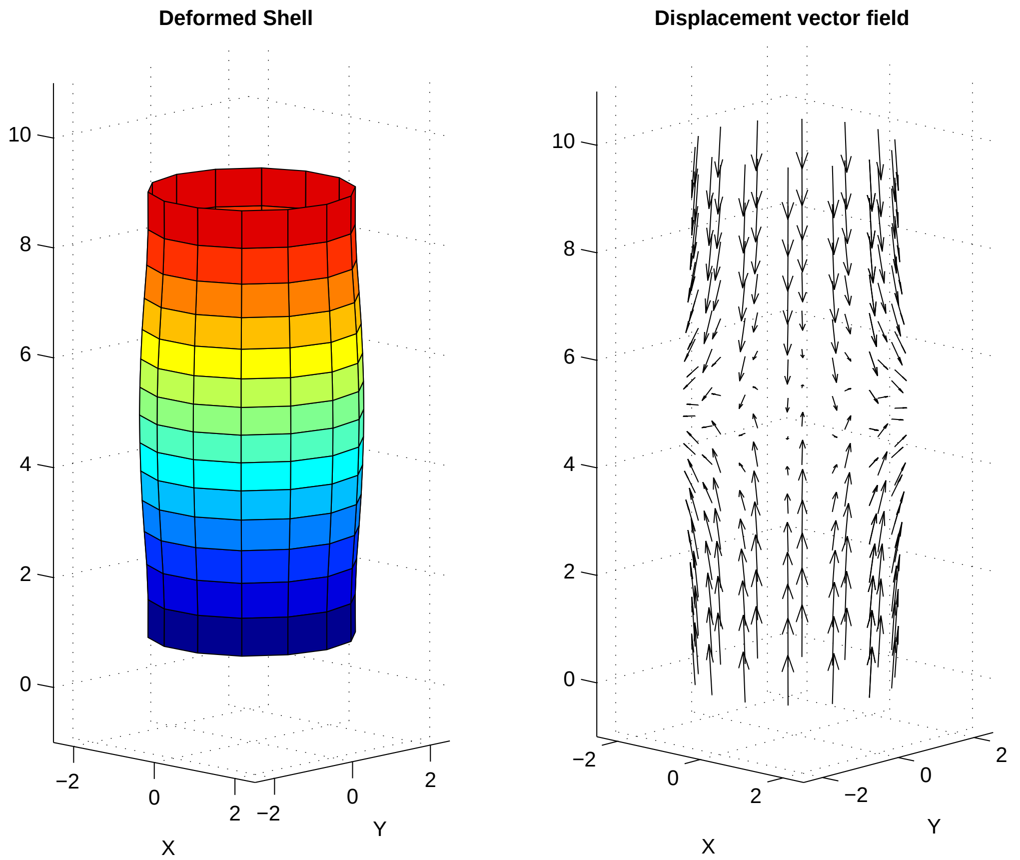
Modo	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	“exact"	CH
torsion	156.6354	156.1536	156.0333	155.9930	155.05
n=0 m=0	246.3435	245.5347	245.3311	245.2629	243.50
n=1 m=0	157.4533	147.3331	144.8173	143.9885	150.58
n=1 m=1	242.0222	234.4688	232.5655	231.9264	223.17
n=1 m=2	322.4530	314.9537	313.0779	312.4533	296.79
n=2 m=0	192.0059	111.8841	85.9812	73.6300	63.26
n=2 m=1	195.1902	115.0604	89.3939	77.2358	67.16
n=3 m=0	445.6543	264.8193	221.1085	207.2203	173.99
n=3 m=1	449.5729	269.2100	225.4787	211.3448	179.06

Estructuras más generales. Cáscara Cilíndrica.



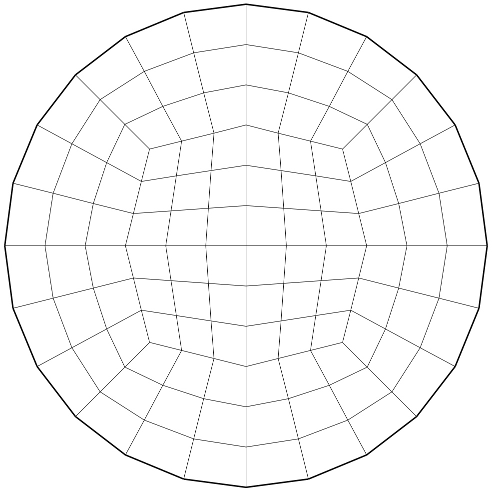
Cilindro Libre. Primer modo torsional.

Estructuras más generales. Cáscara Cilíndrica.

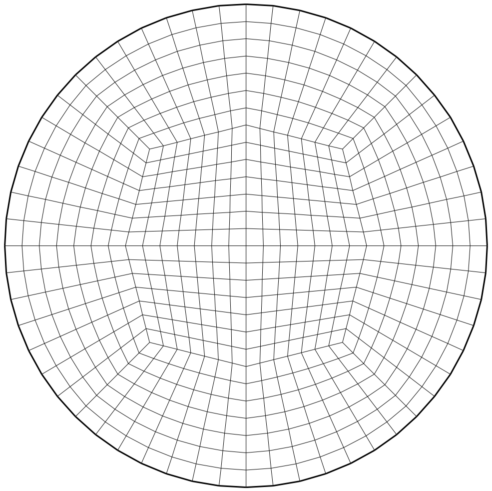


Cilindro Libre. Modo $n = 0, m = 1.$

Estructuras más generales. Semiesfera empotrada.

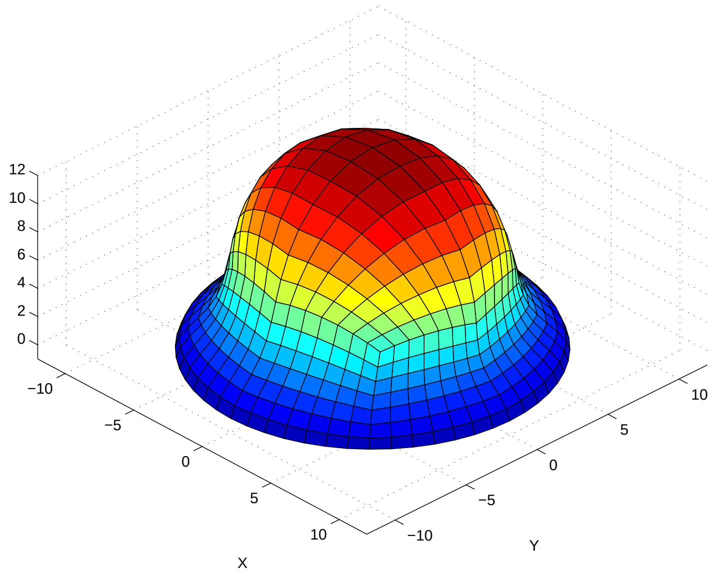


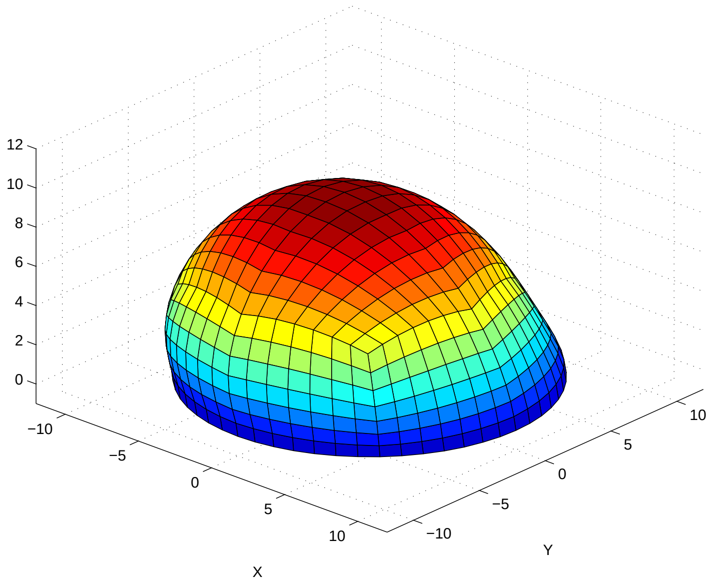
N=4



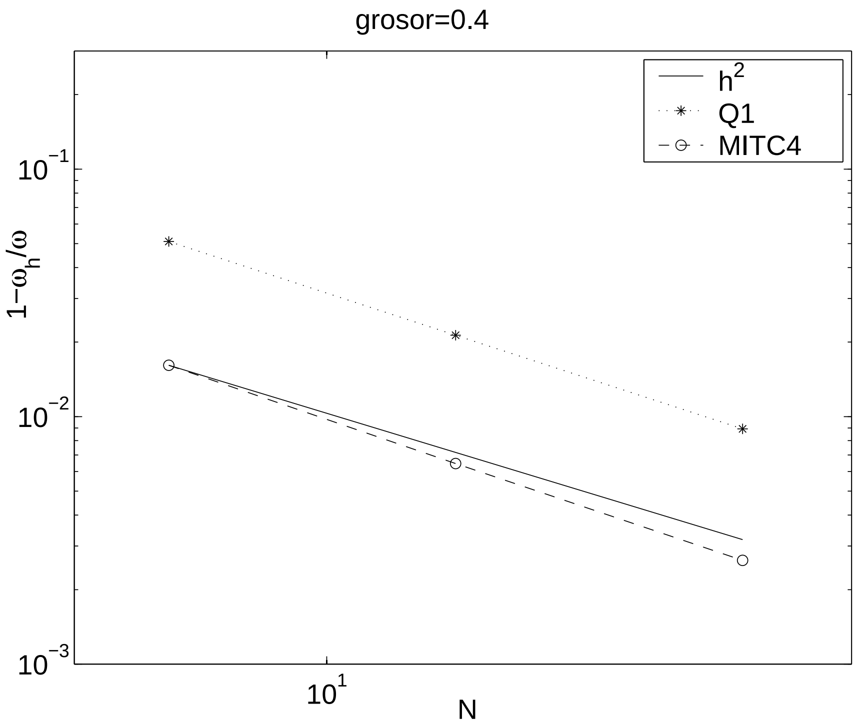
N=8

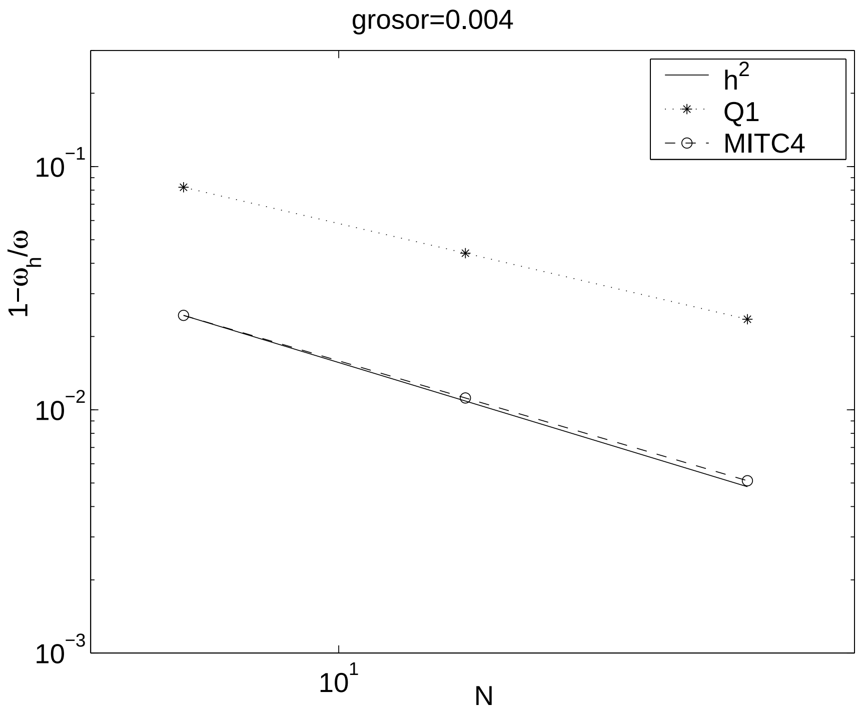
Estructuras más generales



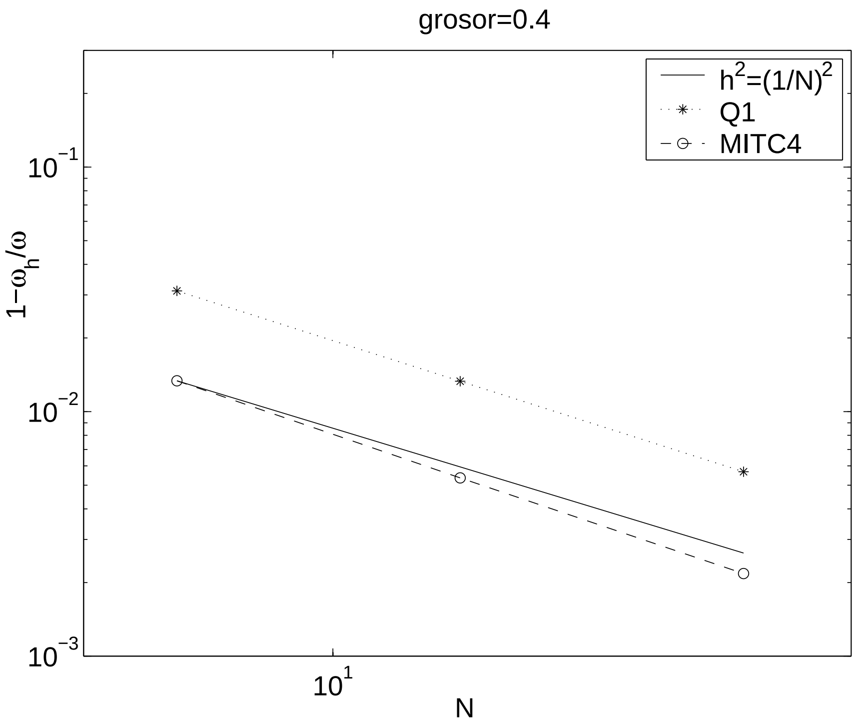


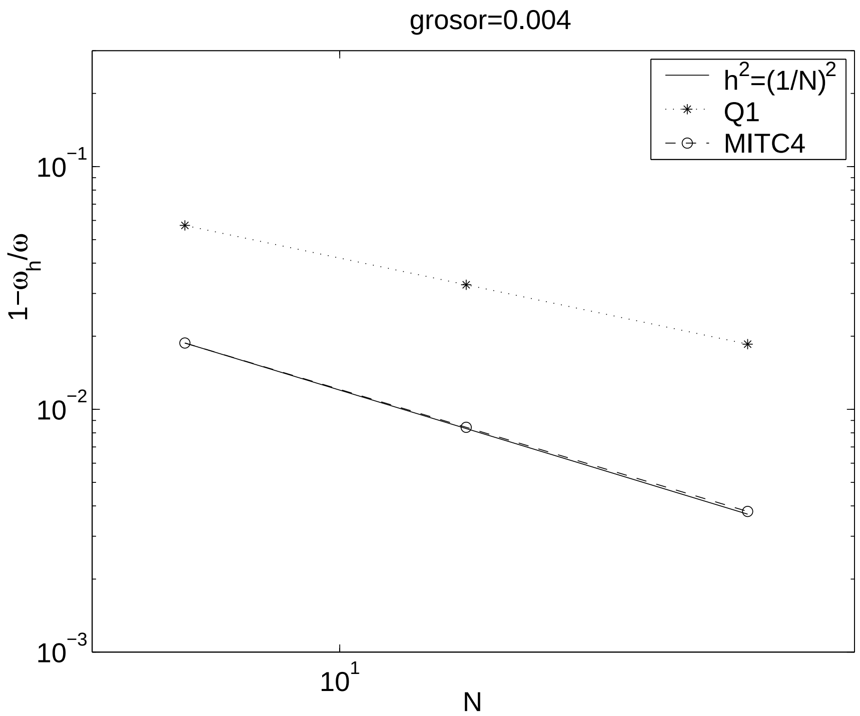
Estructuras más delgadas



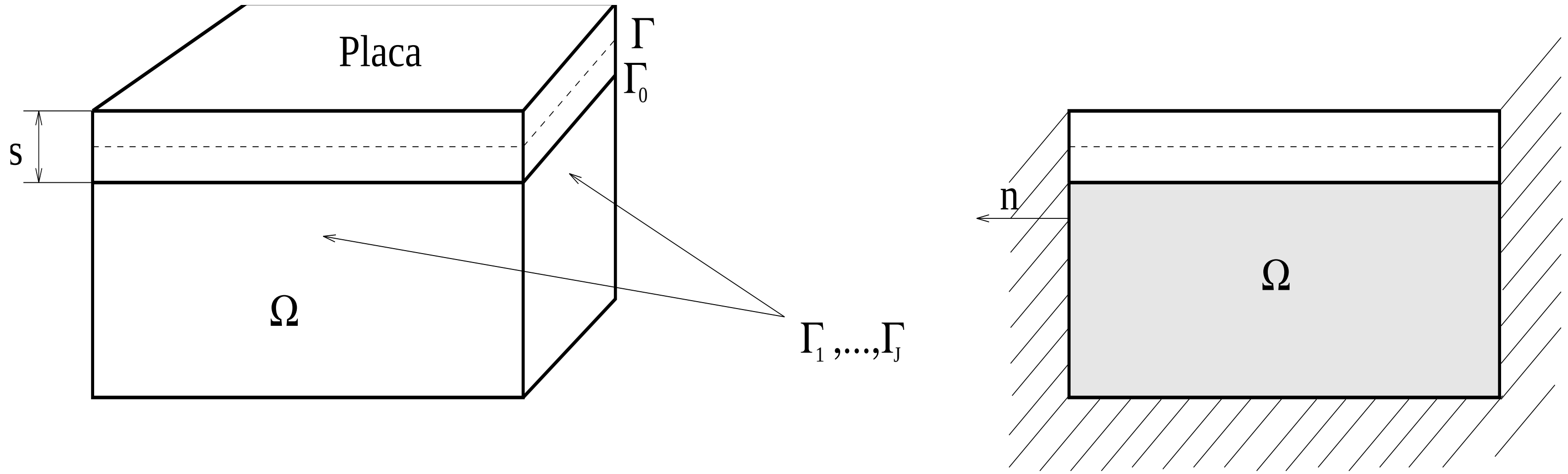


Estructuras más delgadas





Interacción. Problema Placa-Fluido



Interacción. Problema Placa-Fluido

(PC) *Hallar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $0 \neq (w, \beta, u) \in \mathcal{V}$ *tales que*

$$t^3 a(\beta, \eta) + \kappa t \int_\Gamma (\nabla w - \beta) \cdot (\nabla v - \eta) + \int_\Omega \rho_{\mathrm{F}} c^2 \operatorname{div} u \operatorname{div} \phi$$
$$= \lambda \left(t \int_\Gamma \rho_{\mathrm{P}} w v + \frac{t^3}{12} \int_\Gamma \rho_{\mathrm{P}} \beta \cdot \eta + \int_\Omega \rho_{\mathrm{F}} u \cdot \phi \right)$$

- $\lambda = 0$
  $\mathcal{K} := \{(0, 0, \phi) \in \mathcal{V} : \ \operatorname{div} \phi = 0 \text{ en } \Omega \ \text{ y } \ \phi \cdot n = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$
- $\lambda \neq 0$
  $\mathcal{G} := \{(v, \eta, \phi) \in \mathcal{V} : \ \phi = \nabla q \text{ para algún } q \in H^1(\Omega)\}.$

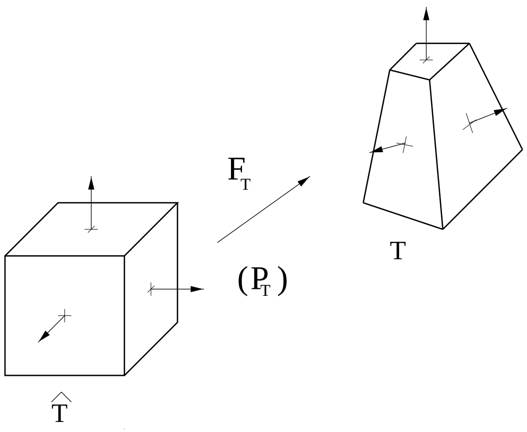
Discretización

Placa: MITC4

$$W_h := \{v_h \in H_0^1(\Gamma) : \; v_h|_K \in Q(K) \; \forall K \in \mathcal{T}_h^\Gamma\},$$
$$H_h := \{\eta \in H_0^1(\Gamma)^2 : \eta|_K \in Q(K)^2 \; \forall K \in \mathcal{T}_h^\Gamma\}.$$

Fluido: Elementos hexaédricos de Raviart-Thomas.

$$R_h := \{\phi_h \in H(\mathrm{div}, \Omega) : \; \phi_h|_K \in \mathcal{RT}(\mathbf{K}) \;\; \forall \mathbf{K} \in \mathcal{T}_h\}.$$



$$\int_{\mathcal{F}} \phi_h \cdot n = \int_{\mathcal{F}} v_h \quad \forall \mathcal{F} \in (\partial\Omega \cup \Gamma)$$

Convergencia

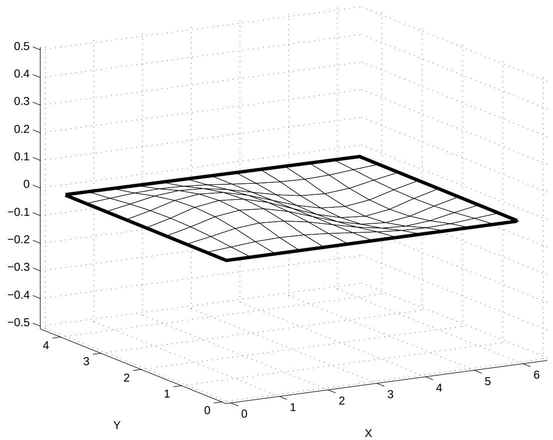
Teorema: Sea λ un autovalor de PC. Sea λ_h un autovalor de PD que converge a λ cuando h tiende a cero. Sea (w, β, u) y (w_h, β_h, u_h) las autofunciones correspondientes a μ_t y μ_{th}. Entonces, para t y h suficientemente pequeños, se tiene

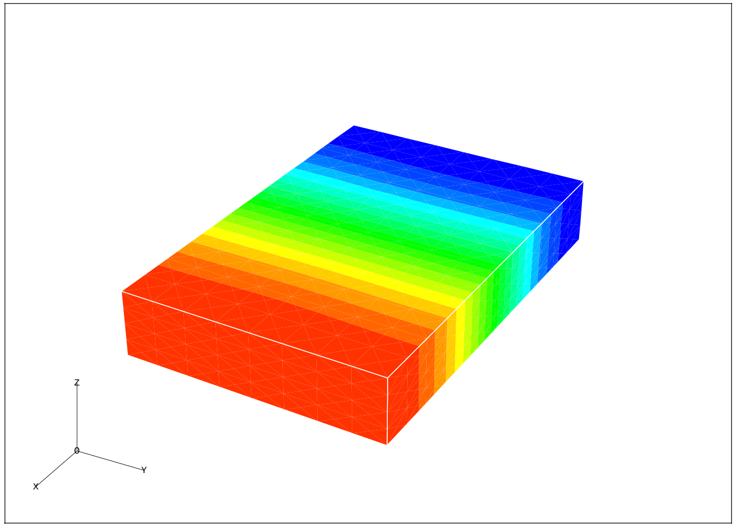
$$\|(w, \beta, u) - (w_h, \beta_h, u_h)\| \leq Ch$$

$$|\lambda_t - \lambda_h| \leq Ch^2. \square$$

Ejemplos numéricos. Primer modo fluido

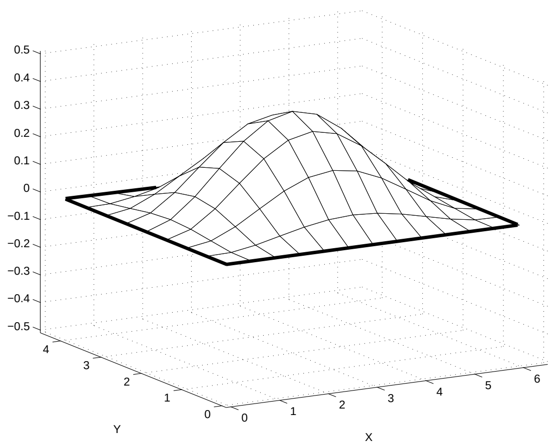
$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	ORD	extrap
745.5411	744.6309	744.1355	743.8364	1.99	743.002848

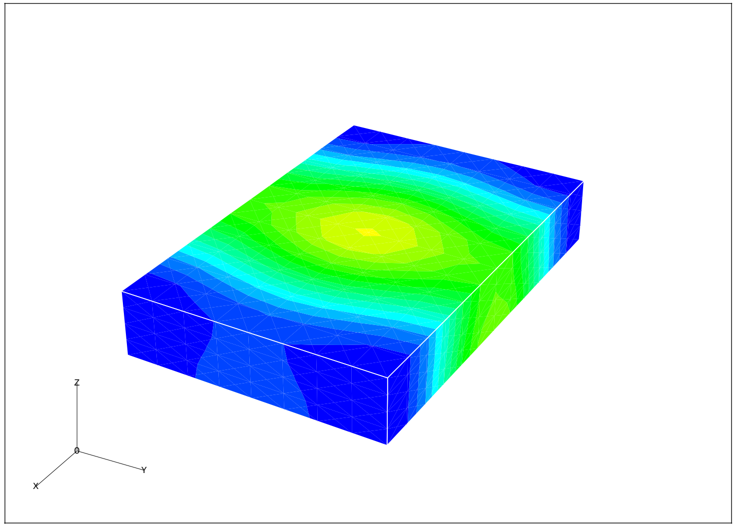




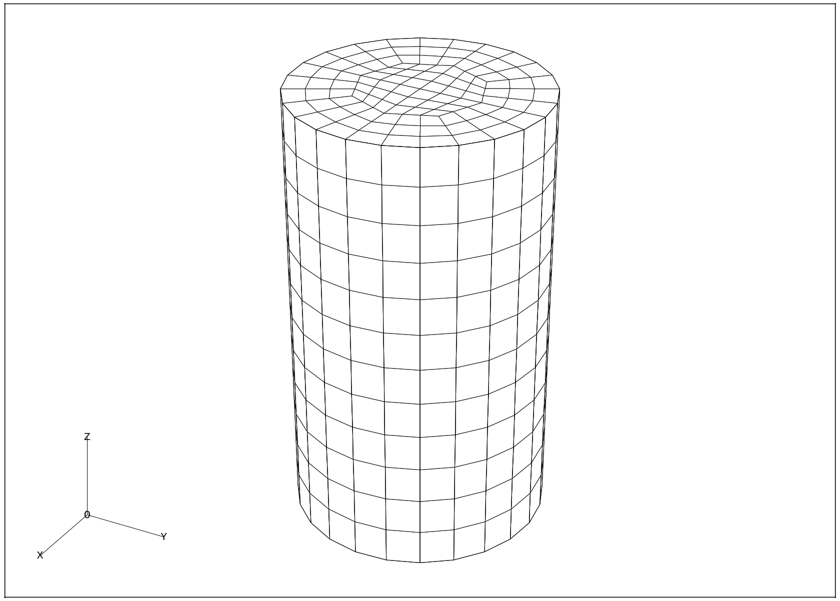
Ejemplos numéricos. *Primer modo placa*

$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	ORD	extrap
1126.6920	1123.8563	1122.3137	1121.3828	1.99	1118.786303



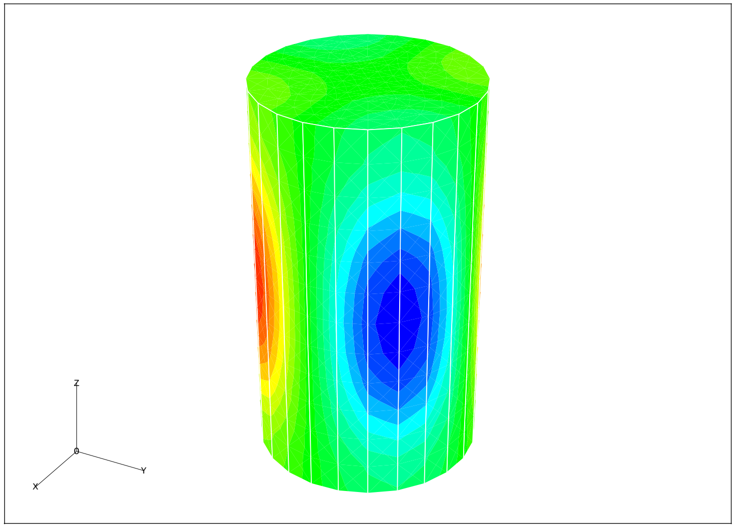


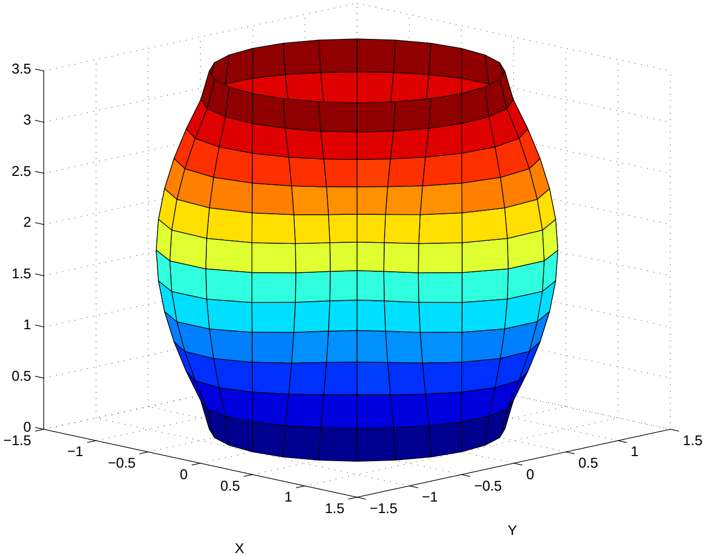
Un caso más general: cáscara-fluido



Primer modo sólido

$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	ORD	exacto	discrep.
1162.56	1160.23	1159.16	1.99	1157.25	0.165%





Primer modo fluido

$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	ORD	exacto	discrep.
1213.32	1204.31	1200.15	2.00	1192.80	0.616%