INTRODUÇÃO À ANÁLISE – FGV
LISTA I

Prof. Alexandre Madureira

Exercício 1. Mostre a regra de *De Morgam*, que diz que dados os conjuntos E_n, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathcal{C}(\cup_{i\in\mathbb{N}} E_n) = \cap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(E_n), \qquad \mathcal{C}(\cap_{i\in\mathbb{N}} E_n) = \cup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(E_n).$$

Exercício 2. Sejam $X_1, X_2, \ldots,$ conjuntos tais que $X_i \subseteq X_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostre que $\cap_{i\in\mathbb{N}} X_i = X_1$.

Exercício 3. Seja a relação $\sim$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Interprete geometricamente a relação $\sim$.

Exercício 4. Tentando generalizar a relação de equivalência do exercício 3, dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, defina a relação $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. é verdadeiro ou falso que $\sim$ é de equivalência?

Exercício 5. Interprete $\sim$ do exercício 4 considerando as curvas de nível $c(t) = \{(x, y) : f(x, y) = t\}$. Mostre que $\{c(t) : t \in \mathbb{R}\}$ determina uma partição de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6. Seja X conjunto não vazio e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Mostre que $X/\sim$ define uma partição de X.