Introdução à Análise Real em uma Dimensão [1]

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica—LNCC, Brasil
URL: http://www.lncc.br/∼alm

Fundação Getúlio Vargas—FGV, Brasil

[1] 22 de agosto de 2018

Resumo. Estas notas de aula são relativas a um curso introdutório condensado de análise real da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas (EPGE–FGV). A ideia é preparar os aluno que nunca estudaram análise para o curso de Análise I em várias dimensões. Estas notas são uma versão unidimensional das notas que servem ao curso em várias variáveis. Desta forma, vários argumentos, enunciados, etc são *repetidos ipsis litteris*. Obviamente, tópicos que só fazem sentido em dimensões maiores que um foram eliminados. Talvez a maior mudança foi a opção de omitir a noção de *compacidade*, e esta escolha foi baseada no sentimento que o conceito de cobertura, e seu uso, são quiçá de difícil compreensão num primeiro contato.

Os tópicos a serem discutidos são:

- Os números reais e topologia da reta
  - Funções; Conjuntos finitos, infinitos, contáveis; Propriedades dos reais
  - Conjuntos abertos e fechados; Vizinhanças; Teorema de Bolzano-Weierstrass
- Sequências e Convergência
  - Sequências monótonas
  - Sequências, Subsequências
  - Teorema de Bolzano-Weierstrass para sequências; Sequências de Cauchy
  - Sequências Contráteis e pontos fixos de contrações
  - Caracterização de abertos e fechados
- Funções Contínuas
  - Propriedades Locais e Globais
  - Continuidade Uniforme
- Diferenciabilidade
  - Diferenciabilidade
  - Regra da cadeia; Teorema de Taylor
  - Aplicações

A referência básica é o livro *Introduction to Real Analysis*, de Robert Bartle e Donald Sherbert [**4**]. Outras referências importantes são [**8**, **18**].

Sumário

CAPíTULO 1

Pré-requisitos

[1] Neste capítulo, exemplificamos duas técnicas de demonstrações, e recordamos definições e notações básicas sobre conjuntos e funções.

1.1. Uma introdução não tão formal aos fundamentos da matemática

A matemática se baseia na argumentação lógica. Outras áreas do conhecimento, talvez todas, podem também reclamar para si tal propriedade, Entretanto a matemática é o *próprio* desenvolvimento da argumentação formal, é a "lógica aplicada."

Este aspecto da matemática tem consequências interessantes; seus resultados independem da época, cultura e região em que foram gerados. O Teorema de Pitágoras, demonstrado por fanáticos matemáticos (os pitagóricos), cerca de 500 A.C., será válido em qualquer lugar e época (http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html).

Outras áreas têm teorias "exatas" que são na verdade aproximações da realidade, com "validade" somente sob determinadas condições (por exemplo, teoria da relatividade versus física quântica). Mesmo certas definições podem mudar. Como exemplo, em 1997 a unidade de tempo *segundo* foi definida mais uma vez (http://en.wikipedia.org/wiki/Second). Quanto ao pobre quilograma, bem, este ainda busca uma definição adequada aos nossos tempos (http://en.wikipedia.org/wiki/Kilogram).

Parece-me desnecessário comentar sobre a volatilidade de várias teorias econômicas. . .

Nestes rápidos comentários que seguem, pretendo passear por alguns aspectos de como a matemática funciona. Uma ótima referência é o livro do Terence Tao [**18**].

1.1.1. Afirmativas. Como funciona a argumentação formal na prática? Objetos fundamentais são as afirmativas (ou afirmações ou expressões lógicas), que sempre são verdadeiras ou falsas, mas nunca verdadeiras *e* falsas simultaneamente. Por exemplo[2]

$$1 + 1 = 2, \tag{1.1.1}$$

$$1 = 2. \tag{1.1.2}$$

Vou me adiantar afirmando que (1.1.1) é verdadeira e (1.1.2) é falsa. Esperando que o leitor já tenha se recuperado da surpresa, cabe aqui comentar que frases sem sentido como

$$= 1 + 3-$$

não são afirmativas. Expressões do tipo 3+1 também não. Uma regra usual é que afirmativas "têm verbos".

[1] Última Atualização: 22/08/2018

[2] Suponho, por enquanto, que as propriedades de conjuntos e dos números reais são conhecidas

Afirmativas podem ser combinadas com “ou” e “e” gerando outras. Por exemplo, se a é um número real qualquer, então a afirmativa ($a > 0$ ou $a \leq 0$) é verdadeira, mas ($a > 0$ e $a \leq 0$) não o é. A regra geral é que se X e Y são afirmativas, então (X *e* Y) só é verdadeira se X e Y forem *ambas* verdadeiras. Similarmente, (X *ou* Y) só é falsa se X e Y forem *ambas* falsas. Note que se apenas uma das afirmativas for verdadeira, (X *ou* Y) é verdadeira. Note que esta noção pode diferir de um possível uso corriqueiro do *ou*, como na frase *ou eu, ou ele ficamos*. Neste caso quer-se dizer que ou eu fico, ou ele fica, mas não ambos — este é o chamado *ou exclusivo*.[3]

Podemos também negar uma afirmativa. Se X é uma afirmativa verdadeira, então (*não* X) é falsa. Da mesma forma, se Y é uma afirmativa falsa, então (*não* Y) é verdadeira. Negar uma afirmativa pode ser útil pois para concluir que uma afirmativa Z é falsa, as vezes é mais fácil provar que (*não* Z) é verdadeira.

Seguramente, este papo poderia ir bem mais longe com a álgebra de Boole ou booleana (http://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_algebra).

1.1.2. Implicações. Os passos de uma argumentação matemática são dados via implicações. Se de um fato conhecido, por exemplo uma afirmativa verdadeira X, eu possso concluir uma afirmativa verdadeira Y, então eu escrevo

$$X \implies Y, \tag{1.1.3}$$

e leio X *implica* Y, ou ainda *se* X *então* Y. Por exemplo

$$a > 0 \implies 2a > 0. \tag{1.1.4}$$

Abstraindo um pouco mais, note que (1.1.3) e (1.1.4) também são afirmativas. Outros exemplos de afirmativas:

$$0 = 0 \implies 0 = 0, \tag{1.1.5}$$

$$0 = 1 \implies 0 = 0, \tag{1.1.6}$$

$$0 = 1 \implies 0 = 1, \tag{1.1.7}$$

$$0 = 0 \implies 0 = 1. \tag{1.1.8}$$

As três primeiras afirmativas acima são verdadeiras. Somente a última é falsa. A primeira da lista é uma tautologia (redundância, do grego *tauto*, o mesmo), e é obviamente correta. Já a segunda é correta pois de hipóteses falsas pode-se concluir verdades (multiplique ambos os lados de (1.1.6) por zero). A terceira é verdade pois se a hipótese é verdadeira, a conclusão, sendo uma mera repetição da hipótese, também o é (este tipo de argumento é usado em demonstrações por contradição). Finalmente, (1.1.8) é falsa pois não se pode deduzir uma afirmativa falsa partindo-se de uma verdadeira.

OBSERVAÇÃO. Pode-se *negar* uma implicação. Dizer que $A \implies B$ é equivalente a afirmar que (*não* B) $\implies$ (*não* A). Esta é a base de *demonstrações contrapositivas*.

A argumentação (e a demonstração) matemática baseia-se em supor que algumas hipóteses são verdadeiras e em concluir resultados através de implicações.

[3]Outro termo matemático que pode ter sentido diferente do uso diário é *em geral*. Na matemática, em geral quer dizer *sempre*, enquanto no dia-a-dia quer dizer "quase sempre"

Note que a implicação não é "reversível", i.e., se $X \implies Y$, não podemos concluir que $Y \implies X$. Realmente, $x = -1 \implies x^2 = 1$, mas $x^2 = 1 \not\Longrightarrow x = -1$ (esta seta cortada é o símbolo de *não implica*), ou seja, não se pode concluir se $x = -1$ ou não a partir da hipótese $x^2 = 1$.

As vezes, tanto a implicação como seu reverso valem. Se por exemplo $X \implies Y$ e $Y \implies X$ escrevemos simplesmente $X \iff Y$, e lemos X *se e somente se* Y.

1.1.3. Axiomas. E como começar a construção da matemática em si, i.e., quais são as hipóteses *básicas* que são necessariamente verdadeiras? Isso é importante pois, como vimos, partindo-se de hipóteses falsas pode-se chegar a conclusões falsas, *sem comprometer a lógica.* Aqui entram os *axiomas*, premissas verdadeiras consideradas "óbvias." É uma boa idéia que este conjunto de premissas seja o menor possível, i.e., um axioma do conjunto não pode ser demonstrada a partir dos outros.

A partir dos axiomas contrói-se via implicações toda uma matemática (mudando-se o conjunto de axiomas, muda-se a matemática).

Um exemplo de axioma vem a seguir.

Axioma 1.1.1 (do conjunto vazio). Existe um conjunto que não contém nenhum elemento.

Suponha que se possa definir o que é uma pessoa careca, e considere o seguinte axioma.

Axioma 1.1.2 (do fio extra). Um careca que ganhar um fio extra de cabelo continua careca.

Pode-se concluir então o seguinte resultado (tente demonstrá-lo).

Se o Axioma do fio extra vale, então todos os seres humanos são carecas.

O alerta que o resultado acima nos fornece é que devemos ter cuidado com os axiomas escolhidos. Resultados "patológicos" podem advir deles. E de fato, resultados "estranhos" permeiam a matemática. . .

1.1.4. Definições, lemas, teoremas. Uma das formas de se construir novos objetos matemáticos é através de *definições.* Por exemplo podemos definir o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$[4]. Outro exemplo: seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

A expressão acima define uma função chamada "f" que associa a cada número inteiro o seu quadrado, levando-o nos reais.

E quanto a proposições dadas por lemas e teoremas[5]? Normalmente, lemas e teoremas são escritos à parte, sendo compostos por hipóteses, e conclusões explicitamente mencionadas.

[4]Alguns autores utilizam o símbolo := no lugar de = em definições. Esta é provavelmente uma boa idéia pouco utilizada, e eu não a seguirei.

[5]Uma dúvida comum: qual a diferença entre os três? Bom, normalmente *proposição* tem um caráter mais geral, sendo uma sentença lógica verdadeira (na matemática "usual"). Já um *lema* é proposição preliminar, que contribui na demonstração de um resultado principal, um *teorema.* Muitas vezes entretanto, o lema tem interesse próprio. Em geral, o gosto e o estilo do autor determinam o que é proposição, lema ou teorema.

Exemplos de lema e teorema vêm a seguir.

LEMA 1.1.3. Supondo que o Axioma do conjunto vazio vale, então existe somente um conjunto vazio.

TEOREMA 1.1.4 (de Fermat). [6] *Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n > 2$. Então não existem inteiros positivos x, y, z tais que $x^n + y^n = z^n$.*

A hipótese do lema 1.1.3 é o axioma do conjunto vazio (Axioma 1.1.1), e a conclusão é de que só existe um conjunto vazio, isto é todos os conjuntos vazios são iguais. Este é um típico resultado de *unicidade*. Já no Teorema de Fermat 1.1.4, impondo-se hipóteses sobre a potência n (ser inteiro e maior que dois), obtem-se um resultado de *não existência*.

Normalmente lemas e teoremas descrevem resultados de interesse e não triviais, i.e., as conclusões não se seguem trivialmente das hipóteses. Algumas vezes entretanto casos importantes particulares são facilmente obtidos de resultados mais gerais. Estes casos particulares são chamados de *corolários*. O Teorema de Fermat por exemplo é um corolário de um outro resultado mais poderoso (chamado Teorema da Modularidade). É claro que "trivialidade" não é um conceito rigoroso e é certamente relativa.

1.1.5. Prova ou demonstração. Uma *prova* ou *demonstração* são os passos lógicos para se concluir uma proposição. Algumas demonstrações são simples, outras nem tanto. Por exemplo, a demonstração por Andrew Wiles do Teorema de Fermat fechou com chave de ouro a matemática do século XX. A prova é uma intricada sequência de resultados publicada num artigo de 109 páginas na mais conceituada revista de matemática, os Anais de Matemática de Princeton [**21**].

Antes da demonstração de Wiles, o agora "Teorema de Fermat" era "somente" uma conjectura, um resultado que acredita-se verdadeiro mas que ninguém demonstrou. Uma ainda conjectura famosa é a de Goldbach, que afirma que *todo inteiro par maior que dois pode ser escrito como a soma de dois números primos*. Para números menores que 10^{18}, o resultado foi checado computacionalmente, mas o caso geral ainda não está provado.

A demonstração por contradição segue os seguintes princípios lógicos: se queremos mostrar que uma afirmativa implica noutra, podemos simplesmente negar este fato e tentar chegar numa contradição. Considere a afirmativa

$$\emptyset \subseteq A \quad \text{para qualquer conjunto } A. \tag{1.1.9}$$

Talvez uma demonstração "direta" não seja tão fácil. Mas suponha que (1.1.9) seja falso. Então existe algum conjunto A tal que $\emptyset \nsubseteq A$. Portanto existe algum elemento no conjunto vazio que não está em A. Mas isto é um absurdo, pois o vazio não contém nenhum elemento. O que se vemos é que negar (1.1.9) (afirmar que (1.1.9) é falso) nos leva a concluir um absurdo, e portanto (1.1.9) só pode ser verdade.

[6]Enunciado de Fermat, na margem do livro *Arithmetica* de Diophantus: *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* (É impossível separar um cubo em dois cubos, ou a quarta potência em quartas potências, ou em geral qualquer potência em duas potências iguais. Eu descobri uma demonstração realmente maravilhosa disto, para a qual esta margem é por demais exígua para caber.)

1.2. Uma introdução não tão formal à teoria de conjuntos

Esta parte do texto pretende apenas expor algumas dificuldades básicas, da parte talvez mais fundamental da matemática (excluindo-se a lógica). Duas referências também introdutórias, mas muito mais completas, são os livros do Terence Tao [**18**], e do Paul Halmos [**11**].

1.2.1. Definições e operações básicas. A primeira dificuldade encontrada é definir o que é um conjunto. Uma saída (questionável) é simplesmente dizer que um conjunto é uma "coleção" ou "família" de objetos (ou elementos ou membros). Se um objeto x faz parte de um conjunto A, dizemos que ele pertence à A e escrevemos $x \in A$ (o símbolo $\notin$ indica que quando um elemento não pertence a um conjunto).

Espera-se que o uso das palavras "coleção" e "família" acima não traga confusões; os termos serão a seguir utilizados para conjuntos cujos elementos são também conjuntos.

Considere agora dois conjuntos A e B.

- Dizemos que A está contido em B e escrevemos $A \subseteq B$ se todo elemento de A é elemento de B. Pode-se também escrever $B \supseteq A$ (lê-se B contém A) para indicar $A \subseteq B$.
- Se A não está contido em B escrevemos $A \not\subseteq B$.
- Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais, e escrevemos $A = B$ se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
- Se não forem iguais, dizemos que são diferentes e escrevemos $A \neq B$.
- Também escrevemos $A \subsetneq B$ se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$. Dizemos neste caso que A está *propriamente* contido em B.

O seguinte axioma é importante, nos garante que a "forma usual" de definir conjuntos é "segura," ou seja, quando definimos um conjunto obtemos um e apenas um conjunto (mesmo que seja vazio).

Axioma 1.2.1 (da especificação). Seja A um conjunto, e para cada $x \in A$, seja $P(x)$ uma afirmativa (verdadeira ou falsa). Então existe um único conjunto B composto de todos os elementos x de A tais que $P(x)$ é verdade.

O conjunto acima é denotado por

$$B = \{x \in A : \ P(x) \text{ é verdade}\}.$$

Quando o conjunto A é claro pelo contexto, podemos escrever simplesmente $\{x : \ P(x) \text{ é verdade}\}$. Este conjunto é formado por *todos os elementos* x que estejam em A e tais que a propiedade $P(x)$ seja verdadeira. Uma última forma de denotar os conjuntos é simplesmente descrever seus elementos entre as chaves.

Por exemplo, o conjunto dos números pares pode ser denotado por

$$\{x \in \mathbb{Z} : \ x \text{ é divisível por } 2\}.$$

Sendo um pouco menos formal, pode-se escrever este mesmo conjunto como $\{2x : \ x \in \mathbb{Z}\}$ ou ainda enumerar todos os elementos do conjunto: $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Vale aqui descrever uma situação interessante dada pelo *Paradoxo de Russell*. É natural perguntar-se o quão grande podem ser conjuntos. Por exemplo, existe um conjunto U tal que todos os conjuntos existentes sejam *elementos* de U? Se U existe, então, pelo Axioma da especificação (Axioma 1.2.1) podemos formar

$$R = \{x \in U : x \text{ é conjunto e } x \notin x\}.$$

Então $R \notin U$. De fato, se $R \in U$, então $R \in R$ ou $R \notin R$. Vamos dividir em dois casos:

(1) Se $R \in R$, então $R \notin R$ pois por definição, R é formado pelos conjuntos que *não* se autocontém.
(2) Se $R \notin R$, então R não satisfaz as propriedades que definem R. No caso de *não* se autoconter. Logo $R \in R$.

Em ambas possibilidades (1) e (2) obtemos absurdos. Logo $R \notin U$. Mas U é exatamente o conjunto que contém *todos* os outros.... Somos levados a concluir que tal conjunto U não pode existir.

Para evitar absurdos como acima, impomos o seguinte axioma [**18**].

Axioma 1.2.2 (Regularidade). Se A é conjunto não vazio, então A tem que possuir ao menos um elemento que n ao seja um conjunto, ou que seja disjunto de A.

O próximo passo é definir as operações usuais. Por incrível que possa parecer, o mais difícil é definir a união entre dois conjuntos, e para isto é necessário um axioma.

Axioma 1.2.3 (da união). Para qualquer coleção de conjuntos, existe um conjunto que contém todos os elementos pertencentes a pelo menos um conjunto da coleção.

Podemos agora definir a união entre dois conjuntos A e B. Para tanto, note que pelo Axioma da união, existe um conjunto U que contém todos os elementos de A e de B. Definimos então $A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Observe entretanto a seguinte armadilha. O Axioma da união não garante que o tal conjunto contendo A e de B é único, somente garante que existe. Podemos ter por exemplo um outro conjunto $\hat{U}$ contendo A e B. Seja agora $C = \{x \in \hat{U} : x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Para a união ser definida de forma única, temos que garantir que $C = A \cup B$. Isto é verdade, e para provar basta argumentar que $C \subseteq A \cup B$ e $C \supseteq A \cup B$.

Com o Axioma da especificação, podemos definir as seguintes operações.

- O conjunto interseção entre A e B é $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$.
- O conjunto diferença A menos B é $A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$. O conjunto resultante também denotado por $A - B$ e chamado de complemento de B em relação à A.
- Quando é claro quem é o conjunto A, denotamos $A \backslash B$ por $\mathcal{C}(B)$, e o chamamos de complemento de B.

É fácil generalizar os conceitos acima para uniões e interseções arbitrárias de conjuntos. Por exemplo, se Λ for um conjunto de índices e se A_λ for um conjunto para cada $\lambda \in \Lambda$, então denotamos

$$\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{a : a \in A_\lambda \text{ para algum } \lambda \in \Lambda\}, \qquad \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{a : a \in A_\lambda \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Por exemplo, se $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$ então

$$\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

No caso de $\Lambda = \mathbb{N}$ escrevemos também

$$\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a : \, a \in A_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

Finalmente, é útil a regra de *De Morgam*, que diz que

$$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B), \qquad \mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B).$$

Um caso um pouco mais geral garante que, para conjuntos E_n, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathcal{C}(\cup_{i\in\mathbb{N}} E_n) = \cap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(E_i), \qquad \mathcal{C}(\cap_{i\in\mathbb{N}} E_i) = \cup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(E_i). \tag{1.2.1}$$

1.2.2. Pares ordenados, relações, funções. Outro conceito útil é o de *par ordenado*. Dados dois elementos, ou objetos a e b, formamos o par (a, b), e chamamos a e b de (primeiro e segundo) componentes de (a, b). Dizemos (definimos) que um par ordenado é *igual* a outro se os respectivos componentes forem iguais, i.e., $(a, b) = (a', b')$ se $a = a'$ e $b = b'$.

Definimos agora *produtos cartesianos*. Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto $A \times B = \{(a, b) : \, a \in A, \, b \in B\}$ como sendo o composto pelos pares ordenados. Quando $A = B$, escrevemos $A^2 = A \times A$.

Observação. Do ponto de vista axiomático, não é claro que dados dois elementos, exista o par ordenado formado por eles. Conviveremos com esta dúvida. O importante é como pares ordenados são formados (por elementos de dois conjuntos) e quando são iguais (quando os componentes são iguais).

Observação. A extensão destes conceitos para *n-úplas* ordenadas e produtos cartesianos com n conjuntos é natural. Em particular $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n-vezes).

Chamamos R de *relação*[7] *entre A e B* se R é subconjunto de $A \times B$. Similarmente, dizemos que $a \in A$ e $b \in B$ são *relacionados* se $(a, b) \in R$. Desta definição vem o importante conceito de função. Uma *função entre A e B* nada mais é que uma relação entre A e B, e sendo assim $f \subseteq A \times B$. Esta relação entretanto satisfaz a seguinte restrição: para todo $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Denotamos esta relação especial por $f : A \to B$. Dado $a \in A$, $b \in B$, dizemos que $f(a) = b$ se $(a, b) \in f$.

Na prática, comumente nos "esquecemos" desta definição e tratamos funções de forma mais informal e direta. Este será o tratamento dado neste texto, a começar na Seção 1.1. Este pecadilho matemático não chega a atrapalhar nossos objetivos, mas é importante ter em mente a definição formal.

De forma similar, a *relação de equivalência* é um tipo de relação usado para "identificar" dois elementos de um mesmo conjunto. Então R é uma relação de equivalência entre A e A se

- $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$
- $(a, a') \in R \implies (a', a) \in R$
- $(a, a') \in R$ e $(a', a'') \in R \implies (a, a'') \in R$

É comum a notação $a \sim a'$ para indicar que $(a, a') \in R$. Outra notação comum é indicar o conjunto de elementos equivalentes a um elemento $a \in A$ por

$$[a]_R = \{a' : \, a \sim a'\}.$$

[7] O conceito de relação de ordem vem daqui.

Podemos definir também A/R, que é o *conjunto das classes de equivalência*:

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}.$$

EXEMPLO 1.1. Denote por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Defina em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p,q) : p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z}^*\}$ a relação de equivalência R dada por $(p,q) \sim (p',q')$ se $pq' = p'q$. Então

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R.$$

"Na prática", escrevemos $1/2 = 2/4 = 3/6 \dots$, e não $(1,2) \sim (2,4) \sim (3,6) \dots$.

Outro tipos de relação são as que definem *ordenações parciais e totais*. Denotamos uma relação ordenação parcial de um conjunto A por $a \precsim b$, onde a, $b \in A$, tal que

- $a \precsim a$ para todo $a \in A$
- $a \precsim a'$ e $a' \precsim a \implies a = a'$
- $a \precsim a'$ e $a' \precsim a'' \implies a \precsim a''$

Uma ordenação é total se quaiquer elementos a, a' são *comparáveis*, i.e., $a \precsim a'$ ou $a' \precsim a$. Note que a relação $R \subset A \times A$ é dada por $R = \{(a,a') \in A \times A : a \precsim a'\}$.

EXEMPLO 1.2. Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são totalmente ordenados usando-se a relação $\leq$ usual. Em se tratando de conjuntos, a relação definida por $\subseteq$ define uma relação parcial (ver exercício 1.7), mas não total. De fato, considere por exemplo $\mathcal{F} = \big\{\{1,2\},\, \{2\},\, \{3\}\big\}$. Então $\{2\} \subseteq \{1,2\}$, mas $\{2\} \subsetneq \{3\}$ e $\{3\} \subsetneq \{2\}$, e portanto $\{2\}$ e $\{3\}$ não são comparáveis.

1.3. Demonstração por indução e contradição

Supomos aqui que as propriedades básicas de conjuntos são conhecidas. Em particular, são de grande importância os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1,2,3,4,\dots\} \quad \text{(números naturais)},\\ \mathbb{Z} &= \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\} \quad \text{(números inteiros)},\\ \mathbb{Q} &= \{m/n : m,n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\} \quad \text{(números racionais)}, \end{aligned}$$

além é claro do conjunto dos números reais, que denotaremos por $\mathbb{R}$.

Começamos por rever, através de um exemplo, como é possível demonstrar alguns fatos usando argumentos indutivos.

Considere a afirmativa

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1) \tag{1.3.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar que (1.3.1) vale para todos os inteiros positivos, começamos observando que para $n = 1$, a afirmativa é obviamente verdadeira. Suponha então que (1.3.1) seja verdade para $n = N^*$, i.e,

$$\sum_{i=1}^{N^*} i = \frac{N^*}{2}(N^*+1). \tag{1.3.2}$$

Para $n = N^* + 1$ temos

$$\sum_{i=1}^{N^*+1} i = N^* + 1 + \sum_{i=1}^{N^*} i.$$

Usamos a hipótese indutiva (1.3.2) obtemos

$$\sum_{i=1}^{N^*+1} i = N^* + 1 + \frac{N^*}{2}(N^* + 1) = \frac{N^* + 1}{2}(N^* + 2),$$

e podemos concluir que (1.3.1) vale para $n = N^* + 1$, e portanto vale para todos os inteiros positivos.

Um exemplo interessante de demonstração por indução mostra que todo número inteiro $n \geq 2$ é primo ou produto de primos [**1**]. De fato, considere a proposição para $n \geq 2$ inteiro:

$$P(n): \quad \text{todo inteiro } i, \text{ tal que } 2 \leq i \leq n, \text{ é primo ou produto de primos}$$

Então $P(2)$ é verdadeiro, pois 2 é primo. Suponha agora que $P(N^*)$ seja verdadeiro para algum inteiro dado N^*. Para $n = N^* + 1$, temos que se $N^* + 1$ for primo, então $P(N^* + 1)$ é verdadeiro. Se $N^* + 1$ não for primo, então ele é divisível por algum inteiro $p > 1$. Logo, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $N^* + 1 = pq$. Então tanto p como q são menores que $N^* + 1$, e então, pela hipótese indutiva $P(N^*)$, tanto p como q são primos ou produtos de primos. Portanto $N^* + 1$ é primo ou produto de primos. Logo $P(N^* + 1)$ vale.

Um dos passos fundamentais, e algumas vezes esquecido, da demonstração por indução é mostrar que o resultado vale para algum valor inicial (na demonstração acima, $n = 1$). De fato, sem isto, podemos erroneamente "provar" que

$$2n \text{ é sempre ímpar para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{1.3.3}$$

com uma argumentação obviamente falsa. De fato supondo que $2N^*$ é ímpar, temos que $2(N^* + 1) = 2N^* + 2$ também é pois $2N^*$ é ímpar por hipótese, e somando 2 a um ímpar obtemos um ímpar. O problema desta demonstração é que não se mostrou (1.3.3) para nenhum número natural.

1.4. Funções

Um dos conceitos mais importantes em Matemática é o de funções. Esta "entidade matemática" é definida rigorosamente no Apêndice que trata de conjuntos, ver a página 7. Para nossos propósitos entretanto, a "definição" abaixo basta.

Considere A e B dois conjuntos. Uma função é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$, um elemento $f(x) \in B$. Chamamos o conjunto A de *domínio* da função f e o denotamos por $D(f)$. Chamamos o conjunto B de *contradomínio* da função f. Escrevemos $f : A \to B$, ou ainda

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Se $E \subseteq A$, chamamos de *imagem de E* ao conjunto

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Similarmente, dado um conjunto H, chamamos de *imagem inversa de* H o conjunto

$$f^{-1}(H) = \{x : f(x) \in H\}.$$

Se $f(A) = B$ dizemos que f é *sobrejetiva* (ou simplesmente *sobre*). Dizemos que f é *injetiva* (ou *biunívoca* ou *um a um* ou 1-1) quando, dados a, $a' \in D(f)$, se $f(a) = f(a')$ então $a = a'$. Numa forma mais compacta, escrevemos que para todo a, $a' \in D(f)$ temos

$$f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

Se f é injetiva e sobre, a chamamos de *bijetiva* ou de uma *bijeção*.

Dizemos que $g : B \to A$ é *função inversa* de f se

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A, \qquad f(g(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B.$$

Quando esta existir, denotamos a inversa de f por f^{-1}.

Observação. Note que a definição de *imagem inversa* independe de existir ou não a função inversa. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não tem inversa. Entretanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.3. Seja

$$\begin{aligned} f :&(0,4) \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Então o domínio é $(0,4)$ e a imagem é $(0,2)$. Note que f não é invertível pois f não é sobrejetiva. Entretanto as imagens inversas

$$f^{-1}\big((1,2)\big) = (1,4), \qquad f^{-1}(\{4\}) = \emptyset, \qquad f^{-1}([-2,0)) = \emptyset, \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

são bem-definidas.

1.5. Conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis

Um conjunto B é *finito* se é vazio ou se existe uma bijeção entre B e $\{1, 2, \cdots, N\}$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Caso B não seja finito, o dizemos *infinito*. Se B é finito ou se existe uma bijeção entre B e $\mathbb{N}$, dizemos que B é *enumerável*.

Observação. Existe aqui uma diferença entre os termos usados em inglês no livro do Bartle [**3**], e suas traduções diretas em português. Seguindo Elon [**8**], usamos o termo *enumerável* para equivaler ao inglês *countable*. Já as expressões *enumerable* ou *denumerable* são usadas quando existe bijeção com $\mathbb{N}$, i.e., exclui os conjuntos finitos. Por sua vez, Rudin [**16**] define os termos de uma terceira forma.

Exemplo 1.4. O conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ é finito pois a função $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4, 5\}$ dada por $\phi(1) = 2$, $\phi(2) = 3$, $\phi(3) = 4$, $\phi(4) = 5$ é uma bijeção. Como o conjunto é finito, ele é enumerável.

Exemplo 1.5. $P = \{2, 4, 6, \cdots\}$ é enumerável pois $\phi : \mathbb{N} \to P$ definida por $\phi(n) = 2n$ é uma bijeção entre P e $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.6. O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável pois

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\},$$

e $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $\phi(i) = (-1)^i[i/2]$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A função $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é tal que $[x]$ é a parte inteira de x, i.e., o maior inteiro menor ou igual a x.

Exemplo 1.7. $\mathbb{Q}$ é enumerável pela "contagem diagonal":

$$\begin{array}{ccccccc}
0, & & & & & & \\
1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \cdots \\
1/2, & -1/2, & 2/2, & -2/2, & 3/2, & -3/2, & \cdots \\
1/3, & -1/3, & 2/3, & -2/3, & 3/3, & -3/3, & \cdots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

e podemos contar pois

$$\mathbb{Q} = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{3}, \cdots\right\}.$$

Exemplo 1.8. O conjunto de números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. Para mostrar isto, usaremos uma demonstração por contradição. Mostraremos na verdade que $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ não é enumerável.

Usando a base decimal, todo elemento $x \in I$ pode ser representado pelos dígitos $x = 0, a_1a_2a_3\cdots$, onde $a_i \in \{0, \dots, 9\}$. Note que esta representação não é única; por exemplo $1,0000\cdots = 0,9999\dots$. Os números da forma $\ell \times 10^{-k}$, para algum ℓ, $k \in \mathbb{N}$, possuem exatamente duas representações possíveis. Os demais números têm somente uma representação [**18**].

Suponha agora que I é enumerável. Então existe uma enumeração $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dos elementos de I tal que

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots, \\
x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots, \\
x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots, \\
&\dots,
\end{aligned}$$

onde $a_{ij} \in \{0, \dots, 9\}$. Seja agora $y = 0, b_1b_2b_3\cdots$ onde

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{se } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Logo, por construção, y não é da forma $\ell \times 10^{-k}$, onde ℓ, $k \in \mathbb{N}$, e portanto y possui representação única. Como $y \in I$ e $b_i \neq a_{ii}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $y \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz a afirmação que $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma enumeração dos elementos de I. Portanto, I não é enumerável.

1.6. Exercícios

Exercício 1.1. Mostre que

(1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \ge 0\} = \mathbb{R}$.
(2) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^2 \ge 0\}$.

(3) $\mathbb{R} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\}$.

Exercício 1.2. Mostre a regra de *De Morgam* dada em (1.2.1).

Exercício 1.3. Mostre que $\{a, a\} = \{a\}$.

Exercício 1.4. Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, i.e., $A \cap B = \emptyset$. Seja $X = A \cup B$. Mostre que $A = X \backslash B$ e $B = X \backslash A$.

Exercício 1.5. Sejam A e B dois conjuntos, e $C = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Mostre que $C = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ e que $C \cap A \cap B = \emptyset$.

Exercício 1.6. Mostre que se um conjunto A é totalmente ordenado, então todos seus subconjuntos também o são.

Exercício 1.7. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de conjuntos. Mostre que $\subseteq$ define uma ordenação parcial.

Exercício 1.8. Mostre por indução que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.9. Prove que, para todo inteiro $n > 1$ tem-se que

$$1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Exercício 1.10. Mostre por indução a desigualdade de Bernoulli: se $x > -1$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.11. Mostre usando contradição que $\sqrt{2}$ não é racional.

Exercício 1.12. Mostre usando contradição que se $p_1, \ldots, p_n$ são todos os números primos menores ou iguais a p_n, então $p_1 \times \cdots \times p_n + 1$ não é divisível por p_i para nenhum $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercício 1.13. Mostre usando contradição que existem infinitos números primos.

Exercício 1.14. Mostre que uma função tem inversa se e somente se ela é uma bijeção.

Exercício 1.15. Sejam os conjuntos A infinito e $B \neq \emptyset$ finito, e considere uma função $f : A \to B$. Mostre que existe $b \in B$ tal que $f^{-1}(\{b\})$ é infinito.

Exercício 1.16. Sejam A e B finitos. Construa uma bijeção entre $\{1, 2, \ldots, |A||B|\}$ e $A \times B$, onde $|A|$ denota o número de elementos de A (o mesmo para $|B|$ e B).

Exercício 1.17. Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável da seguinte forma: mostre que $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T = \{(m, n) : n \geq m\}$, onde $\phi(m, n) = (m, m + n - 1)$, é uma bijeção. A seguir mostre que a função definida de T em $\mathbb{N}$ por $(m, n) \to (1/2)n(n+1) - n + m$ é também uma bijeção. O esquema das bijeções é como abaixo:

$$\begin{array}{cccccc}
\phi(1,1) & \phi(1,2) & \phi(1,3) & \phi(1,4) & \phi(1,5) & \cdots \\
 & \phi(2,1) & \phi(2,2) & \phi(2,3) & \phi(2,4) & \cdots \\
 & & \phi(3,1) & \phi(3,2) & \phi(3,3) & \cdots \\
 & & & \phi(4,1) & \phi(4,2) & \cdots \\
 & & & & \vdots &
\end{array}$$

$$= \begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \cdots \\
 & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,3) & \cdots \\
 & & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \cdots \\
 & & & (4,4) & (4,5) & \cdots \\
 & & & & \vdots &
\end{array} = \begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 4 & 7 & 11 & \cdots \\
 & 3 & 5 & 8 & 12 & \cdots \\
 & & 6 & 9 & 13 & \cdots \\
 & & & 10 & 14 & \cdots \\
 & & & & \vdots &
\end{array}$$

Exercício 1.18. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Mostre que o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável. Conclua assim que $\mathbb{Z}$ enumerável implica em $\mathbb{Q}$ enumerável.

Exercício 1.19. Porque não se pode argumentar como no exemplo 1.8 e concluir erroneamente que os racionais *não* são enumeráveis.

Exercício 1.20. Para $i \in \mathbb{N}$, seja A_i conjunto infinito enumerável. Mostre que o produto cartesiano infinito $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ não é enumerável.

Exercício 1.21. Para $i \in \mathbb{N}$, seja $A_i = \{0,1\}$. Mostre que o produto cartesiano infinito $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ não é enumerável.

Exercício 1.22. Considere o conjunto S em que cada elemento de S é uma sequência da forma $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ com $a_i \in \{0,1\}$, i.e.,

$$S = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : \, a_i \in \{0,1\}, \, i \in \mathbb{N}\}.$$

Decida se S é ou não enumerável, e prove sua afirmativa.

Exercício 1.23. Mostre que, para todo $N \in \mathbb{N}$, se $A_1, \dots, A_N$ são enumeráveis, então $A_1 \times \cdots \times A_N$ é enumerável. (dica: usar o resultado do exercício 1.18).

Exercício 1.24. Seja A enumerável e suponha que exista uma função $f : A \to B$ sobrejetiva. Mostre que B é enumerável.

Exercício 1.25. Seja a função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma. Defina $x(1) = 1$ e $x(k) = x(k-1) \times k$, para todo inteiro $k > 1$. Mostre que $x(k) = k!$.

Exercício 1.26. Usando indução, mostre que existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $j^2 - 10j > 0$ para todo inteiro $j > J$.

Exercício 1.27. Seja $\lambda < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\sum_{i=n}^{k} \lambda^i = \lambda^n \frac{1 - \lambda^{k-n+1}}{1 - \lambda}$$

para todo inteiro $k \geq n$.

Exercício 1.28. Considere a base decimal, e mostre que os números da forma $\ell \times 10^{-k}$, para algum ℓ, $k \in \mathbb{N}$, possuem exatamente duas representações possíveis. Mostre também que os demais números têm somente uma representação.

Exercício 1.29 (Existência do elemento mínimo). Mostre que dado um conjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{N}$, existe $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$.

Exercício 1.30. Seja A um conjunto enumerável, e considere uma função $f : A \to B$ sobrejetiva. Mostre que B também é enumerável.

CAPíTULO 2

Os números reais

[1] Neste capítulo, falaremos sobre números reais. Suporemos aqui que os números reais e as operações neles definidas são bem definidos e "existem", sem entrar em detalhes sobre a construção deste corpo. A idéia é apenas apresentar propriedades que os reais satisfazem. A seguir, falaremos sobre abertos e fechados nos reais.

2.1. Os números Reais

2.1.1. Propriedades dos Reais. Para discutir uma importante propriedade dos números reais, introduziremos o conceito de cotas. Para tal usaremos o fato de que $\mathbb{R}$ é *ordenado*, i.e., existe uma relação de ordem denotada por $<$ indicando se um elemento é *menor* que outro. Usaremos também os símbolos $>$, $\leq$, $\geq$, indicando se um elemento é maior, menor ou igual, maior ou igual, respectivamente.

DEFINIÇÃO 2.1.1. *Considere um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $c^* \in \mathbb{R}$ é* cota superior *de A se $a \leq c^*$ para todo $a \in A$. Analogamente, dizemos que $c_* \in \mathbb{R}$ é* cota inferior *de A se $c_* \leq a$ para todo $a \in A$. Se um conjunto tem cota superior dizemos que ele é* limitado por cima ou superiormente. *Se um conjunto tem cota inferior dizemos que ele é* limitado por baixo ou inferiormente. *Se um conjunto tem cota superior e inferior, dizemos que ele é limitado.*

Note que nem todos os conjuntos possuem cotas superiores e/ou inferiores. Por exemplo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ não possui cota superior, apesar de possuir cota inferior. Segue-se da definição que se um conjunto possui cota superior, então ele possui infinitas cotas superiores:

$$c^* \text{ cota superior de } A \implies c^* + 1 \text{ cota superior de } A.$$

Observação análoga vale para as cotas inferiores.

EXEMPLO 2.1. O conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ é limitado superiormente mas não inferiormente. De fato qualquer número não negativo é cota superior de $\mathbb{R}^-$, pois se $b \geq 0$, então $x \in \mathbb{R}^-$ implica que $x < 0 \leq b$. Por outro lado, nenhum número $a \in \mathbb{R}$ pode ser cota inferior pois sempre existe $y \in \mathbb{R}^-$ tal que $y < a$. Concluímos portanto que $\mathbb{R}^-$ não é limitado.

EXEMPLO 2.2. Usando argumentos como acima, vemos que $\mathbb{R}$ não é limitado nem superiormente nem inferiormente.

EXEMPLO 2.3. Seja $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Então qualquer número $b \geq 1$ é cota superior de I, e todo número $a \leq 0$ é cota inferior de I. De fato, nestes casos teríamos $a \leq x \leq b$ para todo $x \in I$. Logo, por definição, I é limitado.

[1] Última Atualização: 07/11/2017

Exemplo 2.4. Note que qualquer número é cota inferior e superior do conjunto vazio.

Definição 2.1.2. *Se um conjunto A é não vazio e limitado superiormente, chamamos de* supremo de A *ou simplesmente* $\sup A$ *a menor de suas cotas superiores. Analogamente, se um conjunto A é não vazio e limitado por baixo, chamamos de* ínfimo de A *ou simplesmente* $\inf A$ *a maior de suas cotas inferiores.*

Logo, se $s^* = \sup A$, então

(1) $a \le s^*$ para todo $a \in A$.
(2) Se existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $a \le v$ para todo $a \in A$, então $s^* \le v$.

Observação. Segue-se da definição a unicidade do supremo e do ínfimo, se estes existirem; ver Exercício 2.4.

O resultado a seguir nos dá uma forma equivalente para determinar o supremo de um conjunto.

Lema 2.1.3. Seja A não vazio e s^* cota superior de A. Então $s^* = \sup A$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existir $a_\epsilon \in A$ tal que $s^* - \epsilon < a_\epsilon$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $s^* = \sup A$ e $\epsilon > 0$. Como $s^* - \epsilon < s^*$, então $s^* - \epsilon$ não é cota superior de A. Logo, existe um elemento $a_\epsilon \in A$ tal que $a_\epsilon > s^* - \epsilon$.

$(\Leftarrow)$ Seja s^* cota superior de A. Suponha que para todo ϵ existe $a_\epsilon \in A$ tal que $s^* - \epsilon < a_\epsilon$. Vamos então mostrar que $s^* = \sup A$.

Seja c^* cota superior de A com $c^* \ne s^*$. Se $c^* < s^*$, definimos $\epsilon = s^* - c^*$ e então $\epsilon > 0$ e existe $a_\epsilon \in A$ tal que $a_\epsilon > s^* - \epsilon = c^*$. Isto é uma contradição com o fato de c^* ser cota superior. Logo temos obrigatoriamente $c^* > s^*$, e s^* é a menor das cotas superiores, i.e., $s^* = \sup A$. □

Exemplo 2.5. $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ tem $\sup I = 1$ e $\inf I = 0$. Note que $\sup I \in I$ e $\inf I \in I$.

Exemplo 2.6. $U = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ tem $\sup U = 1$ e $\inf U = 0$. Note que neste caso $\sup I \notin U$ e $\inf I \notin U$.

Uma propriedade *fundamental* dos reais, que o distingue por exemplo dos racionais, é dada a seguir.

Propriedade do supremo de $\mathbb{R}$: Todo conjunto não vazio em $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem um supremo em $\mathbb{R}$.

Da propriedade acima, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.1.4 (Propriedade arquimediana). Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demonstração. (Por contradição.) Seja $x \in \mathbb{R}$ e suponha que não exista n tal que $n > x$. Portanto, x é cota superior de $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Pela Propriedade do supremo de $\mathbb{R}$, então $\mathbb{N}$ tem um supremo s. Logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < m$. Mas então, $s < m + 1$, uma contradição, pois $m + 1 \in \mathbb{N}$ e s deveria ser cota superior de $\mathbb{N}$. □

Observação. Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$: Se x, $y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Da mesma forma, existe $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

2.1.2. Valor absoluto e Intervalos. Para um número real a, o valor absoluto (ou módulo) de a é dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

EXEMPLO 2.7. Por definição $|5| = 5$, e $|-5| = -(-5) = 5$.

LEMA 2.1.5. Algumas propriedades dos números reais:

(1) $|-a| = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(2) $|ab| = |a||b|$ para todo a, $b \in \mathbb{R}$.
(3) Dados a, $k \in \mathbb{R}$ temos que $|a| \leq k$ se e somente se $-k \leq a \leq k$.
(4) $-|a| \leq a \leq |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Se $a = 0$, então $|0| = 0 = |-0|$. Se $a > 0$, então $-a < 0$ e logo $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|-a| = -a = |a|$.
(2) Exercício.
(3) Exercício.
(4) Tome $k = |a|$ no ítem (3) do lema. Então $|a| \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|$.

□

LEMA 2.1.6 (Desigualdade Triangular). Para todo a, $b \in \mathbb{R}$ temos

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$. Logo, $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$. Pelo ítem (3) do Lema 2.1.5 temos que $|a + b| \leq |a| + |b|$, como queríamos demonstrar. □

Dentre os mais importantes conjuntos reais estão os intervalos. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Chamaremos de *intervalo* quaisquer conjuntos dos seguintes tipos:

(1) Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
(2) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
(3) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
(4) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
(5) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
(6) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
(7) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
(8) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
(9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
(10) $\emptyset$

A definição de alguns intervalos particulares é imediata usando-se o módulo:

$$(a - d, a + d) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < d\}, \qquad [a - d, a + d] = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq d\},$$

Uma importante propriedade dos números reais, intrinsicamente ligada à sua própria definição, é dada por interseções de intervalos encaixantes, noção que discutimos a seguir.

DEFINIÇÃO 2.1.7. *Dizemos que uma sequência de intervalos I_n é encaixante se*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots .$$

Nos dois exemplos abaixo, ilustramos o fato de que interseções de intervalos encaixantes podem ser vazias ou não. Entretanto, quando os intervalos forem fechados, o Teorema dos intervalos encaixantes abaixo garante que estas interseções são sempre não vazias.

EXEMPLO 2.8. Se $I_n = [0, 1/n]$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. De fato, $0 \in I_N$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Por outro lado, para $x \in \mathbb{R}$ não nulo a Propriedade arquimediana (Lema 2.1.4) garante a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin I_n$. Logo $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

EXEMPLO 2.9. Usando novamente a Propriedade arquimediana (Lema 2.1.4) temos que se $I_n = (0, 1/n)$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

TEOREMA 2.1.8 (Teorema dos intervalos encaixantes). *Sejam $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos fechados, limitados, não vazios e encaixantes. Então existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Além disto, se* $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$*, então ξ é o único elemento da interseção.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue-se das hipóteses que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$a_{n+1} \geq a_n, \qquad b_{n+1} \leq b_n, \qquad a_n \leq b_n. \tag{2.1.1}$$

Temos $b_1 \geq a_n$ para todo n pois $I_n \subseteq I_1$. Seja $\xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo $\xi \geq a_n$ para todo n. Queremos mostrar agora que $\xi \leq b_n$ para todo n. Suponha o contrário, i.e., que existe $b_k < \xi$ para algum k. Logo $b_k < a_m$ para algum m. Seja $p = \max\{k, m\}$. Então $a_p \geq a_m > b_k \geq b_p$, uma contradição com (2.1.1). Logo $a_n \leq \xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supondo agora que $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, definimos $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então $\eta \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\eta \geq \xi$. Como $0 \leq \eta - \xi \leq b_n - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\eta = \xi$ pois $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ (ver exercício 2.13). Finalmente, seja $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Como $x \geq \xi = \eta$ e $x \leq \eta = \xi$, então $x = \xi = \eta$ é o único ponto em $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$. □

2.2. Conjuntos abertos e fechados em $\mathbb{R}$

Para definirmos conjuntos abertos e fechados na reta utilizaremos o conceito de distância definida pelo valor absoluto $|\cdot|$. Para definirmos o que é um conjunto aberto necessitamos das chamadas bolas em $\mathbb{R}$. Dizemos que a *bola aberta de raio $r > 0$ e centro $x \in \mathbb{R}$* é dada por

$$B_r(x) = (x - r, x + r).$$

De forma similar, chamamos de *bola fechada de raio r e centro x* o conjunto dado por $[x - r, x + r]$.

Podemos agora definir conjuntos abertos na reta.

DEFINIÇÃO 2.2.1. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é* aberto em $\mathbb{R}$ *se para todo $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A$. Neste curso trataremos como sinônimos termos* abertos na reta*,* abertos em $\mathbb{R}$*, ou simplesmente* abertos*.*

EXEMPLO 2.10. $\emptyset$ é aberto por "vacuidade".

EXEMPLO 2.11. $\mathbb{R}$ é aberto nos reais pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $B_1(x) = (x-1, x+1) \subseteq \mathbb{R}$. Note que tomamos $\epsilon = 1$.

EXEMPLO 2.12. O conjunto $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ não é aberto. De fato $0 \in I$, e para todo $\epsilon > 0$, a bola $B_\epsilon(0) = (-\epsilon, \epsilon) \not\subseteq I$, pois, por exemplo, $-\epsilon/2 \in B_\epsilon(0)$ mas $-\epsilon/2 \notin I$.

EXEMPLO 2.13. O conjunto $(0,1)$ é aberto em $\mathbb{R}$. De fato para qualquer $x \in (0,1)$, seja $\epsilon = \min\{x/2, (1-x)/2\}$. Então $B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq (0,1)$.

LEMA 2.2.2. Duas propriedades fundamentais de conjuntos abertos são

(1) A união arbitrária de abertos é aberta.
(2) A interseção finita de abertos é aberta.

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar (1), seja Λ um conjunto de índices, $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família arbitrária de abertos, e seja

$$G = \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda.$$

Tome $x \in G$. Então $x \in G_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Mas por hipótese G_{λ_0} é aberto, e então existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq G_{\lambda_0}$. Logo

$$B_\epsilon(x) \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = G$$

e então G é aberto.

Para mostrar (2), sejam $G_1, \cdots, G_k$ abertos e $G = \cap_{i=1}^k G_i$. Seja $x \in G$. Logo $x \in G_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como G_i é aberto, seja $\epsilon_i > 0$ tal que $B_{\epsilon_i}(x) \subseteq G_i$. Definindo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k\}$, temos $\epsilon > 0$ e $B_\epsilon(x) \subseteq G_1 \cap \cdots \cap G_k = G$. Logo G é aberto. $\square$

EXEMPLO 2.14. Em uma dimensão, seja $I_n = (0, 1-1/n)$ onde $n \in \mathbb{N}$. Então I_n é aberto e $\cup_{n=1}^\infty I_n = (0,1)$ também o é.

EXEMPLO 2.15. A interseção infinita de abertos pode não ser aberta. Por exemplo, $G_n = (0, 1+1/n)$ é aberto em $\mathbb{R}$, ao contrário de $\cap_{n=1}^\infty G_n = (0,1]$. Qual o passo da demonstração do Lema 2.2.2 que não seria correto para este exemplo?

Um outro importante conceito é o de conjuntos fechados, e temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.2.3. *Um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se seu complemento*

$$\mathcal{C}(F) = \mathbb{R} \backslash F = \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\}$$

é aberto.

Para mostrar que um conjunto G é aberto em $\mathbb{R}$, basta mostrar que para todo $x \in G$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq G$. Para mostrar que F é fechado, basta mostrar que para todo $x \notin F$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap F = \emptyset$.

EXEMPLO 2.16. $[0,1]$ é fechado em $\mathbb{R}$ pois $\mathcal{C}([0,1]) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 2.17. $(0,1]$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 2.18. Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são fechados pois seus complementares $\mathcal{C}(\emptyset) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \emptyset$ são abertos.

EXEMPLO 2.19. Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, a bola fechada de centro x e raio r é fechada.

COROLÁRIO 2.2.4. Como consequência do Lema 2.2.2 temos:

(1) A interseção arbitrária de fechados é fechada.
(2) A união finita de fechados é fechada.

DEMONSTRAÇÃO. Utilizamos nas duas demonstrações a regra de *De Morgam* (1.2.1).

(1) Seja $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma coleção de fechados em $\mathbb{R}$, e seja $F = \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Então $\mathcal{C}(F) = \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{C}(F_\lambda)$ é uma união de abertos. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto e, por definição, F é fechado.
(2) Se $F_1,\dots, F_n$ são fechados em $\mathbb{R}$ e $F = F_1\cup\cdots\cup F_n$, então $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_1)\cap\cdots\cap\mathcal{C}(F_n)$. Como a interseção finita de abertos é aberta, e $\mathcal{C}(F_i)$ são abertos, então $\mathcal{C}(F)$ é aberto. Logo F é fechado.

□

Exemplo 2.20. $F_n = [1/n, 1]$ é fechado, mas $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ não o é.

2.2.1. Outras caracterizações de conjuntos abertos e fechados. Outras noções que podem ser úteis quando precisamos caracterizar conjuntos abertos ou fechados vêm a seguir.

Definição 2.2.5. *Sejam $x \in \mathbb{R}$, e $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos então que*
(1) uma vizinhança aberta *de x é um conjunto aberto que contenha x.*
(2) x é ponto interior de *A se existe uma vizinhança aberta de x contida em A.*
(3) x é ponto de fronteira de *A se toda vizinhança aberta de x contém ponto de A e do complementar $\mathcal{C}(A)$.*
(4) x é ponto exterior de *A se existe uma vizinhança aberta de x contida em $\mathcal{C}(A)$.*

Observe que das definições acima, dados um ponto $x \in \mathbb{R}$, e um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, então x é ponto interior, exterior, ou de fronteira de A, sendo as opções mutuamente exclusivas.

Exemplo 2.21. Seja $U = (0, 1)$. Se $a \in U$, então U é vizinhança aberta de a. De forma análoga, qualquer conjunto aberto é vizinhança aberta de seus próprios pontos.

As seguintes propriedades podem ser usadas para se definir se um conjunto é ou não aberto.

Lema 2.2.6. Seja $G \subseteq \mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes.
(1) G é aberto.
(2) Todo ponto de G é ponto interior.
(3) G não contém nenhum de seus pontos de fronteira.

Demonstração. $\big((1) \Rightarrow (2)\big)$ Supondo (1), seja $x \in G$. Como por hipótese G é aberto, temos que G é vizinhança aberta de x. Logo x é ponto interior de G. Como x é arbitrário, obtemos (2).

$\big((2) \Rightarrow (3)\big)$ Se todo ponto de G é interior, então nenhum de seus pontos é de fronteira.

$\big((3) \Rightarrow (1)\big)$ Suponha que G não contém nenhum de seus pontos de fronteira. Se G é vazio, então é aberto. Suponha então que G é não vazio. Seja $x \in G$. Como G não contém pontos de fronteira, existe vizinhança aberta U de x tal que $U \subseteq G$. Logo G é aberto. □

Corolário 2.2.7. Seja $F \subseteq \mathbb{R}$. Então F é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de fronteira.

Finalmente concluímos esta seção com o conceito de ponto de acumulação.

DEFINIÇÃO 2.2.8. *Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de* acumulação *de $A \subseteq \mathbb{R}$ se toda vizinhança aberta de x contém pelo menos um ponto de A diferente de x.*

Em outras palavras, um ponto $x \in \mathbb{R}$ é de acumulação de $A \subseteq \mathbb{R}$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existir $\xi \neq x$ tal que $\xi \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A$.

Note que um ponto pode ser de acumulação de um certo conjunto mesmo sem pertencer a este conjunto. De fato veremos vários exemplos abaixo em que tal situação ocorre.

EXEMPLO 2.22. Se $A = (0, 1)$, então todo ponto em $[0, 1]$ é ponto de acumulação de A.

EXEMPLO 2.23. O conjunto $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ não tem ponto de acumulação.

EXEMPLO 2.24. O único ponto de acumulação de $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots\}$ é o 0.

EXEMPLO 2.25. Os pontos de acumulação de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ formam o conjunto $[0, 1]$.

EXEMPLO 2.26. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente e $u = \sup A$. Se $u \notin A$, então u é ponto de acumulação de A, pois para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x \in (u - \epsilon, u + \epsilon)$.

Uma caracterização útil de fechados utiliza o conceito de pontos de acumulação, como o resultado a seguir indica.

TEOREMA 2.2.9. *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.*

DEMONSTRAÇÃO. ($\Rightarrow$) (Por contradição) Seja F um fechado em $\mathbb{R}$, e x ponto de acumulação de F. Temos que mostrar que $x \in F$. De fato, se $x \notin F$, então $x \in \mathcal{C}(F)$. Mas como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq \mathcal{C}(F)$. Logo $B_\epsilon(x) \cap F = \emptyset$ e x não é ponto de acumulação de F, uma contradição. Portanto $x \in F$.

($\Leftarrow$) Supomos agora que F contém todos os seus pontos de acumulação. Considere então um ponto $y \in \mathcal{C}(F)$. Então y não é ponto de acumulação de F, e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(y) \subseteq \mathcal{C}(F)$. Logo $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e concluímos que F é fechado. □

EXEMPLO 2.27. O conjunto $[0, 1)$ não é nem aberto nem fechado.

Para mostrar que $[0, 1)$ não é fechado, considere os pontos $x_n = 1 - 1/n \in [0, 1)$. Então $|x_n - 1| = 1/n$ e 1 é ponto de acumulação. Como $1 \notin [0, 1)$, então $[0, 1)$ não contém um de seus pontos de acumulação e logo não é fechado. Para mostrar que $[0, 1)$ não é aberto, note que *toda* todo intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ de raio $\epsilon > 0$ contém pontos em $[0, 1)$ e no complementar de $[0, 1)$.

2.3. O Teorema de Bolzano–Weierstrass

Dizemos que um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é limitado se existe uma constante c tal que para todo $x \in A$ tem-se $|x| \leq c$.

Uma importante aplicação do Teorema dos intervalos encaixantes é na demonstração do resultado a seguir, o Teorema de Bolzano–Weiertrass.

TEOREMA 2.3.1 (Bolzano–Weiertrass). *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito e limitado tem pelo menos um ponto de acumulação.*

A seguir damos uma idéia da demonstração antes de proceder formalmente. Os passos são os seguintes:

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ infinito e limitado.

(1) $A \subseteq I_1 := [a, b]$ para algum $a < b \in \mathbb{R}$, pois A é limitado.
(2) Seja I_2 um dos conjuntos $[a, (a+b)/2]$ ou $[(a+b)/2, b]$, tal que I_2 contenha infinitos pontos de A. Note que $I_2 \subseteq I_1$.
(3) Divida I_2 em dois subconjuntos fechados de mesmo comprimento e defina I_3 como sendo uma das partes tal que que contenha infinitos pontos de A. Por definição, $I_3 \subseteq I_2$.
(4) Prossiga assim definindo $I_4, \dots, I_n$ tais que $I_n \subseteq \cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1$, e que I_n seja fechado e contenha infinitos pontos de A.
(5) Usando Teorema dos intervalos encaixantes, seja $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.
(6) Mostre que x é ponto de acumulação.

Demonstração. (do Teorema 2.3.1). Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ infinito e limitado. Como A é limitado, existe $I_1 = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \subseteq I_1$. Note que $[a, (a+b)/2]/2$ ou $[(a+b)/2, b]$ contém infinitos pontos de A, e chame de I_2 tal intervalo. Da mesma forma, decomponha I_2 em dois subintervalos fechados, e denomine por I_3 um dos subintervalos tal que $I_3 \cap A$ contenha infinitos pontos. Assim procedendo, obtemos uma sequência encaixante $I_n \subseteq \cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1$. Pelo Teorema dos intervalos encaixantes, existe $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Temos agora que mostrar que ξ é ponto de acumulação. Note que o comprimento de $I_n = b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $V = (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$. Seja n tal que $(b-a)/2^{n-1} < \epsilon$. Então $I_n \subseteq V$, pois se $x \in I_n$, então

$$|x - \xi| < b_n - a_n < \epsilon \implies x \in V.$$

Logo V contém infinitos pontos de A, e ξ é ponto de acumulação. $\square$

2.4. Exercícios

Exercício 2.1. Prove a afirmativa do exemplo 2.4.

Exercício 2.2. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado, então $A \subseteq [\inf A, \sup A]$.

Exercício 2.3. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : A \to \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f + g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Exercício 2.4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto limitado. Mostre que $\inf A$ e $\sup A$ são únicos.

Exercício 2.5. Enuncie e demonstre o resultado análogo ao Lema 2.1.3 no caso do ínfimo.

Exercício 2.6. Suponha que A e B sejam dois conjuntos de números reais limitados superiormente, e que toda cota superior de A seja cota superior de B. Mostre que $\sup A \geq \sup B$.

Exercício 2.7. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ limitados superiormente, e seja o conjunto $C = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ formado pela soma dos elementos de A com os elementos de B. Mostre que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Exercício 2.8. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \inf\{|x - y| : y \in A\}.$$

Mostre que f está bem definida. Construa entretanto um exemplo onde não exista $y \in A$ tal que $f(x) = |x - y|$, para algum $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.9 (Densidade dos racionais nos reais). Mostre que dados x, $y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Exercício 2.10. Demonstre os ítens (2) e (3) no Lema 2.1.5.

Exercício 2.11. Faça os detalhes do exemplo 2.9.

Exercício 2.12. Mostre que intervalos encaixantes não limitados podem ter interseção vazia.

Exercício 2.13. Usando a notação do Teorema 2.1.8, mostre que $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ se e somente se $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 2.14. Aponte na demonstração do Teorema 2.1.8 quais o(s) argumento(s) que não é (são) válido(s) se considerarmos uma sequência encaixante de intervalos abertos.

Exercício 2.15. Mostre como exemplo uma sequências de fechados $F_j \subset \mathbb{R}$ não vazios tais que $F_{j+1} \subset F_j$ e $\cap_{j=1}^{\infty} F_j = \emptyset$.

Exercício 2.16. Mostre que a propriedade do supremo de $\mathbb{R}$ (ver página 16) é equivalente aos seguintes resultados:

(1) teorema dos intervalos encaixantes (Teorema 2.1.8)
(2) teorema de Bolzano–Weiertrass em $\mathbb{R}$ (Teorema 2.3.1)

(Ver Exercício 3.11)

Exercício 2.17. O conjunto $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ é aberto? Prove a sua afirmação.

Exercício 2.18. Responda à pergunta do Exemplo 2.15.

Exercício 2.19. Mostre que $B_1(0)$ é aberto.

Exercício 2.20. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, fechado e limitado. Mostre que $\sup I \in I$.

Exercício 2.21. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que uma, e apenas uma das afirmativas abaixo é verdadeira:

(1) x é ponto interior de A
(2) x é ponto exterior de A
(3) x é ponto de fronteira de A

Exercício 2.22. Apresente um exemplo para cada uma das situações abaixo:

(a) Um conjunto fechado, não vazio, e sem pontos de acumulação. Por que isto não contradiz o Teorema 2.2.9?
(b) Um conjunto não enumerável, tal que todo ponto dele é ponto de fronteira
(c) Um conjunto não fechado que seja união de fechados

Exercício 2.23. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, e denote por interior de A o conjunto A° de pontos interiores de A. Mostre que

(1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
(2) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(3) Se $B \subseteq A$ e B é aberto, então $B \subseteq A^\circ$ (i.e. A° é o "maior" aberto contido em A)

Exercício 2.24. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ e $A^\circ \cup B^\circ \subsetneq (A \cup B)^\circ$.

Exercício 2.25. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Chamamos de *fecho de* A, e denotamos por $\bar{A}$, a interseção de todos os fechados que contenham A. Mostre que $x \in \bar{A}$ se e somente se x é ponto de interior ou de fronteira da A.

Exercício 2.26. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que A é fechado se e somente se $A = \bar{A}$.

Exercício 2.27. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que x é *ponto aderente* a A se para todo $\epsilon > 0$ tem-se $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Mostre que o conjunto de pontos aderentes a A é dado por $\bar{A}$, o fecho de A — ver Exercício 2.25.

Exercício 2.28. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e A' conjunto dos pontos de acumulação de A. Mostre que A' é fechado. Seja $\bar{A}$ o fecho de A, ver Exercício 2.25. Mostre que $\bar{A} = A \cup A'$. Mostre que $(\bar{A})' = A'$, isto é, o conjunto dos pontos de acumulação de A e $\bar{A}$ são iguais.

Exercício 2.29. Demonstre o Corolário 2.2.7.

Exercício 2.30. Apresente dois subconjuntos do $\mathbb{R}$ em que o conjunto dos pontos de fronteira seja vazio. Mostre que não existe nenhum outro subconjunto do $\mathbb{R}$ com estas características.

Exercício 2.31. Mostre que um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$, e $a_1, \dots a_k \in A$, então x é ponto de acumulação de $A \backslash \{a_1, \dots a_k\}$.

Exercício 2.32. Mostre que um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A se e somente se toda vizinhança aberta de x contém infinitos pontos de A.

Exercício 2.33. Mostre que todo ponto de

$$\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

é ponto de fronteira, e que 0 é o único ponto de acumulação.

Exercício 2.34. Sejam A, $B \subseteq \mathbb{R}$, e x ponto de acumulação de $A \cap B$. Mostre que x é ponto de acumulação de A e de B.

Exercício 2.35. Seja $A_i \subseteq \mathbb{R}$ conjunto aberto para todo $i \in \mathbb{N}$. Decida se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, e prove sua resposta:

(1) Se x é ponto de acumulação de $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i$, então x é ponto de acumulação de A_i para todo $i \in \mathbb{N}$.
(2) Se x é ponto de acumulação de $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, então x é ponto de acumulação de A_i para algum $i \in \mathbb{N}$.

Exercício 2.36. Mostre que se $F \neq \emptyset$ é fechado em $\mathbb{R}$, e $\inf\{|x - y| : y \in F\} = 0$, então $x \in F$.

Exercício 2.37. Mostre que se $x \neq y$ são pontos em $\mathbb{R}$, então existem vizinhanças abertas U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$ (i.e., os reais formam um *espaço de Hausdorff*)

Exercício 2.38. Mostre que se U e V são vizinhanças abertas de $x \in \mathbb{R}$, então $U \cap V$ é vizinhança aberta de x.

Exercício 2.39. Dizemos que um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se ele não é a união de dois conjuntos abertos disjuntos não vazios. Mostre que $\mathbb{R}$ é conexo.

Exercício 2.40. Decida se o Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 2.3.1) pode ser generalizado da seguinte forma:

> *Todo conjunto de $\mathbb{Q}$ infinito e limitado tem ao menos um ponto de acumulação (em $\mathbb{Q}$).*

Em caso afirmativo, prove a generalização ou dê um contra-exemplo em caso negativo.

Exercício 2.41. Usando o teorema dos intervalos encaixantes, que $\mathbb{R}$ não é enumerável. (Sugestão: considere $E = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq [0,1]$, e construa um intervalo do tipo $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $x_1 \notin I_1$. Indutivamente, construa intervalo $I_j = [a_j, b_j] \subset I_{j-1}$ tal que $x_j \notin I_j$. Conclua então que $[0,1]$ não é enumerável).

Exercício 2.42 (Limitação Total). Dizemos que um conjunto A é *totalmente limitado* se dado $r \in \mathbb{R}$, existirem índice $J \in \mathbb{N}$ e pontos $x_1, \dots, x_J \in A$ tais que $A \subset \cup_{j=1\dots J} B_r(x_j)$. Mostre que um conjunto no $\mathbb{R}$ é limitado se e somente se é totalmente limitado.

CAPíTULO 3

Sequências

[1]

3.1. Definição e resultados preliminares

Uma sequência em $\mathbb{R}$ é simplesmente uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Portanto $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ indica uma sequência de números reais, que escrevemos também como (x_k), ou ainda $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Para indicar o k-ésimo valor da sequência escrevemos simplesmente x_k.

Exemplo 3.1. $x_k = (-1)^k$ define a sequência $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.2. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, e $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$ para $k \geq 2$. Portanto temos $(x_k) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

Podemos realizar com sequências várias das operações que realizamos com números reais, como por exemplo somar, subtrair, etc. Sejam por exemplo (x_k) e (y_k) duas sequências em $\mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$. Então definimos

$$(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k), \qquad (x_k) - (y_k) = (x_k - y_k), \qquad c(x_k) = (cx_k).$$

Podemos da mesma forma definir produtos de sequências por $(x_k) \cdot (y_k) = (x_k \cdot y_k)$.

Exemplo 3.3. Se $x_k = (2, 4, 6, 8, \dots)$ e $(y_k) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, então $(x_k) \cdot (y_k) = (2, 2, 2, \cdots)$.

A primeira pergunta que surge quando tratamos de sequências é quanto à convergência destas, isto é, se quando k aumenta, os termos x_k se aproximam de algum valor real. Note que para isto, não importa o que acontece com finitos termos da sequência, mas sim seu comportamento assintótico com respeito a k. Em outras palavras queremos determinar o comportamento das sequências no "limite".

Definição 3.1.1. *Dizemos que* $x \in \mathbb{R}$ *é* limite de uma sequência (x_k), *se para toda vizinhança aberta* U *de* x *existir* $K^* \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_k \in U$ *para todo* $k \geq K^*$. *Escrevemos neste caso que* $x_k \to x$, *ou que* $x = \lim x_k$, *ou ainda*

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k.$$

De forma equivalente, $x_k \to x$ *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $K^* \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_k \in B_\epsilon(x)$ *para todo* $k \geq K^*$.

Se uma sequência tem limite, dizemos que ela converge ou que é convergente, e se não tem limite dizemos que ela diverge ou que é divergente.

[1] Última Atualização: 12/05/2017

EXEMPLO 3.4. Se $x_k = 1$, então $\lim x_k = 1$. De fato, dado $\epsilon > 0$, para todo $k \geq 1$ temos $|x_k - 1| = 0 < \epsilon$.

EXEMPLO 3.5. $\lim(1/k) = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que $1/K^* < \epsilon$. Logo, para todo $k \geq K^*$ temos $|1/k - 0| = 1/k \leq 1/K^* < \epsilon$.

Observe que diferentes situações ocorrem nos exemplos acima. Em 3.4 a sequência é constante, e a escolha de K^* independe de ϵ. Já no exemplo 3.5, temos que K^* claramente depende de ϵ.

A seguir, no exemplo 3.6 o objetivo é mostar que um certo valor x *não* é o limite da sequência (x_k). Mostramos então que existe pelo menos um certo $\epsilon > 0$ tal que para todo K^*, conseguimos achar $k \geq K^*$ tal que $|x_k - x| > \epsilon$. Note que o que fazemos é *negar* a convergência.

EXEMPLO 3.6. $(0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ não converge para 0. De fato, tome $\epsilon = 1$. Então para todo $K^* \in \mathbb{N}$ temos $2K^* > K^*$ e $x_{2K^*} = 2$. Portanto $|x_{2K^*} - 0| = 2 > \epsilon$.

Talvez a segunda pergunta mais natural em relação aos limites de sequências é quanto a unicidade destes, quando existirem. A resposta é afirmativa, como mostra o resultado abaixo.

TEOREMA 3.1.2 (Unicidade de limite). *Uma sequência pode ter no máximo um limite.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere que (x_k) é uma sequência tal que $x_k \to x$ e $x_k \to x'$, com $x \neq x'$. Sejam $\epsilon = |x - x'|/2 > 0$, e sejam K^* e $K' \in \mathbb{N}$ tais que $|x_k - x| < \epsilon$ para todo $k \geq K^*$ e $|x_k - x'| < \epsilon$ para todo $k \geq K'$. Logo, se $k \geq \max\{K^*, K'\}$, então

$$|x - x'| \leq |x - x_k| + |x_k - x'| < 2\epsilon = |x - x'|.$$

Como um número não pode ser estritamente menor que ele mesmo, temos uma contradição. Portanto $x = x'$ e o limite é único. □

Outro resultado importante trata de limites de sequências que são resultados de operações entre sequências. Por exemplo, dadas duas sequências convergentes, o limite da soma das sequências é a soma dos limites. E assim por diante.

LEMA 3.1.3. Seja (x_k) e (y_k) tais que $\lim x_k = x$ e $\lim y_k = y$. Então

(1) $\lim(x_k + y_k) = x + y$.
(2) $\lim(x_k - y_k) = x - y$.
(3) $\lim(cx_k) = cx$, para $c \in \mathbb{R}$.
(4) $\lim(x_k y_k) = xy$.
(5) se $y_k \neq 0$ para todo k e $y \neq 0$, então $\lim(x_k/y_k) = x/y$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Dado $\epsilon > 0$, seja $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - x| < \epsilon/2$ e $|y_k - y| < \epsilon/2$ para todo $k \geq K^*$. Logo

$$|x_k + y_k - (x + y)| \leq |x_k - x| + |y_k - y| < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq K^*.$$

(2) A demonstração é basicamente a mesma de (1), tomando-se o devido cuidado com os sinais.

(4) Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$|x_k y_k - xy| \leq |x_k y_k - x_k y| + |x_k y - xy| = |x_k||y_k - y| + |y||x_k - x|.$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k| < M$ e $|y| < M$. Tal constante M existe pois como (x_k) converge, ela é limitada. Agora, dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que $|y_k - y| < \epsilon/(2M)$ e $|x_k - x| < \epsilon/(2M)$ para todo $k \geq K^*$. Logo,

$$|x_k y_k - xy| \leq M[|y_k - y| + |x_k - x|] < \epsilon,$$

para todo $k \geq K^*$.

Deixamos (3) e (5) como exercícios para o leitor. □

Observação. Os resultados do lema acima continuam válidos para um número finito de somas, produtos, etc.

Às vezes, uma sequência se aproxima de algum valor em $\mathbb{R}$ de forma mais lenta que alguma outra sequência de reais que converge para zero. É possível assim garantir convergência, como o resultado a seguir nos mostra.

Lema 3.1.4. Seja (a_k) sequência convergente para 0. Se para (x_k) sequência em $\mathbb{R}$ existir $c > 0$ tal que

$$|x_k - x| \leq c|a_k| \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

então $x_k \to x$.

Demonstração. Como (a_k) converge, dado $\epsilon > 0$, seja $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k| < \epsilon/c$ para todo $k \geq K^*$. Logo

$$|x_k - x| \leq c|a_k| < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq K^*,$$

e $\lim x_k = x$. □

Corolário 3.1.5. Seja (a_k) sequência em $\mathbb{R}$ convergente para 0. Se para (x_k) sequência em $\mathbb{R}$ existir $c > 0$ e $\bar{K} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k - x| \leq c|a_k| \quad \text{para todo } k \geq \bar{K},$$

então $x_k \to x$.

Exemplo 3.7. Seja $x_k = (2/k)\sin(k)$. Então

$$|x_k - 0| \leq \frac{2}{k}.$$

Como $1/k \to 0$, podemos usar o lema acima para garantir que $\lim[(2/k)\sin(k)] = 0$.

Exemplo 3.8. $\lim_{k\to\infty}\big((2k+1)/k\big) = 2$. De fato,

$$\frac{2k+1}{k} = (2) + \left(\frac{1}{k}\right).$$

Como $\lim_{k\to\infty} 2 = 2$ e $\lim_{k\to\infty}(1/k) = 0$, nós obtemos o resultado.

Exemplo 3.9. $\lim_{k\to\infty}\big(2k/(k^2+1)\big) = 0$, pois

$$\frac{2k}{k^2+1} = \frac{2/k}{1+1/k^2}.$$

Como $\lim_{k\to\infty}(2/k) = 0$ e $\lim_{k\to\infty}(1 + 1/k^2) = 1 \neq 0$, podemos aplicar o resultado sobre quociente de sequências.

Exemplo 3.10. A sequência

$$x_k = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} i$$

converge. Primeiro note que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2+k}{2}. \tag{3.1.1}$$

Para $k = 1$ o resultado (3.1.1) é trivial. Suponha (3.1.1) vedadeiro para $k = k^*$. Temos então que

$$\sum_{i=1}^{k^*+1} i = \frac{(k^*)^2+k^*}{2} + k^* + 1 = \frac{(k^*)^2+3k^*+2}{2} = \frac{(k^*+1)^2+(k^*+1)}{2},$$

e portanto fórmula (3.1.1) é verdadeira. Temos então que

$$x_k = \frac{k^2+k}{2k^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2k}\right).$$

Logo (x_k) é soma de duas sequências convergentes, $(1/2)$ e $(1/2)(1/k)$ e

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}.$$

Uma outra noção importante é o de limitação de uma sequência. Neste caso, mesmo quando a sequência não converge, podemos conseguir alguns resultados parciais, como veremos mais a seguir.

Definição 3.1.6. *Dizemos que uma sequência (x_k) é limitada quando existe um número real C tal que $|x_k| \le C$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Um primeiro resultado intuitivo é que toda sequência convergente é limitada. De fato, é razoável pensar que se a sequência converge, ela não pode ter elementos arbitrariamente grandes em norma.

Teorema 3.1.7. *Toda sequência convergente é limitada*

Demonstração. Seja (x_k) sequência convergente e seja x seu limite. Seja $\epsilon = 1$. Como (x_k) converge, existe K^* tal que $|x - x_k| < 1$ para todo $k \ge K^*$. Logo, usando a desigualdade triangular temos

$$|x_k| \le |x_k - x| + |x| < 1 + |x| \quad \text{para todo } k \ge K^*.$$

Falta agora limitar os K^* primeiros termos da sequência. Seja então

$$C = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{K^*}|, 1 + |x|\}.$$

Portanto $|x_k| \le C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 3.11. A sequência (k) em $\mathbb{R}$ diverge pois não é limitada.

Exemplo 3.12. Seja $S_k = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/k$. Mostraremos que (S_k) não é limitada, e portanto divergente. Note que

$$x_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{k} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{k} + \cdots + \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{4} \frac{1}{4} + \sum_{i=5}^{8} \frac{1}{8} + \cdots + \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{2^k}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Logo (S_k) não é limitada, e portanto diverge.

Outra forma de ver que a sequência acima diverge é por indução. Quero mostrar que $S_{2^k} \geq 1 + k/2$. Note que $S_2 = 1 + 1/2$. Supondo que $S_{2^{k-1}} \geq 1 + (k-1)/2$ temos

$$S_{2^k} = S_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > 1 + \frac{(k-1)}{2} + \frac{1}{2} > 1 + \frac{k}{2},$$

como queríamos demonstrar. Mais uma vez a conclusão é que (S_k) não é limitada, logo diverge.

Exemplo 3.13 (Sequência de Cesàro). Seja (x_j) sequência convergente em $\mathbb{R}$, e seja $x \in \mathbb{R}$ seu limite. Então a sequência definida por

$$\frac{1}{j}(x_1 + x_2 + \cdots + x_j)$$

converge e tem x como seu limite.

Sem perda de generalidade, supomos que (x_j) converge para zero. Para o caso geral quando (x_j) converge para x basta tratar a sequência $(x_j - x)$.

Seja $S_j = (x_1 + x_2 + \cdots + x_j)/j$. Como (x_j) converge, então é limitada. Seja M tal que $|x_j| < M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que $M/K^* < \epsilon$ e $|x_j| < \epsilon$ para todo $j \geq K^*$. Então, temos $S_j = \check{S}_j + \hat{S}_j$, onde

$$\check{S}_j = \frac{1}{j}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{K^*}), \qquad \hat{S}_j = \frac{1}{j}(x_{K^*+1} + x_{K^*+1} + \cdots + x_j).$$

Então (S_j) é a soma de duas sequências convergentes para zero. De fato para $j \geq (K^*)^2$, temos

$$|\check{S}_j| \leq \frac{1}{j}(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{K^*}|) \leq \frac{K^*M}{j} \leq \frac{M}{K^*} < \epsilon.$$

Além disso, $|\hat{S}_j| < \epsilon(j - K^*)/j < \epsilon$. Portanto (S_j) converge para zero.

Note que sequências convergentes convergem também no sentido de Cesàro. Entretanto o oposto não ocorre. Considere como exemplo $(x_k) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. Então S_j como definida acima converge para $1/2$, apesar de (x_k) não convergir.

Outro resultado importante refere-se à convergência das normas de sequências: se uma sequência converge, então a sequência de normas também converge. A reciproca *não* é verdadeira. Basta considerar como contra-exemplo a sequência $\big((-1)^n\big)$. Neste caso a sequência diverge mas a sequência de seus valores absolutos converge.

Lema 3.1.8. Seja (x_j) convergente. Então a sequência dada por $(|x_j|)$ também o é.

Demonstração. Exercício. $\square$

3.2. Sequências em $\mathbb{R}$

Vários conceitos e propriedades de sequências fazem sentido em $\mathbb{R}$, mas não em $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$. Por exemplo, o conceito de monotonicidade, a definição de $\limsup$, $\liminf$ não se generalizam no $\mathbb{R}^n$. E propriedades, como por exemplo *o limite de uma sequência positiva é não negativo* também não. Este por sinal é o primeiro resultado que apresentamos a seguir.

Outro resultado importante para se tentar achar um "candidato" a limite nos diz que se temos uma sequência "sanduichadas" entre outras duas sequências convergentes que têm o mesmo limite, então a sequência do meio converge e tem também o mesmo limite.

Lema 3.2.1. Seja (x_k) convergente com $\lim x_k = x$. Se existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \geq 0$ para todo $k \geq K^*$, então $x \geq 0$.

Demonstração. (por contradição) Suponha que $x < 0$. Seja então $\epsilon = -x/2 > 0$. Como (x_k) converge para x, seja $\hat{K} \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - x| < \epsilon$ para todo $k \geq \hat{K}$. Seja $\overline{K} = \max\{K^*, \hat{K}\}$. Logo, $x_{\overline{K}} \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, isto é, $x_{\overline{K}} < x+\epsilon = x/2 < 0$. Obtivemos então uma contradição pois $\overline{K} \geq K^*$, e então $x_{\overline{K}}$ não pode ser negativo. $\square$

Observação. Note que o resultado acima não pode ser modificado tal que

$$x_k > 0 \text{ para todo } k \geq K^*, \text{ então } \lim x_k > 0.$$

De fato, considere a sequência $(1/k)$ de números positivos, mas com limite igual a zero.

Corolário 3.2.2. Se (x_k) e (x_k) são convergentes com $\lim x_k = x$ e $\lim y_k = y$, e se existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \geq y_k$ para todo $k > K^*$, então $x \geq y$.

Demonstração. Se $z_k = x_k - y_k$, então $\lim z_k = \lim x_k - \lim y_k = x - y$. O presente resultado segue então do Lema 3.2.1. $\square$

Lema 3.2.3 (sanduíche de sequências). Sejam (x_k), (y_k) e (z_k) sequências tais que $x_k \leq y_k \leq z_k$ para todo $k > K^*$, para algum $K^* \in \mathbb{N}$. Suponha ainda que (x_k) e (z_k) convergem com $\lim x_k = \lim z_k$. Então (y_k) converge e $\lim y_k = \lim x_k = \lim z_k$.

Demonstração. Seja $a = \lim x_k = \lim z_k$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\hat{K}$ tal que $|x_k - a| < \epsilon$ e $|z_k - a| < \epsilon$ para todo $k > \hat{K}$. Logo

$$-\epsilon < x_k - a \leq y_k - a \leq z_k - a < \epsilon \implies |y_k - a| < \epsilon$$

para todo $k > \hat{K}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.14. $\lim_{k\to\infty}\big((\sin k)/k\big) = 0$ pois como $-1 \leq \sin k \leq 1$, então

$$-1/k \leq (\sin k)/k \leq 1/k,$$

e o resultado segue do lema 3.2.3.

Lema 3.2.4 (teste da razão). Seja (x_k) sequência de números positivos tal que (x_{k+1}/x_k) convirja e $\lim_{k\to\infty}(x_{k+1}/x_k) < 1$. Então (x_k) converge e $\lim_{k\to\infty}(x_k) = 0$.

Demonstração. Seja $L = \lim_{k\to\infty}(x_{k+1}/x_k)$. Então, por hipótese, $L < 1$. Seja r tal que $L < r < 1$, e seja $\epsilon = r - L > 0$. Portanto existe K^* tal que $x_{k+1}/x_k < L + \epsilon = r$ para todo $k \geq K^*$. Logo,

$$0 < x_{k+1} < x_k r < x_{k-1}r^2 < x_{k-2}r^3 < \cdots < x_{K^*}r^{k-K^*+1} \quad \text{para todo } k \geq K^*.$$

Se $c = x_{K^*}r^{-K^*}$, então $0 < x_{k+1} < cr^{k+1}$. O resultado segue do Corolário 3.1.5, pois como $r < 1$, então $\lim_{k\to\infty} r^k = 0$. □

Corolário 3.2.5. Seja (x_k) tal que $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}$$

existe e $L > 1$. Então para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq K^* \implies |x_k| > C.$$

Demonstração. Basta considerar o teste da razão para $y_k = 1/|x_k|$. Neste caso,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|y_{k+1}|}{|y_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_k|}{|x_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}} = \frac{1}{L} < 1.$$

Logo (y_k) converge para zero, e para todo $C \in \mathbb{R}^+$ existe K^* tal que

$$k \geq K^* \implies |y_k| < \frac{1}{C}.$$

Portanto para $k \geq K^*$ temos $|x_k| > C$. □

Observação. Observe que no Corolário 3.2.5 acima, (x_k) não é limitada e portanto não converge.

Exemplo 3.15. Seja $(x_k) = k/2^k$. Então

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pelo teste da razão temos $\lim_{k\to\infty}(x_k) = 0$

Exemplo 3.16. Note que para $x_k = 1/k$, temos $\lim_{k\to\infty} x_{k+1}/x_k = 1$ e (x_k) converge. Entretanto, para $y_k = k$, temos $\lim_{k\to\infty} y_{k+1}/y_k = 1$ mas (y_k) *não convergente*. Portanto o teste não é conclusivo quando o limite da razão entre os termos é um.

3.2.1. Sequências Monótonas. Um classe muito especial de sequências é a de sequências monótonas. Uma sequência monótona é tal que seus valores não "oscilam", i.e., eles ou nunca diminuem ou nunca aumentam. Pode-se ver que a definição de sequência monótona é restrita a uma dimensão.

Definição 3.2.6. *Dizemos que uma sequência* (x_k) *é* monótona crescente*, ou simplesmente* crescente *se* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq \ldots$. *Da mesma forma uma sequência* (x_k) *é* monótona decrescente*, ou simplesmente* decrescente *se* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq \ldots$. *Finalmente, uma sequência é* monótona *se for crescente ou decrescente.*

Exemplo 3.17. $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ e $(1, 2, 3, 3, 3, 3, \ldots)$ são crescentes.

Exemplo 3.18. $(1/k)$ é decrescente.

Exemplo 3.19. $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ não é monótona.

Teorema 3.2.7. *Uma sequência monótona é convergente se e somente se é limitada.*

Além disso, se (x_k) *é crescente, então* $\lim_{k\to\infty}(x_k) = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$*. Da mesma forma, se* (x_k) *é decrescente, então* $\lim_{k\to\infty}(x_k) = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$*.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Já vimos que toda sequência convergente é limitada.

($\Longleftarrow$) Suponha (x_k) crescente e limitada. Seja $x = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Então dado $\epsilon > 0$, existe K^* tal que $x - \epsilon < x_{K^*} \le x < x + \epsilon$, pois x é o supremo. Logo, para todo $k > K^*$ temos $x - \epsilon < x_{K^*} \le x_k \le x < x + \epsilon$, portanto x_k converge para x. Se a sequência for não-crescente, a demonstração é análoga. $\square$

Exemplo 3.20. (a^k) diverge se $a > 1$ pois não é limitada.

Exemplo 3.21. (a^k) converge se $0 < a \le 1$ pois é monótona decrescente e limitada. Além disso, $\lim_{k\to\infty}(a^k) = 0$, pois $\inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\} = 0$.

Exemplo 3.22. Seja $y_1 = 1$ e $y_{n+1} = (1 + y_n)/3$. Mostraremos que (y_n) é convergente e achamos seu limite. Note que $y_2 = 2/3 < 1 = y_1$. Vamos mostrar por indução que $0 < y_{n+1} < y_n$. Esta afirmativa vale para $n = 1$. Suponha verdadeira para $n = k - 1$, isto é $0 < y_k < y_{k-1}$. Então para $n = k$ temos

$$y_{k+1} = (1 + y_k)/3 < (1 + y_{k-1})/3 = y_k,$$

e como $y_k > 0$, então $y_{k+1} > 0$, como queríamos. Portanto a sequência é monótona não crescente e limitada inferiormente por zero. Portanto converge. Seja y seu limite. Então

$$y = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + y_n)/3 = (1 + y)/3.$$

Logo $y = 1/2$.

Exemplo 3.23. Seja $y_1 = 1$, e $y_{n+1} = (2y_n+3)/4$. Note que $y_2 = 5/4 > y_1$. Para mostrar que $y_{n+1} > y_n$ em geral, usamos indução. Note que para $n = 1$ o resultado vale. Suponha agora que valha também para $n = k$ para algum k, i.e., $y_{k+1} > y_k$. Então

$$y_{k+2} = \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) > \frac{1}{4}(2y_k + 3) = y_{k+1}.$$

Logo, por indução, $y_{n+1} > y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e (y_n) é não decrescente. Para mostrar que é limitada, note que $|y_1| < 2$. Mais uma vez usamos indução a fim de provar que em geral $|y_n| < 2$. Suponha que $|y_k| < 2$. Logo,

$$|y_{k+1}| = |\frac{1}{4}(2y_k + 3)| \le \frac{1}{4}(2|y_k| + 3) < \frac{7}{4} < 2.$$

Por indução, segue-se que $|y_n| < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (y_n) é monótona e limitada, então é convergente. Seja $y = \lim_{n\to\infty}(y_n)$. Então

$$y = \lim_{n\to\infty}(y_n) = \lim_{n\to\infty}((2y_n + 3)/4) = ((2y + 3)/4).$$

resolvendo a equação algébrica acima, temos $y = 3/2$.

Exemplo 3.24. Seja $0 < a < b$, e defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Seja

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k b_k}, \qquad b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k),$$

para $k \in \mathbb{N}$. Então (a_k) e (b_k) convergem para o mesmo limite.

Vamos mostrar por indução que

$$(3.2.1) \qquad a_{i+1} > a_i, \qquad 0 < a_i < b_i, \qquad b_{i+1} < b_i \qquad \text{para } i = 0, 1, \dots.$$

Para $i = 0$ temos $a_0 = a < b = b_0$. Logo, usando que $y > x$ implica em $\sqrt{y} > \sqrt{x}$, e que a_0 e b_0 são positivos, temos $a_1 = \sqrt{a_0 b_0} > a_0 > 0$. Além disso, $b_1 = (a_0 + b_0)/2 < b_0$ pois $a_0 < b_0$. Portanto (3.2.1) vale para $i = 0$. Suponha que valha também para $i = k$. Então

$$0 < a_k < b_k \implies 0 < \left(\sqrt{a_k} - \sqrt{b_k}\right)^2 \implies \sqrt{a_k b_k} < \frac{1}{2}(a_k + b_k) \implies a_{k+1} < b_{k+1}.$$

Note também que $a_{k+1} > a_k > 0$. Finalmente,

$$a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} b_{k+1}} > a_{k+1}, \qquad b_{k+2} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} < b_{k+1}.$$

Logo (3.2.1) vale também para $i = k+1$. Portanto temos que (a_k) é monótona não decrescente e limitada superiormente, enquanto (b_k) é monótona não crescente e limitada superiormente. Ambas então convergem e sejam A e B seus limites. Neste caso teremos

$$A = \sqrt{AB}, \quad B = \frac{1}{2}(A + B).$$

e portanto $A = B$.

3.3. Subsequências e Teorema de Bolzano–Weierstrass

Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$ e

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_j < \dots$$

sequência de números naturais. Então dizemos que (x_{k_j}) é uma *subsequência* de (x_k).

Observação. Para definir subsequências de forma rigorosa, basta supor que $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função *estritamente crescente*, i.e., $i > j$ implica em $k(i) > k(j)$. Para facilitar a notação, escrevemos $k(i)$ simplesmente como k_i. Note que sempre $k_i \geq i$. Ver exercício 3.3.

Exemplo 3.25. Se $(x_k) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$, então $(1, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \dots)$ e (x_{2^k}) são subsequências de (x_k).

Um primeiro resultado relacionado com subsequências nos diz que se uma sequência converge para um determinado limite, então todas as subsequências convergem e têm o mesmo limite.

Lema 3.3.1. Se uma sequência (x_k) converge para x, então todas as subsequências de (x_k) são convergentes e têm o mesmo limite x.

Demonstração. Seja (x_k) sequência convergente, e seja $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Dado $\epsilon > 0$, seja K^* tal que

$$|x - x_k| < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq K^*. \tag{3.3.1}$$

Seja (x_{k_j}) subsequência de (x_k). Como $k_j \geq j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $j \geq K^*$ implica em $k_j \geq K^*$ e portanto

$$|x - x_{k_j}| < \epsilon,$$

por (3.3.1). Logo (x_{k_j}) converge para x. □

Exemplo 3.26. $\big((-1)^n\big)$ diverge pois se convergisse para algum $x \in \mathbb{R}$, suas subsequências convirgiriam este mesmo valor. Mas

$$\lim_{n\to\infty}\big((-1)^{2n}\big) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\big((-1)^{2n+1}\big) = -1.$$

Exemplo 3.27. Seja (x_k) sequência convergente para l e tal que $x_{2k} = x_k^2$. Então

$$l = \lim_{n\to\infty}(x_{2k}) = \lim_{k\to\infty} x_k \lim_{k\to\infty} x_k = l^2.$$

Logo $l = 0$ ou $l = 1$. Para concluirmos qual dos dois candidatos a limite é o correto, precisaríamos de mais informações sobre a sequência. Por exemplo, se $x_k = a^k$ para $a < 1$, temos que $l = 0$ pois a sequência é limitada superiormente por $a < 1$. Então $l = 1$ não pode ser limite, e $\lim_{k\to\infty}(a^k) = 0$. Por outro lado, se $a = 1$ então $l = 1$.

Lema 3.3.2 (Critérios de divergência). Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) (x_k) não converge para $x \in \mathbb{R}$.
(2) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $K^* \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq K^*$ e $|x - x_k| \geq \epsilon$.
(3) Existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (x_{k_j}) de (x_k) tal que $|x - x_{k_j}| > \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2): Se (x_k) não converge para x então existe $\epsilon > 0$ tal que é impossível achar $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_k| < \epsilon$ para todo $k > K^*$. Logo, para todo K^*, existe $k > K^*$ tal que $|x - x_k| \geq \epsilon$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Seja ϵ como em (2). Seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_{k_1}| \geq \epsilon$. Para $j \in \mathbb{N}$ com $j > 1$, seja $k_j > k_{j-1}$ tal que $|x - x_{k_j}| \geq \epsilon$. Portanto a subsequência (x_{k_j}) satisfaz a propriedade em (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1): Se (x_k) convergisse para x teríamos (x_{k_j}) convergindo para x, o que contraria a hipótese inicial. Logo (x_k) não converge para x. □

No exemplos abaixos temos uma aplicação imediata do Lema 3.3.2.

Exemplo 3.28. Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$ tal que toda subsequência de (x_k) contém uma subsequência convergente para x. Então (x_k) converge para x.

Por contradição suponha que (x_k) não convirja para x. Portanto existe uma subsequência (x_{k_j}) e $\epsilon > 0$ tal que

$$|x - x_{k_j}| > \epsilon \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{3.3.2}$$

Mas então, por hipótese, (x_{k_j}) tem uma subsequência convergindo para x, uma contradição com (3.3.2).

Exemplo 3.29. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}$ e seja (z_i) a sequência formada por $z_1 = x_1$, $z_2 = y_1$, $z_3 = x_2$, $z_4 = y_2, \dots$, $z_{2i-1} = x_i$, $z_{2i} = y_i$, $\dots$. Então, se $\lim_{i\to\infty} x_i = \xi$ e $\lim_{i\to\infty} y_i = \xi$, temos que $\lim_{i\to\infty} z_i = \xi$.

De fato, suponha que (z_n) não convirja para ξ. Então existe $\epsilon > 0$, uma subsequência (z_{n_k}), e um inteiro N_0 tal que

$$|z_{n_k} - \xi| > \epsilon \quad \text{para todo } n_k > N_0. \tag{3.3.3}$$

Isto implica que existem infinitos elementos de (z_n) distando mais que ϵ de ξ. Logo existem infinitos elementos de (x_n) ou de (y_n) distando mais que ϵ de ξ. Mas isto contradiz o fato de que $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = \xi$.

De forma mais rigorosa, sejam N_x, $N_y \in \mathbb{N}$ tais que $|x_k - \xi| < \epsilon$ para $k > N_x$, e $|y_k - \xi| < \epsilon$ para $k > N_y$. Seja $N_k^* > 2\max\{N_0, N_x, N_y\}$ (a existência de tal número é garantida pois $\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty$). Se N_k^* for par, então $z_{N_k^*} = y_{N_k^*/2} \in B_\epsilon(\xi)$ pois $N_k^*/2 > N_y$, contradição com (3.3.3). O caso de N_k^* ímpar é análogo.

A noção de subsequência, combinada com o conceito de ponto de acumulação e o Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 2.3.1) pode ser aplicada como o exemplo abaixo nos mostra.

Exemplo 3.30. Suponha que (x_k) é uma sequência limitada de elementos *distintos*, e que o conjunto $S = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem exatamente um ponto de acumulação. Então (x_k) é convergente.

De fato, seja x o ponto de acumulação do conjunto S. Por absurdo, suponha que (x_k) não converge para x. Então existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (x_{k_j}) tal que

$$|x_{k_j} - x| > \epsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.3.4}$$

Mas então o conjunto $\{x_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}$ é infinito pois os x_{k_j} são distintos e portanto pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass ele tem pelo menos um ponto de acumulação, que é diferente de x, uma contradição com x ser o único ponto de acumulação de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Finalmente mostramos um importante resultado que nos garante convergência de alguma subsequência mesmo quando a sequência original não converge. É o análogo para sequências do Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 2.3.1).

Teorema 3.3.3 (Bolzano–Weierstrass para sequências). *Toda sequência limitada possui ao menos uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$ e $S = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Então S é finito ou não. Se S for finito, então existe pelo menos um elemento $\xi \in S$ tal que $\xi = x_{k_1} = x_{k_2} = x_{k_3} = \dots$. para algum k_1, k_2, k_3, $\dots$ em $\mathbb{N}$. Neste caso, a subsequência constante (x_{k_j}) é convergente (ver Exercício 1.15).

Se S for infinito, e como este conjunto é limitado por hipótese, então o Teorema de Bolzano–Weierstrass 2.3.1 garante a existência de pelo menos um ponto x de acumulação de S. Vamos construir (x_{k_j}), subsequência de (x_k) convergente para x:

(1) Seja $j = 1$ e $\rho_1 = 1$. Como x é ponto de acumulação de S, então existe ao menos um índice $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_1} \neq x$ e $x_{k_1} \in S \cap B_{\rho_1}(x)$.

(2) Seja $j = 2$, e $\rho_2 = 1/2$. Como x é ponto de acumulação de S então também é ponto de acumulação do conjunto $S_2 = S\backslash\{x_1, x_2, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1}\}$ (ver Exercício 2.31) , então existe ao menos um índice $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que
$$x_{k_2} \in \big(S_2 \cap B_{\rho_2}(x)\big) \subsetneq \big(S \cap B_{\rho_2}(x)\big).$$
Note que $x_{k_2} \in S_2 \implies k_2 > k_1$ (porquê?).

(3) Procedemos agora de forma indutiva, i.e., suponha que dado $j > 2$ inteiro, os inteiros $k_1 < k_2 < \cdots < k_{j-1}$ estão bem definidos, e que $x_{k_i} \in S \cap B_{\rho_i}(x)$ para todo $i < j$, onde $\rho_i = 1/2^i$.

(4) Seja $\rho_j = 1/2^j$. Como x é ponto de acumulação de S então também é ponto de acumulação do conjunto $S_j = S\backslash\{x_1, x_2, \dots, x_{k_{j-1}-1}, x_{k_{j-1}}\}$ (ver Exercício 2.31) , então existe ao menos um índice $k_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_j} \in S_j \cap B_{\rho_j}(x)$. Note que $k_j > k_{j-1}$ (porquê?).

Então, dado $\epsilon > 0$, para $J \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-J} < \epsilon$ temos
$$|x - x_{k_j}| < \rho_j \le 2^{-j} < 2^{-J} < \epsilon \quad \text{para todo } j \ge J.$$
Logo, a subsequência (x_{k_j}) é convergente. □

3.4. Sequências de Cauchy

Um conceito importante tratando-se de sequências é o de sequências de Cauchy. Formalmente, dizemos que uma sequência (x_k) é *de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_k - x_m| < \epsilon \quad \text{para todo } k, m \ge K^*.$$
Usando os lemas a seguir, mostraremos que uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.

Lema 3.4.1. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja (x_k) sequência convergente, e x o seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_k| < \epsilon/2$ para todo $k \ge K^*$. Portanto,
$$|x_k - x_m| \le |x_k - x| + |x - x_m| < \epsilon \quad \text{se } k, m \ge K^*.$$
Logo (x_k) é de Cauchy. □

Lema 3.4.2. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja (x_k) sequência de Cauchy. Então, considerando $\epsilon = 1$, temos que existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{K^*} - x_k| < 1$ para todo $k > K^*$. Logo, para $k > K^*$ temos
$$|x_k| \le |x_k - x_{K^*}| + |x_{K^*}| < 1 + |x_{K^*}|.$$
Definindo $C = \max\{|x_1|, \dots, |x_{K^*-1}|, 1 + |x_K^*|\}$, temos imediatamente que $|x_k| \le C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto a sequência é limitada. □

Finalmente podemos enunciar a equivalência entre convergência e o critério de Cauchy.

Teorema 3.4.3 (Critério de convergência de Cauchy). *Uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.*

DEMONSTRAÇÃO. Já vimos no Lema 3.4.1 que se uma sequência é convergente, ela é de Cauchy.

Suponha agora que (x_k) é sequência de Cauchy. Pelo Lema 3.4.2, a sequência é limitada, e pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 3.3.3), existe uma subsequência (x_{k_j}) convergente. Seja $x = \lim_{k_j\to\infty} x_{k_j}$. Quero mostrar que $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Seja $\epsilon > 0$. Como (x_k) é de Cauchy, temos que existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k - x_m| \le \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } k, m \ge K^*. \tag{3.4.1}$$

Como (x_{k_j}) é convergente, então existe $m^* \in \{k_1, k_2, \dots\}$ tal que $m^* > K^*$, e

$$|x - x_{m^*}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $m^* > K^*$ temos também de (3.4.1) que $|x_k - x_{m^*}| \le \epsilon/2$ para todo $k \ge K^*$. Finalmente, para todo $k \ge K^*$ temos

$$|x - x_k| \le |x - x_{m^*}| + |x_{m^*} - x_k| < \epsilon.$$

Concluímos que (x_k) converge. $\square$

EXEMPLO 3.31. Considere $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_j = (x_{j-1} + x_{j-2})/2$ para $j \ge 3$. Então mostraremos que (x_j) converge pois é de Cauchy. Mostramos primeiro que

$$|x_j - x_{j+1}| = \frac{1}{2^{j-1}}, \quad \text{para } j \in \mathbb{N}. \tag{3.4.2}$$

Note que (3.4.2) é válido para $j = 1$. Supondo também válida para $j = k$, i.e., que

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{3.4.3}$$

temos

$$|x_{k+1} - x_{k+2}| = |x_{k+1} - \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k)| = |\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)| = \frac{1}{2^k},$$

onde usamos (3.4.3) na última igualdade. Concluímos por indução que (3.4.2) é válida.

Tendo (3.4.2) sido demonstrado, basta agora, dado ϵ, tomar K^* tal que $2^{K^*-2}\epsilon > 1$. Neste caso, se $j \ge i \ge K^*$, tem-se

$$\begin{aligned} |x_j - x_i| &\le |x_j - x_{j-1}| + |x_{j-1} - x_{j-2}| + |x_{j-2} - x_{j-3}| + \cdots + |x_{i+1} - x_i| \\ &= \frac{1}{2^{j-2}} + \frac{1}{2^{j-3}} + \frac{1}{2^{j-4}} + \cdots + \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{i-1}}\left(\frac{1}{2^{j-i-1}} + \frac{1}{2^{j-i-2}} + \frac{1}{2^{j-i-3}} + \cdots + 1\right) \\ &= \frac{1}{2^{i-1}}\frac{1 - 1/2^{j-i}}{1 - \frac{1}{2}} \le \frac{1}{2^{i-2}} < \epsilon, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

EXEMPLO 3.32. Em geral, se (x_i) é tal que $|x_{i+1} - x_i| < c_i$, onde $S_i = \sum_{k=1}^i c_k$ é convergente, então (x_i) é convergente. De fato, mostramos abaixo que a sequência é de Cauchy, e portanto converge. Note que para $i > j$, temos

$$|x_i - x_j| \le |x_i - x_{i-1}| + |x_{i-1} - x_{i-2}| + \cdots + |x_{j+1} - x_j| \le c_{i-1} + c_{i-2} + \cdots + c_j = S_{i-1} - S_{j-1}. \tag{3.4.5}$$

Como S_i converge, então é de Cauchy. Logo dado $\epsilon > 0$, existe $K^* \in \mathbb{N}$ tal que $i > j > K^*$ implica que $|S_{i-1} - S_{j-1}| < \epsilon$. Logo, por (3.4.5) temos que $i > j > K^*$ implica que $|x_i - x_j| < \epsilon$ e (x_i) é de Cauchy.

3.5. Resultados Topológicos

O conceito de sequência é importante também para caracterizar conjuntos quanto à sua topologia. Apresentamos abaixo alguns resultados nesta direção.

Podemos por exemplo usar sequências para caracterizar conjuntos fechados, como o resultado abaixo mostra.

Lema 3.5.1 (Conjuntos fechados). Seja $F \subset \mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) F é fechado.
(2) Se (x_k) é sequência convergente, com $x_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\lim_{k\to\infty} x_k \in F$.

Demonstração. (1)⇒(2) (*por contradição*) Suponha F fechado em $\mathbb{R}$, e seja (x_k) sequência em F com $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Suponha $x \notin F$. Como $\mathcal{C}(F)$ é aberto, existe aberto V contendo x tal que $V \cap F = \emptyset$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $x_k \notin V$, uma contradição com $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Portanto $x \in F$.

(1)⇐(2) (*por contradição*) Suponha que $\mathcal{C}(F)$ não seja aberto. Então existe $x \in \mathcal{C}(F)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um ponto em $x_k \in B_{1/k}(x) \cap F$. Logo (x_k) é uma sequência em F que converge para x. Por hipótese, temos que $x \in F$, uma contradição com $x \in \mathcal{C}(F)$. Portanto $\mathcal{C}(F)$ é aberto, e F é fechado. □

Também os conceito de fronteira de um conjunto e o de conjunto aberto pode ser dado através de sequências.

Lema 3.5.2 (Pontos de fronteira). Um ponto x é de fronteira de $\Omega \subset \mathbb{R}$ se e somente se existe sequência em Ω e sequência em $C(\Omega)$, ambas convergentes para x.

Lema 3.5.3 (Conjuntos abertos). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$. As afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) Ω é aberto.
(2) Seja $x \in \Omega$ e (x_k) contida em $\mathbb{R}$ com $x_k \to x$. Então existe K^* tal que

$$k \geq K^* \implies x_k \in \Omega.$$

3.6. Sequências contráteis e o método das aproximações sucessivas

Dizemos que uma sequência (x_k) é *contrátil* se existem número real $\lambda < 1$ e um natural K^* tais que

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \lambda |x_{k+1} - x_k|$$

para todo $k > K^*$.

Teorema 3.6.1. *Toda sequência contrátil é convergente*

Demonstração. Seja (x_k) sequência contrátil com constante $\lambda < 1$. Sem perda de generalidade, supomos nesta demonstração que $K^* = 1$, isto é

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \lambda |x_{k+1} - x_k|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \lambda |x_{k+1} - x_k| \leq \lambda^2 |x_k - x_{k-1}| \leq \cdots \leq \lambda^k |x_2 - x_1|.$$

Logo, para $m \in \mathbb{N}$ e $k \geq m$ temos

$$\begin{aligned}|x_k - x_m| &\leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq \big(\lambda^{k-2} + \lambda^{k-3} + \cdots + \lambda^{m-1}\big)|x_2 - x_1| = \lambda^{m-1}\big(\lambda^{k-m-1} + \lambda^{k-m-2} + \cdots + 1\big)|x_2 - x_1| \\ &= \lambda^{m-1}\frac{1-\lambda^{k-m}}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \leq \frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda}|x_2 - x_1|.\end{aligned}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ se $K^* \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\frac{\lambda^{K^*-1}}{1-\lambda}|x_2 - x_1| < \epsilon,$$

então $|x_k - x_m| < \epsilon$ para todo $m \geq K^*$, $k \geq K^*$. Portanto a sequência é de Cauchy e é convergente □

Exemplo 3.33. Seja a sequência definida por

$$x_0 = a > 0, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Queremos mostrar que (x_n) é contrátil, e portanto convergente.

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1+1/x$. Então a sequência é definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, e temos portanto que $x^* = (1+\sqrt{5})/2$ é a única solução em $\mathbb{R}^+$ para a equação $x = f(x)$. Usaremos mais tarde o fato de que $x > x^*$ implica em $x^2 > x + 1$. Note ainda que f é tal que

$$x > y \implies f(x) < f(y), \tag{3.6.1}$$

e que se x, $y \in \mathbb{R}^+$ e $c < \min\{x, y\}$, então

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|y-x|}{c^2}. \tag{3.6.2}$$

A fim de utilizar (3.6.2), mostraremos que (x_n) é limitada inferiormente por algum número maior que um.

Temos então três possibilidades: $a = x^*$, $a > x^*$ ou $a < x^*$. Quando $a = x^*$, a série é trivialmente convergente pois temos $x_1 = x_2 = \cdots = x^*$. Suponha então que $x_0 = a > x^*$. A análise para $a < x^*$ é similar.

Então $x_1 = f(x_0) < f(x^*) = x^*$. Por indução temos que $x_{2n-2} > x^*$ e $x_{2n-1} < x^*$. De fato, como estas desigualdades são verdadeiras para $n = 1$ e supondo também corretas para $n = k$ temos $x_{2k} = f(x_{2k-1}) > f(x^*) = x^*$ e $x_{2k+1} = f(x_{2k}) < f(x^*) = x^*$, como queríamos demonstrar.

Temos então $x_0 = a$, $x_1 = (a+1)/a$, e

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = \frac{2a+1}{a+1} < \frac{a+a^2}{a+1} = a = x_0,$$

onde usamos que $a + 1 < a^2$. Da mesma forma, $x_3 = 1 + 1/x_2 > 1 + 1/x_0 = x_1$. Portanto temos que para $n = 1$ vale $x_{2n} < x_{2n-2}$ e $x_{2n+1} > x_{2n-1}$. Supondo estas duas desigualdades para $n = k$ temos

$$x_{2k+2} = 1 + 1/x_{2k+1} < 1 + 1/x_{2k-1} = x_{2k}, \qquad x_{2k+3} = 1 + 1/x_{2k+2} > 1 + 1/x_{2k} = x_{2k+1},$$

como queríamos demonstrar.

Concluímos que (x_{2n-1}) é sequência não decrescente, e que $|x_{2n}| > x^* > x_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (x_n) é limitada inferiormente por x_1.

Aplicando agora (3.6.2), temos

$$|x_{k+1} - x_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \frac{1}{x_1^2}|x_k - x_{k-1}|.$$

Como $x_1 = 1 + 1/a > 1$, então (x_n) é contrátil e portanto converge.

Para achar o valor limite, basta resolver $x = f(x)$, e temos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Em várias apliações importantes é necessário achar um *ponto fixos*, i.e., uma solução do tipo $x = T(x)$, onde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada. É natural perguntar-se se dado algum ponto inicial x_0, a sequência gerada por

$$x_k = T(x_{k-1}), \qquad k \in \mathbb{N},$$

converge para um ponto fixo. Esta forma de determinar pontos fixos é denominada *método das aproximações sucessivas.*

No caso de T ser uma "contração", (x_k) será contrátil, e portanto convergente. É exatamente isto que mostraremos a seguir.

DEFINIÇÃO 3.6.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $T : A \to \mathbb{R}$ é uma* contração *se existir $\lambda < 1$ tal que*

$$|T(y) - T(x)| \leq \lambda |y - x|$$

para todo x, $y \in A$.

Temos então o seguinte resultado.

TEOREMA 3.6.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ fechado, e $T : A \to A$ uma contração. Então T possui um e somente um ponto fixo em A. Além disto, para qualquer $x_0 \in A$, a sequência definida por*

$$x_k = T(x_{k-1}), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.6.3}$$

converge para o ponto fixo de T em A.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que exista $\lambda < 1$ tal que

$$|T(y) - T(x)| \leq \lambda |y - x|$$

para todo x, $y \in A$.

Mostraremos primeiro a unicidade. Dados dois pontos fixos x e y de T em A, temos que

$$|x - y| = |T(x) - T(y)| \leq \lambda |x - y| \implies (1 - \lambda)|x - y| \leq 0,$$

o que só é possível se $x = y$, e portanto o ponto fixo, se existir, é único.

Note que (x_k) é contrátil pois

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |T(x_{k+1}) - T(x_k)| \leq \lambda |x_{k+1} - x_k|.$$

Logo (x_k) converge, e seja x^* seu limite. Como A é fechado, então $x^* \in A$. Para mostrar que x^* é ponto fixo de T, note que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}|x^* - T(x^*)| \leq |x^* - x_k| + |x_k - T(x^*)| = |x^* - x_k| + |T(x_{k-1}) - T(x^*)| \\ \leq |x^* - x_k| + \lambda |x_{k-1} - x^*|.\end{aligned}$$

Tomando o limite $k \to \infty$ dos dois lados da desigualdade obtemos que $|x^* - T(x^*)| = 0$, e portanto $x^* = T(x^*)$. ☐

3.7. Exercícios

Exercício 3.1. Demonstrar o Lema 3.1.8.

Exercício 3.2. Seja $C \subseteq \mathbb{R}$ não-vazio, $y \in \mathbb{R}$, e $A = \{|y - x| : x \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } y.$$

Exercício 3.3. Suponha que $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função estritamente crescente, i.e., $i > j$ implica em $k(i) > k(j)$. Mostre então que $k(i) \geq i$.

Exercício 3.4. Dê um exemplo de uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ tal que toda subsequência convergente de (x_n) convirja para x, mas que (x_n) não seja convergente.

Exercício 3.5. Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$ limitada, e tal que toda subsequência convergente converge para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que (x_k) converge para x.

Exercício 3.6. Ache uma sequência (x_n) de números reais tal que todos os pontos de $[0, 1]$ sejam limites de alguma subsequência de (x_n). Esboce o motivo de seu exemplo estar correto.

Exercício 3.7. Seja (x_k) sequência de Cauchy contendo uma subsequência convergente para x. Mostre que (x_k) converge para x.

OBS: Não pode usar que toda sequência de Cauchy converge.

Exercício 3.8. Seja (x_k) sequência em $\mathbb{R}$, e $d_k = |x_{k+1} - x_k|$. Decida se a afirmativa

$$\text{“Se } \lim_{k\to\infty} d_k = 0, \text{então } (x_k) \text{ converge”}$$

é verdadeira ou não. Se for verdadeira, demonstre-a. Caso contrário, apresente um contra-exemplo.

Exercício 3.9. Dizemos que uma sequência (x_j) no $\mathbb{R}^n$ tem *variação limitada* se a sequência (v_k) de reais definida por

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} |x_{i+1} - x_i|$$

converge. Mostre que toda sequência de variação limitada é convergente.

Exercício 3.10. Seja a_j sequência de números reais, e sejam as sequências

$$b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad c_n = \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Mostre que se (c_n) converge, então (b_n) converge.

Exercício 3.11. Mostre que o Teorema 3.4.3 (toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente) é equivalente aos seguintes resultados:

(1) a propriedade do supremo de $\mathbb{R}$ (página 16)
(2) teorema dos intervalos encaixantes (Teorema 2.1.8)
(3) teorema de Bolzano–Weiertrass em $\mathbb{R}$ (Teorema 2.3.1)

(Ver Exercício 2.16)

Exercício 3.12. Demonstrar o Lema 3.5.2.

Exercício 3.13. Demonstrar o Lema 3.5.3.

Exercício 3.14. Seja $S \subset \mathbb{R}$. Mostre que x é ponto de acumulação de S se e somente se existe sequência de pontos (x_j) em $S \backslash \{x\}$ que converge para x.

Exercício 3.15. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que um ponto x^* é aderente (ver definição no problema 2.27) a A se e somente se existe sequência convergente e contida em A, e que tenha x^* como seu limite. Mostre que o conjunto de pontos aderentes a A é fechado.

Exercício 3.16. Apresente e justifique um exemplo para cada uma das situações abaixo:

(a) Uma sequência convergente (x_j), mas que $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ não contenha pontos de acumulação.
(b) Um conjunto com infinitos pontos de aderência, mas sem pontos de acumulação.

Exercício 3.17. Seja (x_k) sequência convergente de pontos distintos em $\mathbb{R}$, e seja $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Mostre que x é ponto de acumulação de $S = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dê um exemplo de uma sequência convergente cujo limite não é ponto de acumulação de S.

Exercício 3.18. Mostre que um ponto x^* é aderente (ver Exercício 2.27) a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se e somente se existe sequência convergente e contida em X, e que tenha o ponto x^* como seu limite. Seja $\bar{X}$ o conjunto de pontos aderentes a X. Usando este conceito de aderência, mostre que $\bar{X}$ é fechado.

Exercício 3.19. Seja $K \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) toda sequência contida em K possui subsequência convergente com limite contido em K
(2) K é fechado e limitado

Exercício 3.20. Seja F um conjunto fechado em $\mathbb{R}$ não vazio, e seja $y \notin F$. Mostre que existe $x^* \in F$ tal que $|x^* - y| = \inf\{|x - y| : x \in F\}$.

Exercício 3.21. Sejam K_1 e K_2 dois conjuntos fechados e limitados, e $A = \{|x_1 - x_2| : x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2\}$. Mostre que A é fechado e limitado.

Exercício 3.22. Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações. Em todos os casos, K_1 e K_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}$, e $A = \{|x_1 - x_2| : x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2\}$.

(1) K_1 e K_2 fechados implica em A fechado e limitado.
(2) K_1 e K_2 fechados implica em A fechado.
(3) K_1 fechado e limitado, e K_2 fechado implica em A fechado.

Exercício 3.23. Apresente uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}$ tal que $|x_{k+1} - x_k| < |x_k - x_{k-1}|$ para todo $k > 1$ mas que (x_k) não convirja.

Exercício 3.24. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais, convergentes para x e y respectivamente, onde $x < y$. Mostre que existe um número natural N tal que $x_n < y_n$ para todo n maior que N.

Exercício 3.25. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado, e $s = \sup A$, então existe sequência em A convergindo para s.

Exercício 3.26. Mostre que uma sequência limitada de números reais (x_n), monótona não decrescente converge para "seu supremo", i.e., converge para $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 3.27. Seja (x_k) sequência monótona em $\mathbb{R}$, e suponha que (x_k) contenha subsequência convergente. Mostre que (x_k) converge.

Exercício 3.28. Seja $x_1 \in [0, +\infty)$, e seja a sequência de reais definida por

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Determine para quais valores de $x_1 \in [0, +\infty)$ a sequência (x_n) converge, e para qual valor. Demonstre suas afirmativas. (*Obs: Para toda sequência convergente* (y_n)*, vale a propriedade* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} y_n}$.)

Exercício 3.29 (Bartle [**3**]). Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = (2+x_n)^{1/2}$. Mostre que x_n é monótona e limitada, e portanto converge. Ache seu limite.

Exercício 3.30 (Bartle [**3**]). Seja $a > 0$ e $x_1 > 0$. Mostre que a sequência dada por $x_{n+1} = (a + x_n)^{1/2}$ converge.

Exercício 3.31 (Teorema da interseção de Cantor). Suponha que $\{K_j\}$ seja uma coleção de conjuntos não vazios, fechados e limitados, com $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$. Mostre que $\cap_{j=1}^{\infty} K_j$ é fechado, limitado e não vazio.

Exercício 3.32. Seja $\mathcal{G} = \{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de conjuntos fechados e limitados. Suponha que toda interseção *finita* seja não vazia, i.e.,

$$K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap \dots \cap K_{i_l} \neq \emptyset \quad \text{para quaisquer } i_1, i_2, \dots i_l \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\cap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$.

CAPíTULO 4

Continuidade e Funções Contínuas

[1] Um dos mais importantes tópicos de análise é o estudo de funções e suas propriedades, em particular a *continuidade*. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \Omega$, se para toda vizinhança aberta V de $f(x)$ existir vizinhança aberta U de x tal que

$$y \in U \cap \Omega \implies f(y) \in V.$$

Ver Figura 1. Finalmente, dizemos que f é contínua em $\Omega' \subseteq \Omega$ se f for contínua em todos os pontos de Ω'.

Dividimos o estudo de funções contínuas analisando primeiro propriedades locais, seguido das propriedades globais. A menos que seja explicitamente indicado, neste capítulo utilizaremos a notação acima.

4.1. Propriedades locais

Começamos observando que a *função f é contínua em todo ponto $x \in \Omega$ que não seja ponto de acumulação de* Ω. De fato, se $x \in \Omega$ não é ponto de acumulação, existe vizinhança aberta U de x tal que $\Omega \cap U = \{x\}$. Logo para todo vizinhança aberta V de $f(x)$, temos que

$$y \in \Omega \cap U \implies y = x \implies f(y) = f(x) \in V$$

Logo f é necessariamente contínua em x.

Abaixo descrevemos outras formas de checar a continuidade de uma função num ponto.

[1] Última Atualização: 10/11/2017

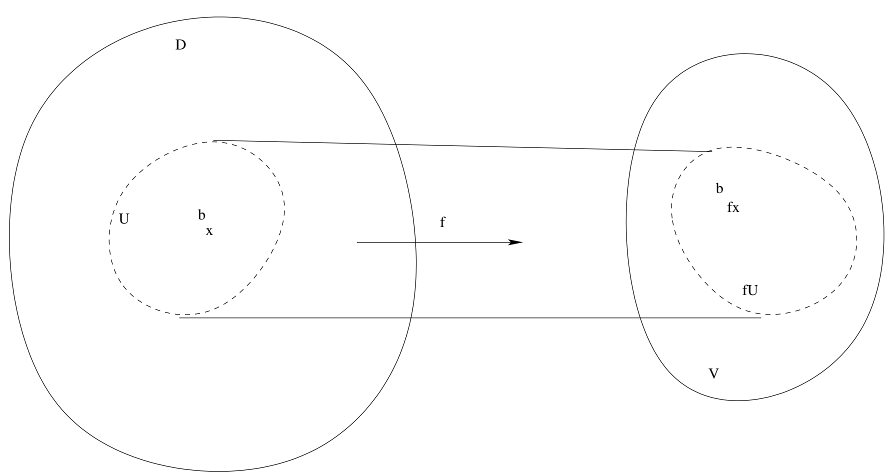

FIGURA 1. Continuidade de $f(x)$.

LEMA 4.1.1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) f é contínua em x.

(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in \Omega, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(3) Se (x_k) é sequência em Ω e $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, então $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$.

Outro resultado importante é o seguinte *critério de descontinuidade:* f não é contínua em x se e somente se existe sequência (x_k) em Ω convergindo para x mas $\big(f(x_k)\big)$ não convergindo para $f(x)$.

Uma noção que pode ser útil em algumas ocasiões é a de *limites de funções.* Se x for ponto de acumulação de Ω, dizemos que p é o limite de f em x se para toda vizinhança aberta V de p existir vizinhança aberta U de x tal que

$$y \in U \cap \Omega, \quad y \neq x \implies f(y) \in V.$$

Neste caso, escrevemos $p = \lim_{y\to x} f(y)$, e dizemos que f converge para p no ponto x. Uma observação a respeito da definição acima é que só a utilizamos para pontos de acumulação do domínio. Note também que a noção de limite em x independe do valor de f em x. Na verdade, f não precisa nem estar definida neste ponto.

As seguintes afirmativas são equivalentes:

(1) $p = \lim_{y\to x} f(y)$

(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in \Omega\backslash\{x\},\ |y - x| < \delta \implies |f(y) - p| < \epsilon.$$

(3) Para toda sequência (x_k) em $\Omega\backslash\{x\}$, tem-se

$$x_k \to x \implies f(x_k) \to p.$$

OBSERVAÇÃO. Note algumas diferenças na definição de limite de função e continuidade num ponto x:

(1) Para definir limite, a função não precisa estar definida em x, e mesmo que esteja, o valor não tem importância. Mas faz parte da definição que x seja ponto de acumulação do domínio da função.

(2) Na definição de continuidade, a função tem que estar definida em x, mas este ponto não necessariamente é de acumulação.

Se $x \in \Omega$ for ponto de acumulação de Ω, então

$$f \text{ é contínua em } x \iff f(x) = \lim_{y\to x} f(y).$$

EXEMPLO 4.1. $g(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$. De fato, para todo $c \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x\to c} g(x) = c = g(c)$.

EXEMPLO 4.2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto fechado, $f : A \to \mathbb{R}$ contínua em A, e seja (x_k) sequência de Cauchy em A. Então $\big(f(x_k)\big)$ é sequência de Cauchy.

Realmente, como (x_k) é de Cauchy, então converge. Seja x seu limite. Como A é fechado, então $x \in A$. Posto que f é contínua em A, e portanto em x, então $f(x_k)$ converge para $f(x)$. Logo, $f(x_k)$ é convergente. Como toda sequência convergente é de Cauchy, temos que $f(x_k)$ é de Cauchy.

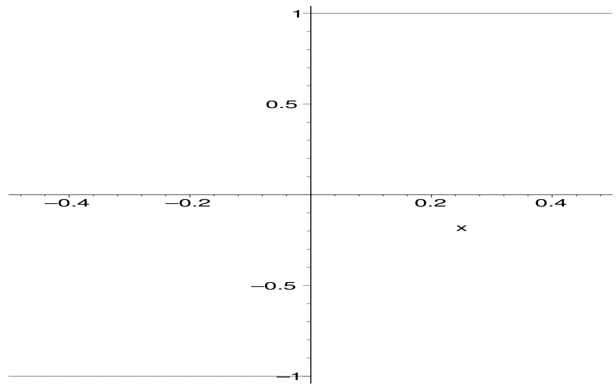

Figura 2. Gráfico de sgn(x), que é descontínua em $x = 0$.

Exemplo 4.3. Seja

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

como na figura 2.

Tomando-se as sequências $(-1/n)$ e $(1/n)$, ambas convergindo para $c = 0$ mas nunca atingindo este valor, tem-se $\big(\operatorname{sgn}(-1/\mathrm{n})\big) = -1$ e $\big(\operatorname{sgn}(1/\mathrm{n})\big) = 1$. Então esta função não tem limite em $c = 0$, pois se o limite existe, este tem que ser único. Portanto, a função sgn(x) não é contínua no zero, já que não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(\mathrm{x})$.

Exemplo 4.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

é descontínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Para mostrar isto, suponha $x \in \mathbb{Q}$, e uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ convergindo para x. Neste caso, $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 0 \neq 1 = f(x)$. Da mesma forma, se $x \notin \mathbb{Q}$, tomamos uma sequência (x_n) em $\mathbb{Q}$ convergindo para x, e temos $\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)\big) = 1 \neq 0 = f(x)$.

Às vezes, é possível estender uma função de forma contínua. Seja $x \notin \Omega$ ponto de acumulação de Ω. Se existir $\lim_{y\to x} f(y)$, então definimos $f(x)$ como sendo este limite, e f será contínua em x.

Exemplo 4.5. Considere a função

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e podemos estender f continuamente no zero definindo

$$g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então temos g contínua no zero (e somente no zero).

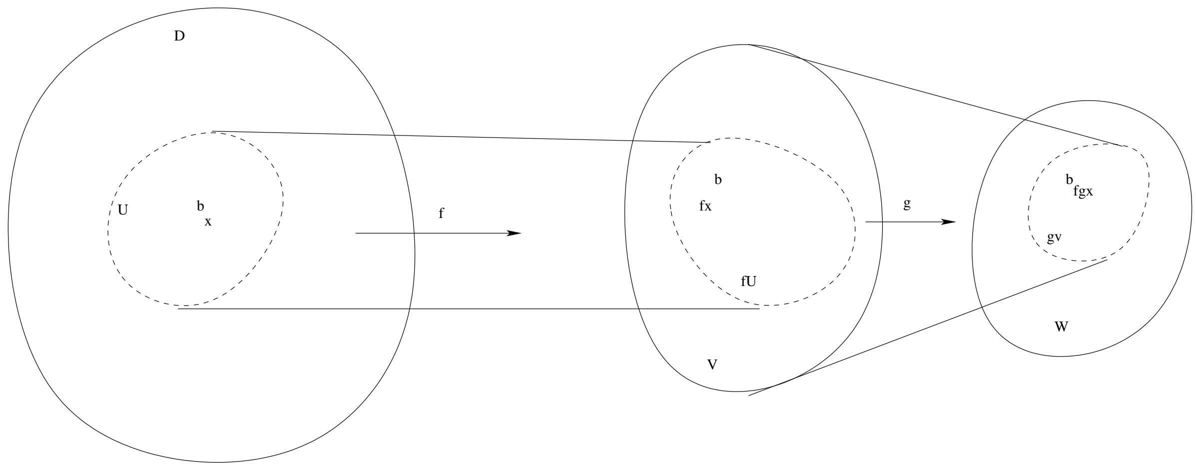

Figura 3. Continuidade em $x = 0$.

Exemplo 4.6. Nem sempre tal extensão contínua é possível. Por exemplo no caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, não se pode definir $f(0)$ tal que $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ seja contínua. (mostre isto)

4.1.1. Composição de funções. Em geral, se f e g são contínuas, então $f + g$, $f - g$, e fg também o são. Da mesma forma, se $h : \Omega \to \mathbb{R}$ é tal que $h(x) \neq 0$ para todo x do domínio, então f/h é contínua. O próximo resultado garante que a *composição* de funções contínuas também é contínua. Denotamos a composição de uma função f com g por $g \circ f$, i.e., $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Teorema 4.1.2. *Sejam Ω, $R \subseteq \mathbb{R}$, e $f : \Omega \to R$ e $g : R \to \mathbb{R}$. Suponha f contínua em $x \in \Omega$ e g contínua em $f(x) \in R$. Então a composição $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua em x.*

Demonstração. Seja $y = f(x)$ e W vizinhança aberta de $g(y)$. Como g é contínua em y, então existe vizinhança aberta V de y tal que

$$y' \in V \cap R \implies g(y') \in W. \tag{4.1.1}$$

Como f é contínua em x, então existe vizinhança aberta U de x tal que

$$x' \in U \cap \Omega \implies f(x') \in V.$$

Logo

$$x' \in U \cap \Omega \implies f(x') \in V \implies f(x') \in V \cap R \implies g(f(x')) \in W,$$

pois $f(x') \in R$, já que está imagem de f. Na última implicação usamos ainda (4.1.1). Logo $g \circ f$ é contínua em x. □

Exemplo 4.7. A função $g(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. Realmente, como

$$|g(x) - g(y)| = \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|,$$

se (x_n) converge para x então

$$|g(x_n) - g(x)| \leq |x_n - x| \implies \lim_{n\to\infty} \big(g(x_n)\big) = g(x).$$

Portanto, se f é contínua em x, entao $h(x) = |f(x)|$ também o é, pois $h = g \circ f$ é composição de funções contínuas.

Observação. Note que não podemos concluir a continuidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mesmo que $|f|$ seja contínua. Por exemplo se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

então $|f|$ é contínua mesmo sendo f descontínua.

4.2. Propriedades globais

Algumas propriedades de funções contínuas não estão restritas a apenas um ponto, mas sim a todo o domínio. Antes de prosseguirmos com as propriedades e suas aplicações, temos o seguinte resultado que caracteriza funções contínuas em todo domínio.

Teorema 4.2.1 (Continuidade Global). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) f é contínua em Ω
(2) Se $V \subseteq \mathbb{R}$ for aberto, então existe aberto U tal que $U \cap \Omega = f^{-1}(V)$
(3) Se $H \subseteq \mathbb{R}$ for fechado, então existe fechado F tal que $F \cap \Omega = f^{-1}(H)$

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Seja f contínua em Ω e $V \subseteq \mathbb{R}$ aberto. Seja $x \in f^{-1}(V)$. Como é f contínua, existe aberto U_x contendo x tal que

$$y \in U_x \cap \Omega \implies f(y) \in V.$$

Logo $U_x \cap \Omega \subseteq f^{-1}(V)$. Seja

$$U = \cup_{x \in f^{-1}(V)} U_x.$$

Então U é aberto pois é união de abertos, e $U \cap \Omega = f^{-1}(V)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Seja $x \in \Omega$ e V vizinhança aberta de $f(x)$. Por hipótese existe um aberto U tal que $U \cap \Omega = f^{-1}(V)$. Mas como $f(x) \in V$, então $x \in U$ e portanto U é vizinhança aberta de x. Além disto, para todo $y \in U \cap \Omega$ tem-se $f(y) \in V$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Seja $H \subseteq \mathbb{R}$ fechado. Então como $\mathcal{C}(H)$ é aberto, temos por hipótese que existe aberto U tal que $U \cap \Omega = f^{-1}(\mathcal{C}(H))$. Seja $F = \mathcal{C}(U)$. Então

$$x \in F \cap \Omega \implies x \notin U \implies f(x) \notin \mathcal{C}(H) \implies f(x) \in H \implies F \cap \Omega \subseteq f^{-1}(H).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(H) \implies x \notin f^{-1}(\mathcal{C}(H)) \implies x \notin U \cap \Omega \text{ e } x \in \Omega \implies x \in F \cap \Omega \\ \implies f^{-1}(H) \subseteq F \cap \Omega. \end{aligned}$$

Logo $f^{-1}(H) = F \cap \Omega$.

(3) $\Rightarrow$ (2): semelhante ao caso anterior. □

Observação. Note que U aberto e f contínua *não* implica em $f(U)$ aberto. Da mesma forma, F fechado *não* implica em $f(F)$ fechado. Como exemplo tome $f(x) = x^2$ e $U = (-1, 1)$ implica em $f(U) = [0, 1)$. E se $F = [1, +\infty)$, que é fechado, com $g(x) = 1/x$, então $g(F) = (0, 1]$.

4.2.1. Funções Contínuas em Conjuntos fechados e limitados. Um resultado com várias aplicações vem a seguir e garante que a propriedade de um conjunto vir a ser fechado e limitado é preservada por funções contínuas.

DEFINIÇÃO 4.2.2. *Dizemos que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é limitada em* Ω *se existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in \Omega$.

EXEMPLO 4.8. $\sin x$ é limitada em $\mathbb{R}$ pois $|\sin x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 4.9. A função $1/x$ não é limitada em $\mathbb{R}^+$. Entretanto $1/x$ é limitada em $(1/2, +\infty)$ pois $|1/x| \leq 2$ para todo x neste intervalo.

TEOREMA 4.2.3. *Seja* K *fechado, limitado, e* $f : K \to \mathbb{R}$ *contínua. Então* f *é limitada em* K *e* $f(K)$ *é fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. (por contradição) Suponha K fechado e limitado e f não limitada. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f(x_n) > n$. Como K é fechado e limitado, então, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, (x_n) possui subsequência (x_{n_k}) convergente. Seja $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Como K é fechado, então $x \in K$. Mas como f é contínua, então $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, e portanto a sequência $\big(f(x_{n_k})\big)$ tem limite, e logo ela é limitada, uma contradição, pois com a construção de (x_n) implica em $f(x_{n_k}) > n_k$.

Para mostrar que $f(K)$ é fechado, tome (y_j) sequência em $f(K)$ que seja convegente e seja $y \in \mathbb{R}$ seu limite. Para mostrar que K é fechado, basta mostrar que $y \in f(K)$. Seja a sequência (x'_j) em K tal que $f(x'_j) = y_k$. Usando novamente o fato de K ser fechado e limitado, e o Teorema de Bolzano–Weierstrass, existe subsequência (x'_{j_i}) convergente e seja x' seu limite. Como (x'_{j_i}) pertence a K e K é fechado, então $x' \in K$. Como f é contínua, $f(x') = y$. Logo $y \in f(K)$, como queríamos mostrar. ☐

Outra noção importante é o de máximos e mínimos. Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem valor máximo em Ω se existe $x^* \in \Omega$ tal que $f(x^*)$ é cota superior de $f(\Omega)$. De forma análoga dizemos que f tem valor mínimo em Ω se existe $x_* \in \Omega$ tal que $f(x_*)$ é cota inferior de $f(\Omega)$. Chamamos x^* de ponto de valor máximo e x_* de ponto de valor mínimo.

OBSERVAÇÃO. Se uma função f como acima definida tem seus valores máximo e mínimo em Ω, então f é limitada em Ω.

EXEMPLO 4.10. A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(1 - x^2)$ (Figura 4) não é limitada em $(-1, 1)$, mas é limitada em $[-1/2, 1/2]$ por exemplo.

EXEMPLO 4.11. $f(x) = x$ é contínua e limitada em $(-1, 1)$, mas não toma valor máximo nem mínimo em $(-1, 1)$. Entretanto f tem seus valores máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

EXEMPLO 4.12. A função $h(x) = 1/(1 + x^2)$ (Figura 5) é limitada em $\mathbb{R}$, tem seu valor máximo em $x^* = 0$, mas não tem seu valor mínimo. Isto porque $\inf h(\mathbb{R}) = 0 \neq h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO. Note que pontos de máximo e mínimo não são únicos em geral. Por exemplo, $f(x) = x^2$ tem -1 e 1 como seus dois pontos de máximo em $[-1, 1]$.

O resultado a seguir mais uma vez é consequência do Teorema 4.2.3.

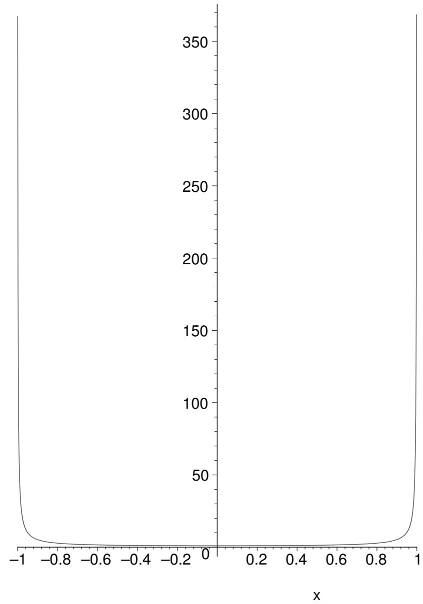

FIGURA 4. Gráfico de $1/(1-x^2)$, que não é limitada em $(-1,1)$.

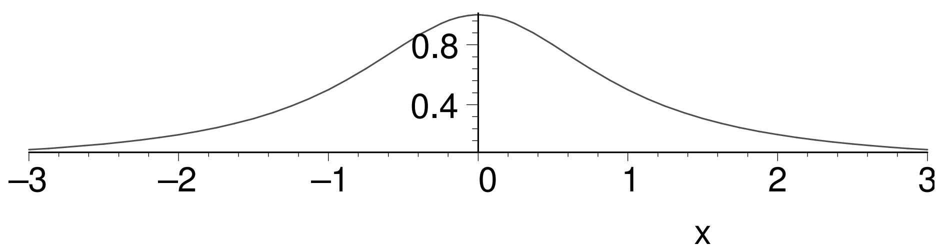

FIGURA 5. Gráfico de $1/(1+x^2)$, que tem seu máximo mas não o seu mínimo em $\mathbb{R}$.

TEOREMA 4.2.4 (Pontos Extremos). *Seja $K \subset \mathbb{R}$ fechado e limitado e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua em K. Então f tem pelo menos um ponto de máximo e um de mínimo em K.*

DEMONSTRAÇÃO. Como K é fechado e limitado, então o Teorema 4.2.3 garante que $f(K)$ também é fechado e limitado. Logo $f(K)$ é limitado e portanto tem supremo, e $f(K)$ é fechado, e portanto o supremo pertence a $f(K)$. Logo existe $x^* \in K$ tal que $f(x^*) = \sup f(K)$.

O mesmo tipo de argumento assegura que existe ponto de mínimo em K. □

Considere também a seguinte demonstração alternativa.

DEMONSTRAÇÃO. (alternativa do Teorema 4.2.4) Demonstraremos somente que existe um ponto de máximo para f. O caso de valor mínimo é análogo. Como K é fechado limitado, então $f(K)$ é limitado. Seja $s^* = \sup f(K)$. Seja x_n tal que $f(x_n) > s^* - 1/n$. Mas pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, K limitado implica em existência de uma subsequência (x_{n_k}) convergente. Seja x^* o limite de tal subsequência. Como K é fechado, então $x^* \in K$.

Como f é contínua, então $f(x^*) = \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})$. Finalmente, usamos que

$$s^* - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq s^*,$$

e pelo Lema do sanduíche de sequências 3.2.3, temos que $f(x^*) = \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = s^*$. $\square$

Outro resultado de grande importância é o Teorema do Valor Intermediário que garante a preservação de intervalos por funções contínua.

TEOREMA 4.2.5 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam $a < b$ e suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$I = \{x \in [a, b] : f(x) < d\} = f^{-1}\big((-\infty, d)\big).$$

Logo I é não vazio pois $a \in I$, e definimos $c = \sup I$. Então $c \in [a, b]$, pois b é cota superior de I. Pelo Teorema da Continuidade Global (Teorema 4.2.1), existe aberto U tal que

$$I = U \cap [a, b] = U \cap [a, b),$$

pois $b \notin I$. Logo, para todo $x \in I$, existe $\epsilon > 0$ tal que $x + \epsilon \in I$. Portanto $c \notin I$, i.e., $f(c) \geq d$. Seja então $x_n \in I$ tal que $x_n \to c$, ver Exercício 3.25. Por continuidade de f, temos $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Como $f(x_n) < d$, então $f(c) \leq d$. Portanto $f(c) = d$. $\square$

COROLÁRIO 4.2.6 (Teorema do ponto fixo em uma dimensão). Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ contínua. Então f tem um ponto fixo, i.e., existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

DEMONSTRAÇÃO. seja $d : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $d(x) = f(x) - x$. Portanto d é contínua. Nosso objetivo é achar raiz para d em $[0, 1]$. Se $d(0) = 0$ ou $d(1) = 0$, então nada mais há a fazer. Suponha que nem 0 nem 1 sejam raízes de d. Logo $d(0) = f(0) > 0$ e $d(1) = f(1) - 1 < 0$ pois $f(x) \in [0, 1]$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 4.2.5), temos que existe $x \in (0, 1)$ tal que $d(x) = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Concluímos esta parte com uma importante consequência dos resultados anteriores.

TEOREMA 4.2.7. *Seja I intervalo fechado limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ função contínua. Então $f(I)$ é intervalo fechado limitado.*

4.3. Funções Uniformemente Contínuas

Considere $g(x) = 1/x$, para $x \in (0, 1)$. Seja $c \in (0, 1)$. Então

$$g(c) - g(x) = \frac{1}{c} - \frac{1}{x} = \frac{x - c}{cx}.$$

Para mostrarmos que g é contínua em c. seja $\epsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\epsilon < 1$, e portanto $\epsilon c < 1$. Seja $\delta = c^2\epsilon/2$. Então

$$|x - c| < \delta \implies c < x + \delta = x + \frac{c^2\epsilon}{2} < x + \frac{c}{2} \implies \frac{c}{2} < x.$$

Logo

$$|x - c| < \delta \implies |g(c) - g(x)| = \frac{|x - c|}{cx} < \frac{\delta}{cx} = \frac{c^2\epsilon}{2cx} = \frac{c\epsilon}{2x} < \epsilon$$

onde usamos que $c/2 < x$ na última desigualdade. Mostramos então, usando ϵ's e δ's que $1/x$ é contínua em todo ponto diferente de zero. O objetivo principal do cálculo acima é ressaltar que a escolha de δ não é uniforme em relação ao ponto c, i.e., δ depende de c.

Em outros casos, a escolha de δ independe do ponto em questão. Por exemplo, para $f(x) = x$, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Dizemos que estas funções são uniformemente contínuas.

DEFINIÇÃO 4.3.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é* uniformemente contínua em Ω *se para todo $\epsilon > 0$, existir δ tal que para todo x, $y \in \Omega$ tem-se*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Note que a definição de continuidade uniforme só faz sentido no domínio ou subdomínio da função, e não pontualmente como na definição de continuidade. Uma forma equivalente de se definir uma função uniformemente contínua, é exigir que dado $\epsilon > 0$ exista δ tal que para todo $x \in \Omega$ tem-se

$$y \in B_\delta(x) \cap \Omega \implies f(y) \in B_\epsilon\big(f(x)\big).$$

Além disto, pode-se usar o seguinte resultado abaixo para se mostar que uma função *não* é uniformemente contínua.

LEMA 4.3.2. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) f não é uniformemente contínua em Ω.
(2) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existem pontos x, $y \in \Omega$ tais que $|x - y| < \delta$ mas $|f(x) - f(y)| > \epsilon$.
(3) Existe $\epsilon > 0$ e duas sequências (x_k) e (y_k) em Ω tais que $\lim_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$ e $|f(x_k) - f(y_k)| > \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO 4.13. O resultado acima pode ser usado por exemplo para mostrar que $f(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^+$. Considere as sequências $(1/k)$ e $\big(1/(k+1)\big)$. Então $\lim_{k\to\infty}\big(1/k - 1/(k+1)\big) = 0$ mas $f(1/k) - f\big(1/(k+1)\big) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Uma interessante propriedade da continuidade uniforme é dada abaixo, e tem aplicação na extensão de funções; ver exercício 4.21. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e suponha que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Então (x_i) ser sequência de Cauchy implica que $\big(f(x_i)\big)$ também é sequência de Cauchy.

De fato, seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, então existe δ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \tag{4.3.1}$$

para todo x, $y \in \Omega$. Como (x_i) é sequência de Cauchy, então existe N_0 tal que se

$$i, j > N_0 \Longrightarrow |x_i - x_j| < \delta. \tag{4.3.2}$$

Combinando (4.3.1) e (4.3.2), temos então que

$$i, j > N_0 \Longrightarrow |f(x_i) - f(x_j)| < \epsilon.$$

Note que isto nos dá um outro critério para determinar quando uma função não é uniformemente contínua. Por exemplo, para o caso considerado no exemplo 4.13, temos que $x_k = 1/k$ é de Cauchy mas $f(x_k) = k$ não é de Cauchy. Logo f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^+$.

Observação. Note que nem todas as funções que "preservam" sequências de Cauchy são uniformemente contínuas. Tome como exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

Apesar de parecer difícil conferir se uma dada função é ou não uniformemente contínua, o (surpreendente?) resultado abaixo garante que *todas* as funções contínuas em conjuntos fechados e limitados são uniformemente contínuas.

Teorema 4.3.3 (Continuidade Uniforme em fechados e limitados). *Seja $K \subseteq \mathbb{R}$ conjunto fechado e limitado, e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua em K. Então f é uniformemente contínua em K.*

Demonstração. (por contradição) Suponha que f não seja uniformemente contínua. Pelo Lema 4.3.2, existe $\epsilon > 0$ e existem sequências (x_n) e (y_n) em K tais que $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Como K é limitado, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass existe subsequência (x_{n_k}) convergente. Seja $z = \lim_{n_k \to \infty}(x_{n_k})$. Como K é fechado, então $z \in K$. Note que (y_{n_k}) também converge para z pois

$$(y_{n_k} - z) = (y_{n_k} - x_{n_k}) + (x_{n_k} - z).$$

Como f é contínua em $\mathbf{z}$, então $f(z) = \lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k})$, e $f(z) = \lim_{n_k \to \infty} f(y_{n_k})$, uma contradição com $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Logo f é uniformemente contínua. $\square$

Outra importante situação em que temos continuidade uniforme, mesmo com domínios não fechados e limitados, é quando a função é de Lipschitz. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *de Lipschitz* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para todo x, $y \in \Omega$.

Teorema 4.3.4. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e f é de Lipschitz, então f é uniformemente contínua em Ω.*

Demonstração. Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

para todo x, $y \in \Omega$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/M$. Então se x, $y \in \Omega$ e $|x - y| < \delta$, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M\delta = \epsilon.$$

o que mostra que f é uniformemente contínua em Ω. $\square$

Nem toda função uniformemente contínua é de Lipschitz, como o exemplo abaixo mostra.

Exemplo 4.14. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$. Como $[0,1]$ é fechado e limitado, e g é contínua, então g é uniformemente contínua em $[0,1]$. Entretanto note que se g fosse de Lipschitz, nós teríamos a existência de $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{x} = |g(x) - g(0)| \leq k|x - 0| = Mx \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \leq M \quad \text{para todo } x > 0,$$

um absurdo. Logo g não é de Lipschitz apesar de ser uniformemente contínua em seu domínio.

4.4. Exercícios

EXERCÍCIO 4.1. Determine os pontos de continuidade da função $[x]$, que retorna para cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $[2] = 2$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$.

EXERCÍCIO 4.2. Demonstre o Lema 4.1.1.

EXERCÍCIO 4.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $x \in \mathbb{R}$, e $f(x) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança aberta de x tal que f seja estritamente positiva.

EXERCÍCIO 4.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ é fechado.

EXERCÍCIO 4.5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ é aberto.

EXERCÍCIO 4.6. Mostre que toda contração é uma função contínua.

EXERCÍCIO 4.7. Dê exemplos de

(1) Um conjunto F fechado em $\mathbb{R}$ e uma função $f : F \to \mathbb{R}$ contínua tais que $f(F)$ não seja fechado e limitado.
(2) Um conjunto A aberto em $\mathbb{R}$ e uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(A)$ não seja aberto em $\mathbb{R}$.
(3) Um conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, um conjunto A aberto em $\mathbb{R}$ e uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $f^{-1}(A)$ não seja aberto em $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 4.8. Seja $K \subset \mathbb{R}$ conjunto fechado e limitado e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, e seja (x_j) sequência contida em K. Mostre que a sequência $\big(f(x_j)\big)$ possui subsequência convergente com limite contido em $f(K)$.

EXERCÍCIO 4.9. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é aberto. Mostre que f é contínua em Ω se e somente se $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ são abertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 4.10. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

EXERCÍCIO 4.11. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ conjunto limitado. Dê exemplo de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e limitada que não atinja seu máximo.

EXERCÍCIO 4.12 (Ver definição de extremos locais na página 64). Sejam $a < b$ reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Sejam $x_1 < x_2$ elementos de $[a, b]$ e máximos locais da f. Mostre que existe $c \in (x_1, x_2)$ que é mínimo local da f.

EXERCÍCIO 4.13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x + 1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é limitada.

EXERCÍCIO 4.14 (Ver definição de extremos locais na página 64). Sejam $a < b$ números reais e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Suponha que nenhum ponto interior é extremo local. Mostre que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

EXERCÍCIO 4.15. Mostre que não é possível generalizar o Teorema do ponto fixo (Teorema 4.2.6) para o intervalo $(0, 1]$.

EXERCÍCIO 4.16. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, então $f + g$ é uniformemente contínua. Mostre que, mesmo que f seja limitada, a função fg não é necessariamente uniformemente contínua.

EXERCÍCIO 4.17. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é função uniformemente contínua.

EXERCÍCIO 4.18. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que dado $\epsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que se x, $y \in [a_{i-1}, a_i]$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

EXERCÍCIO 4.19. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir δ tal que dados K subintervalos $(x_1, y_1), \ldots, (x_K, y_K)$ contidos em I e disjuntos (i.e., $x_1 < y_1 < \cdots < x_K < y_K$), com $\sum_{i=1}^{K}(y_i - x_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^{K} |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Mostre que

(1) toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua
(2) toda função de Lipschitz é absolutamente contínua

EXERCÍCIO 4.20. Dê um exemplo de uma função uniformemente contínua que não seja absolutamente contínua.

EXERCÍCIO 4.21. Suponha $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0, 1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que f seja uniformemente contínua em $[0, 1]$.

EXERCÍCIO 4.22. Suponha $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em Ω. Mostre que podemos definir $\bar{\mathbf{f}} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{\mathbf{f}}$ seja contínua em $\bar{\Omega}$, e $\bar{\mathbf{f}}(x) = \mathbf{f}(x)$ para todo $x \in \Omega$. Neste caso dizemos que $\bar{\mathbf{f}}$ é uma *extensão contínua* de $\mathbf{f}$.

EXERCÍCIO 4.23. Seja $B \subseteq \mathbb{R}$ limitado, e $f : B \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Mostre que f é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.

EXERCÍCIO 4.24. Resolva o Exercício 4.23 usando o conceito de limitação total (Exercício 2.42).

EXERCÍCIO 4.25. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Mostre que existem constantes a, b tais que $f(x) \leq ax + b$ para todo $x \geq 0$.

EXERCÍCIO 4.26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ é da forma irredutível } p/q, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que f é descontínua em $\mathbb{Q}$ e contínua em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

EXERCÍCIO 4.27. É verdade que para toda função contínua f: $[0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2)$ existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 1)$?

CAPíTULO 5

Diferenciação

[1] Neste capítulo vemos a noção de diferenciabilidade e suas aplicações. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo. Dizemos que f é diferenciável em $c \in I$ se existe um número real L onde dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon.$$

Chamamos L de derivada de f em c, e escrevemos $L = f'(c)$.

Se f é diferenciável em todo ponto de I dizemos que f é diferenciável em I. Neste caso note que a derivada f' é uma função de I em $\mathbb{R}$.

Existem outras formas de se definir a diferenciabilidade. De fato as afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in I$, com derivada L.
(2) O limite abaixo existe e é igual a L:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L.$$

(3) Para toda sequência (x_k) em $I \backslash \{c\}$ convergindo para c tem-se

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(c)}{x_k - c} = L$$

(4) Existe uma função r tal que

$$f(x) = f(c) + L(x - c) + r(x - c) \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

De forma equivalente escrevemos $h = x - c$, e então

$$f(c + h) = f(c) + Lh + r(h) \quad \text{com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{5.0.1}$$

Podemos também entender L como a aplicação linear (neste caso dada por um número) que torna (5.0.1) possível. Esta interpretação induz de forma natural a generalização da noção de derivada para o caso multidimensional.

Observação. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $c \in D$, onde $D \subseteq \mathbb{R}$. Mesmo que D não seja um intervalo, é possível definir a derivada de f em c, desde que c seja de acumulação [**8**, **18**].

A seguir temos dois exemplos de funções diferenciáveis.

[1] Última Atualização: 10/11/2017

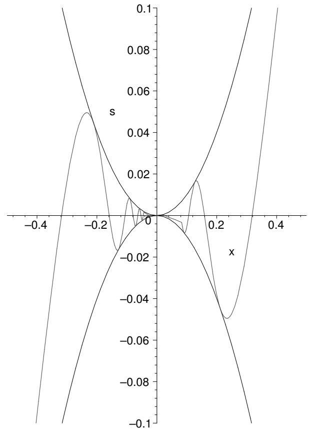

FIGURA 1. Gráfico de $f(x)$, que é diferenciável, mas a derivada não é contínua.

EXEMPLO 5.1. Se $f(x) = x^2$, então para $c \in \mathbb{R}$ tem-se

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x + c)(x - c)}{x - c} = \lim_{x \to c}(x + c) = 2c.$$

EXEMPLO 5.2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

mostrada na Figura 1. Para $x \neq 0$ temos $f'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x$. Observe que não existe o limite $\lim_{x \to 0} f'(x)$. Em $x = 0$ usamos a definição:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas f' não é contínua no zero.

Diferenciabilidade implica em continuidade, como nos mostra o resultado a seguir.

TEOREMA 5.0.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, é diferenciável em $c \in I$, então f é contínua em c.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $L = f'(c)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |L| - \epsilon < \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| < |L| + \epsilon.$$

Seja $\bar{\delta} = \min\{\delta, \epsilon/(|L| + \epsilon)\}$. Então

$$x \in I, \quad 0 < |x - c| < \bar{\delta} \implies |f(x) - f(c)| = \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| |x - c| < (|L| + \epsilon)\bar{\delta} \leq \epsilon.$$

Logo f é contínua em c. $\square$

OBSERVAÇÃO. Pelo teorema acima, diferenciabilidade implica em continuidade. O inverso entretanto não é verdade em geral. Seja por exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = |x|$,

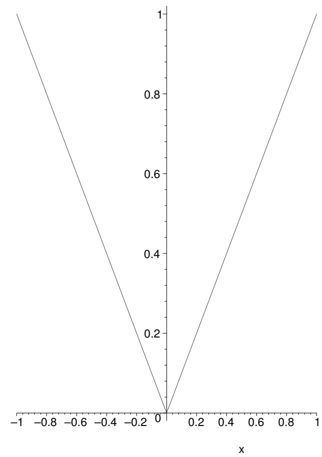

FIGURA 2. Gráfico de $f(x) = |x|$, função contínua mas não diferenciável.

representada na Figura 2. Então f é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é diferenciável em zero pois para $x \neq 0$ temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo o limite quando $x \to 0$ não existe.

Sejam f e g funções de $I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, ambas diferenciáveis em $c \in I$. Então

(1) $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, se $x \neq c$, então

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(c)}{x - c} = \alpha \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

(2) $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
(3) Se $p = fg$, então se $x \neq c$,

$$\begin{aligned} \frac{p(x) - p(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Logo existe $\lim_{x \to c}(p(x) - p(c))/(x - c)$ e

$$\begin{aligned} p'(c) = \lim_{x \to c} \frac{p(x) - p(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) \right] + \lim_{x \to c} \left[f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] & \\ = f'(c)g(c) + f(c)g'(c). & \end{aligned}$$

(4) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então seja $h(x) = f(x)/g(x)$. Logo se $x \neq c$,

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{x-c} = \frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{(x-c)g(x)g(c)}$$
$$= \frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)}{(x-c)g(x)g(c)} + \frac{f(c)g(c)-f(c)g(x)}{(x-c)g(x)g(c)} = \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)}\frac{1}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)g(c)}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

Logo existe $\lim_{x\to c}(h(x)-h(c))/(x-c)$ e

$$h'(c) = \lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} = f'(c)\frac{1}{g(c)} - \frac{f(c)}{g^2(x)}g'(c).$$

Exemplo 5.3. Pela regra acima temos que se $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então f é diferenciável e $f'(c) = nx^{n-1}$.

Outro resultado de grande importância diz respeito à diferenciabilidade de composições de funções, garantindo que se duas funções são diferenciáveis, então a composição também o é.

Teorema 5.0.2 (Regra da Cadeia). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $R \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos abertos. Sejam $f : \Omega \to R$ e $g : R \to \mathbb{R}$. Se f é diferenciável em $x \in \Omega$ e g é diferenciável em $f(x)$, então $g \circ f$ é diferenciável em x e*

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Demonstração. Seja $y = f(x)$. Note que para h tal que $x+h \in \Omega$ e k tal que $y+k \in R$, temos

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + r(h) \quad \text{com } \lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|} = 0,$$
$$g(y+k) = g(y) + g'(y)(k) + p(k) \quad \text{com } \lim_{k\to 0}\frac{|p(k)|}{|k|} = 0.$$

Definindo $k = f(x+h) - f(x) = f'(x)(h) + r(h)$, temos

$$g\circ f(x+h) = g(f(x+h)) = g(y+k) = g(y) + g'(y)(k) + p(k)$$
$$= g(y) + g'(y)[f'(x)(h) + r(h)] + p(f(x+h)-f(x)) = g(y) + g'(y)f'(x)(h) + q(h)$$

onde $q(h) = g'(y)r(h) + p(f(x+h)-f(x))$. Finalmente,

$$\lim_{h\to 0}\frac{q(h)}{|h|} = g'(y)\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{|h|} + \lim_{h\to 0}\frac{p(f(x+h)-f(x))}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{p(f(x+h)-f(x))}{|h|}. \tag{5.0.2}$$

Para terminar nossa demonstração, basta mostar que o limite em (5.0.2) se anula. Seja $\epsilon > 0$ fixado, $h \in \mathbb{R}^l\backslash\{0\}$ também fixado, e tal que $x+h \in \Omega$. Duas situações mutualmente exclusivas se apresentam:

(1) Se h é tal que $f(x+h) = f(x)$, então $p(f(x+h)-f(x)) = 0$.

(2) Caso contrário, temos

$$\frac{|p(f(x+h)-f(x))|}{|h|} = \frac{|p(f(x+h)-f(x))|}{|f(x+h)-f(x)|}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}$$
$$\leq \frac{|p(k)|}{|k|}\left(\frac{|f'(x)h|}{|h|}+\frac{|r(h)|}{|h|}\right).$$

Sejam $\delta' > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que se $0 < |h| < \delta'$, então $|f'(x)| + |r(h)|/|h| < c$. Seja $\delta'' > 0$ tal que

$$|k| < \delta'' \implies \frac{|p(k)|}{|k|} < \frac{\epsilon}{c}. \tag{5.0.3}$$

Da continuidade de f temos que existe $\delta''' > 0$ tal que

$$|h| < \delta''' \implies |k| = |f(x+h)-f(x)| < \delta''.$$

Por (5.0.3), tem-se que para $\delta = \min\{\delta', \delta'''\}$,

$$|h| < \delta \implies |k| < \delta'' \implies \frac{|p(k)|}{|k|} < \frac{\epsilon}{c} \implies \frac{|p(f(x+h)-f(x))|}{|h|} < \epsilon.$$

Dos casos (1) e (2) acima, concluímos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |h| < \delta \implies \frac{|p(f(x+h)-f(x))|}{|h|} < \epsilon.$$

i.e.,

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(f(x+h)-f(x))}{|h|} = 0.$$

Portanto, concluímos por (5.0.2) que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|q(h)|}{|h|} = 0,$$

donde obtemos o resultado. $\square$

Encontramos na demonstração do resultado abaixo uma outra aplicação da regra da cadeia, desta vez para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Teorema 5.0.3 (Derivada da Função Inversa). *Seja I intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e invertível com inversa $g : J \to \mathbb{R}$ contínua, e $J = f(I)$. Se f é diferenciável em $c \in I$, então g é diferenciável em $d = f(c)$ se e somente se $f'(c) \neq 0$. Neste caso,*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Demonstração. Se $y \in J\backslash\{d\}$, então $g(y) \neq c$. Logo, se $f'(c) \neq 0$,

$$\lim_{y\to d}\frac{g(y)-g(d)}{y-d} = \lim_{y\to d}\frac{g(y)-c}{f(g(y))-f(c)} = \lim_{y\to d}\left(\frac{f(g(y))-f(c)}{g(y)-c}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(c)},$$

onde usamos a continuidade de g no último passo. Concluímos que g é diferenciável em d e $g'(d) = 1/f'(c)$.

Analogamente, se g é diferenciável em d, então usando a regra da cadeia e que $g(f(x)) = x$, temos

$$g'(f(c))f'(c) = 1,$$

e então $f'(c) \neq 0$. ☐

EXEMPLO 5.4. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então f tem inversa $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, e $g(y) = \sqrt[n]{y}$. Para $y > 0$ temos então

$$g'(y) = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Note que g não é diferenciável no zero pois $f'(0) = 0$.

Uma primeira e importante aplicação de derivadas diz respeito a pontos extremos locais. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, tem um *máximo local* em $x \in I$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in (x - \delta, x + \delta) \cap I \implies f(y) \leq f(x). \tag{5.0.4}$$

Se a desigualdade em (5.0.4) for estrita, chamamos o ponto de *máximo estrito local.* Definição análoga serve para mínimo local e mínimo estrito local. Chamamos um ponto de máximo ou mínimo (estrito) local de ponto extremo (estrito) local.

O resultado a seguir descreve condição necessária para um ponto interior ser extremo local.

TEOREMA 5.0.4 (Ponto extremo interior). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, e c ponto interior de I e extremo local de f. Se f é diferenciável em c, então $f'(c) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sem perda de generalidade, suponha que c seja ponto interior de máximo local. Então, se $f'(c) > 0$ temos

$$0 < f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

numa vizinhança aberta de c. Logo, para $x > c$ tem-se $f(x) > f(c)$, contradição pois c é ponto de máximo local. De forma semelhante não podemos ter $f'(c) < 0$. Logo $f'(c) = 0$. ☐

Note que se a derivada de uma função se anula num determinado ponto, não se pode concluir que este seja um ponto extremo. Como exemplo temos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, que tem derivada zero em $x = 0$ mas este não é ponto de máximo nem mínimo local. Ver Figura 3.

A seguir apresentamos um resultado com importantes por si e por suas consequências. É o *Teorema do Valor Médio*, que vemos a seguir na sua versão mais simples, o *Teorema de Rolle*, ilustrados na Figura 4.

TEOREMA 5.0.5 (Teorema de Rolle). *Seja $a < b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Suponha ainda que $f(a) = f(b) = 0$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f é identicamente nula em $[a, b]$, então o resultado é verdadeiro. Caso contrário, então f tem algum valor positivo ou negativo em (a, b). Sem perda de generalidade, suponha que f tem algum valor positivo. Como $[a, b]$ é compacto, então f

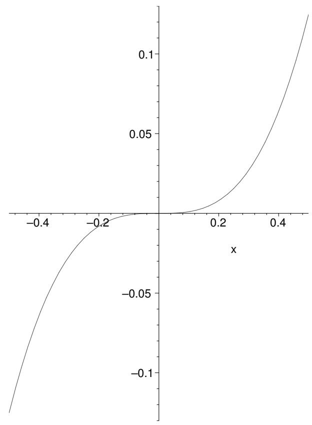

FIGURA 3. Gráfico de $f(x) = x^3$, que tem derivada zero em $x = 0$, mas este não é ponto extremo.

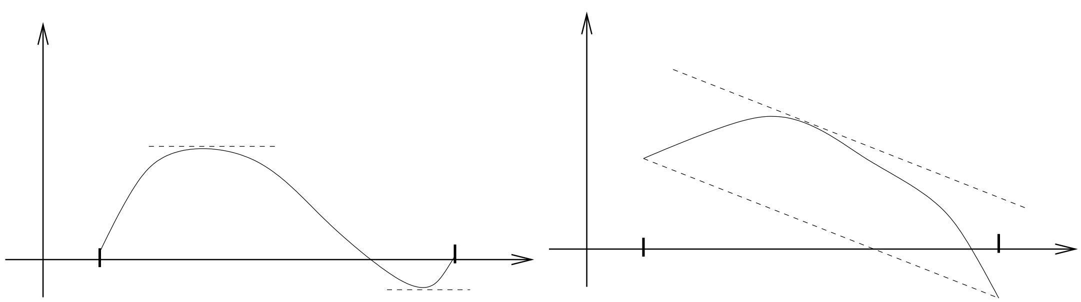

FIGURA 4. Os Teoremas de Rolle e do Valor Médio versam sobre a existência de derivada com valor determinado pelos pontos extremos.

atinge seu máximo em algum $c \in (a, b)$. Mas pelo Teorema do ponto extremo interior (Teorema 5.0.4), $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

TEOREMA 5.0.6 (Teorema do Valor Médio). *Seja $a < b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Então $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Como f é diferenciável em $[a, b]$, então ϕ também o é no mesmo intervalo. Logo, pelo Teorem de Rolle 5.0.5 existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Portanto

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Uma primeira aplicação do Teorema do Valor Médio garante que se uma função definida num intervalo tem derivada identicamente igual a zero, então a função é constante.

Lema 5.0.7. Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja contínua em $[a, b]$, onde $a < b$, e diferenciável em (a, b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante em $[a, b]$.

Demonstração. Seja $a < c \leq b$. Pelo Teorema do Valor Médio 5.0.6, existe $x \in (a, c)$ tal que $f(c) - f(a) = f'(x)(c - a)$. Como $f'(x) = 0$, temos $f(c) = f(a)$. Como c é arbitrário, temos f constante em $[a, b]$. $\square$

Observe que pelo resultado acima, se f, g são funções diferenciáveis que tem a mesma derivada, então f e g diferem por uma constante.

Exemplo 5.5. Seja $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$ diferenciável e com derivada limitada em $B_1(0)$. Se (x_n) é sequência de Cauchy em $B_1(0)$, então $\big(f(x_n)\big)$ é sequência de Cauchy.

Para mostrar este fato, como f tem derivada limitada, seja c constante tal que $|f'(x)| < c$ para todo $x \in B_1(0)$. Dado $\epsilon > 0$, como (x_i) é sequência de Cauchy em $B_1(0)$, então existe N tal que

$$i, j > N \implies |x_i - x_j| < \frac{\epsilon}{c}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos para todo x_i e x_j que existe $\xi_{i,j} \in B_1(0)$ tal que

$$|f(x_i) - f(x_j)| = |f'(\xi_{i,j})(x_i - x_j)| = |f'(\xi_{i,j})||x_i - x_j| \leq c|x_i - x_j|,$$

e portanto

$$i, j > N \implies |f(x_i) - f(x_j)| \leq c|x_i - x_j| < \epsilon,$$

e $\big(f(x_i)\big)$ é sequência de Cauchy.

A aplicação seguinte do Teorema do Valor Médio garante condições necessárias e suficientes para uma função ser crescente num intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *crescente* no intervalo I se para $x, y \in I$ com $y > x$ tem-se $f(y) \geq f(x)$. Dizemos ainda que $f : I \to \mathbb{R}$ é *estritamente crescente* em I se para $x, y \in I$ com $y > x$ tem-se $f(y) > f(x)$. Definições análogas valem para funções *decrescentes* e *estritamente decrescentes*.

Lema 5.0.8. Seja I intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então

(1) f é crescente em I se e somente se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
(2) f é decrescente em I se e somente se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha f crescente. Para x, $c \in I$,

$$x < c \text{ ou } x > c \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Portanto

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Sejam $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$. Usando o teorema do valor médio 5.0.6, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. $\square$

Observação. É possível modificar a demonstração acima e mostrar que $f'(x) > 0$ implica em f estritamente crescente. Entretanto, mesmo funções que tem derivada nula em alguns pontos podem ser estritamente crescentes, como por exemplo $f(x) = x^3$ (Figura 3).

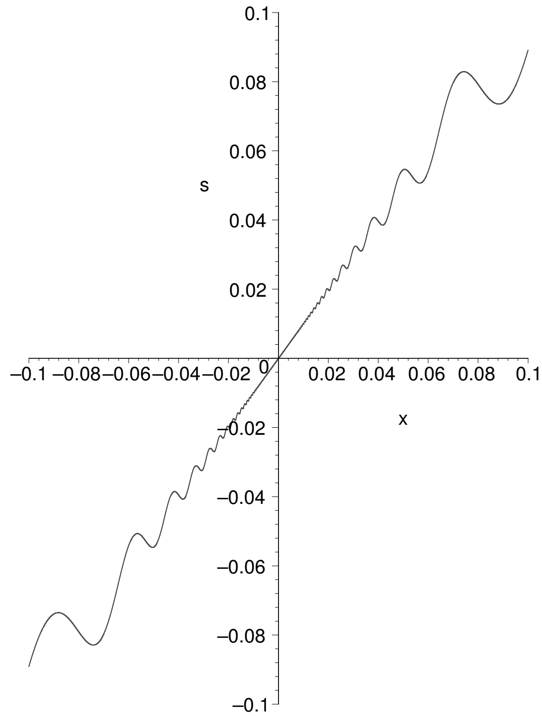

FIGURA 5. Gráfico de $g(x)$, que tem $g'(0) = 1$ mas não é localmente crescente.

OBSERVAÇÃO. Não é verdade que se $f'(c) > 0$ para algum ponto c no domínio da f implique em f crescente numa vizinhança de c. Como exemplo considere

$$g(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{\pi}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é diferenciável em zero com $g'(0) = 1$, mas não é crescente em nenhuma vizinhança do zero, ver Figura 5. De fato, considere as sequências $x_k = 1/(2k + 1/2)$ e $y_k = 1/(2k)$. Então $x_k < y_k$ mas $g(x_k) > g(y_k)$. Para comprovar esta última desigualdade note que

$$2k\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 [g(x_k) - g(y_k)] = 2k\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2k + \frac{1}{2}} + \frac{2}{(2k + \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2k}\right]$$
$$= 2k\left(2k + \frac{1}{2}\right) + 4k - \left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 = 4k^2 + k + 4k - (4k^2 + 2k + 1/4) = 3k - 1/4 > 0$$

para todo k inteiro positivo.

Outra aplicações do Teorema do Valor Médio seguem nos exemplos abaixo.

EXEMPLO 5.6. Seja $f(x) = \exp(x)$. Então $f'(x) = \exp(x)$. Queremos mostrar que

$$\exp(x) > 1 + x \text{ para todo } x \neq 0. \tag{5.0.5}$$

Seja $x > 0$. Então aplicando o Teorema do Valor Médio em $[0, x]$ temos que existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\exp(x) - \exp(0) = \exp(c)(x - 0).$$

Como $c > 0$, então $\exp(c) > \exp(0) = 1$. Logo

$$\exp(x) > 1 + x.$$

Para $x < 0$, os argumentos são semelhantes e portanto a desigualdade (5.0.5) vale.

EXEMPLO 5.7 (Ponto Fixo). Seja I intervalo fechado e $f : I \to I$ diferenciável em I tal que $|f'(x)| < c$ para todo $x \in I$, onde $c < 1$. Então a sequência definida por x_0 e $x_i = f(x_{i-1})$ para $i \in \mathbb{N}$ converge, e $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ é ponto fixo, i.e, $f(x^*) = x^*$. Além disto, este ponto fixo é único.

De fato, note que f é uma contração pois

$$|f(y) - f(x)| \leq f'(\xi)|y - x| \leq c|y - x|,$$

onde ξ é um ponto entre y e x, e como I é intervalo, então $\xi \in I$. Logo pelo Teorema 3.6.3, o ponto fixo é único, e é o limite da sequência (x_i) acima, pois esta é a gerada pelo método das aproximações sucessivas, e portanto converge.

5.1. Teorema de Taylor e Aplicações

Uma ferramenta poderosa em análise com várias consequências é o Teorema de Taylor, que é na verdade também uma aplicação do Teorema do Valor Médio.

A expansão de Taylor aproxima localmente por um polinômio uma função que pode ser complicada. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ onde $I \subseteq \mathbb{R}$ tenha $k \geq 0$ derivadas num ponto $x_0 \in I$. Defina

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!},$$

onde escrevemos $g^{(j)}(c)$ para indicas a j-ésima deriva de g num ponto c.

Note que com a definição acima, temos $f^{(j)}(x_0) = P_k^{(j)}(x_0)$ para $j = 1, \ldots, k$. Chamamos P_k de polinômio de Taylor de ordem k para f em x_0, e o resultado abaixo diz o quão boa é a aproximação de uma função por seu polinômio de Taylor.

TEOREMA 5.1.1 (Taylor). *Seja $k \geq 0$ e $I = [a, b]$, com $a < b$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função k vezes diferenciável em I com $f^{(k)}$ contínua em I e tal $f^{(k+1)}$ exista em (a, b). Se x_0, $x \in I$ então existe $\xi \in (x_0, x) \cup (x, x_0)$ tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} + f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam x_0, $x \in I$. Sem perda de generalidade, suponha $x > x_0$. Defina $J = [x_0, x]$ e seja $F : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^k}{k!}f^{(k)}(t).$$

Logo

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t).$$

Definindo $G: J \to \mathbb{R}$ por

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{k+1} F(x_0),$$

temos $G(x_0) = G(x) = 0$. Pelo Teorema de Rolle (Teorema 5.0.5) existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que

$$0 = G'(\xi) = F'(\xi) + (k+1)\frac{(x-\xi)^k}{(x-x_0)^{k+1}} F(x_0).$$

Portanto

$$\begin{aligned} F(x_0) = -\frac{1}{k+1}\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(x-\xi)^k}F'(\xi) &= \frac{1}{k+1}\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(x-\xi)^k}\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k+1)}(\xi) \\ &= \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi). \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.8. Seja $f: I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, com $a < b$. Suponha que f e suas derivadas f', f'',..., $f^{(k+1)}$ existam e sejam contínuas em I. Se $f^{(k+1)}(x) = 0$ para todo $x \in I$ e $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k)}(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in I$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in I$. De fato, pelo Teorema de Taylor unidimensional (Teorema 5.1.1), dado $x \in I$, existe ξ entre x e x_0 tal que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} \\ + f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Mas por hipótese, $f^{(i)}(x_0)$ para $i = 0, \ldots, k$, e $f^{(k+1)} \equiv 0$ em I. Em particular, como $\xi \in I$, temos $f^{(k+1)}(\xi) = 0$. Portanto, $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Uma aplicação da série de Taylor refere-se à caracterização de extremos locais.

Teorema 5.1.2. *Sejam $a < b \in \mathbb{R}$ e $I = [a,b]$. Sejam $x_0 \in (a,b)$ e $k \geq 2$ número inteiro. Dada $f: I \to \mathbb{R}$, e supondo que f',...,$f^{(k)}$ existam, que sejam contínuas em I, e que $f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ mas $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, temos que*

(1) Se k é par e $f^{(k)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo estrito local.
(2) Se k é par e $f^{(k)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo estrito local.
(3) Se k é ímpar, então x_0 não é extremo local.

Demonstração. Vamos começar por mostrar (1). Pelo Teorema de Taylor, para $x \in I$ existe ξ entre x_0 e x tal que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(k-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ + f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f^k(\xi)\frac{(x-x_0)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Supondo agora que $f^{(k)}(x_0) > 0$, como $f^{(k)}$ é contínua então existe $\delta > 0$ tal que $f^{(k)}(x) > 0$ para todo $x \in U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se $x \in U$, então $\xi \in U$ e então $f^{(k)}(x) > 0$. Se k é par, então para $x \neq x_0$ temos

$$f^{(k)}(\xi)\frac{(x - x_0)^k}{k!} > 0.$$

Logo

$$x \in U \backslash \{x_0\} \implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ é mínimo local},$$

e portanto (1) está demonstrado.

Para demonstrar (2), o argumento é semelhante.

Finalmente, para mostrar (3), procedemos primeiro como no argumento acima. Note que por hipótese, $f^{(k)}$ é contínua, e $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $f^{(k)}$ não muda de sinal em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nos restringindo a esta vizinhança, se k é ímpar, então $(x - x_0)^k/k!$ é positivo para $x > x_0$ e negativo para $x < x_0$. Logo $f(x) > f(x_0)$ ou $f(x) < f(x_0)$ dependendo do sinal de $x - x_0$. Logo a proposição (3) é verdadeira. □

TEOREMA 5.1.3 (Ponto extremo interior). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, e $x \in \Omega$ ponto extremo local. Se f é diferenciável em x, e se além disto, f for duas vezes diferenciável em Ω, com derivadas segundas contínuas, então temos que*

(1) se x for ponto de mínimo local, então $f''(x) \geq 0$
(2) se x for ponto de máximo local, então $f''(x) \leq 0$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha agora que f seja duas vezes diferenciável com derivadas segundas contínuas, e que x seja ponto de mínimo local. Então x é ponto crítico, e pelo Teorema de Taylor temos que

$$f(x + su) - f(x) = \frac{(su)^2}{2} f''(\xi_s),$$

para todo s suficientemente pequeno e $u \in \mathbb{R}$, onde $\xi_s \in (x, x + su) \cup (x + su, x)$. Quando $s \to 0$, temos que $\xi_s \to x$, e usando a continuidade de f'' concluímos que

$$f''(x)u^2 = \lim_{s \to 0} f''(\xi_s)u^2 = 2 \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su) - f(x)}{s^2} \geq 0,$$

pois como x é mínimo local, então $f(x + su) - f(x) \geq 0$ para todo s suficientemente pequeno. Portanto $f''(x)u^2 \geq 0$, como queríamos demonstrar. □

EXEMPLO 5.9. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = c + bx + \frac{1}{2}ax^2,$$

onde $a > 0$, b, $c \in \mathbb{R}$. Então x_* é ponto de mínimo estrito de F se e somente se $x_* = b/a$. De fato, se x_* é ponto de mínimo estrito de F, então $F'(x_*) = 0$. Mas

$$F'(x_*) = ax_* + b,$$

e portanto $ax_* = -b$. Por outro lado, se $ax_* = -b$, então $F'(x_*) = 0$. Como $F''(x_*) = a > 0$, então x_* é ponto de mínimo estrito de F.

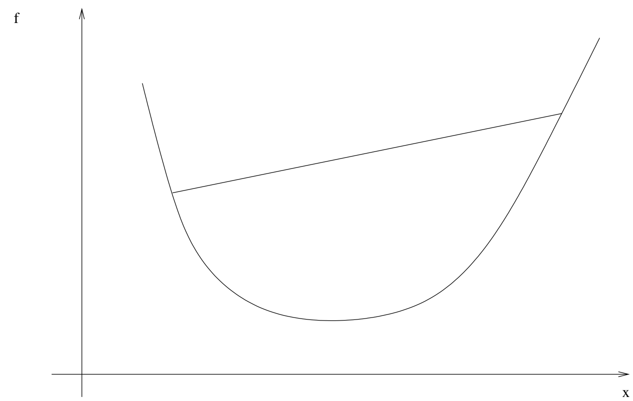

FIGURA 6. Função convexa.

Uma segunda aplicação do Teorema 5.1.1 diz respeito à funções convexas definidas em convexos. Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é convexa em Ω se

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

para todo $t \in [0,1]$. Graficamente, uma função é convexa se o gráfico de f entre x e y está abaixo da reta que une os pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$, como ilustra a Figura 6.

Existem inúmeros resultados relacionados a convexidade. Em particular, um mínimo local é também global, e se o mínimo local é estrito, segue-se a unicidade de mínimo global [**12**].

TEOREMA 5.1.4. *Seja $\Omega = (a,b)$ um intervalo não vazio, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

(1) f é convexa
(2) $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO. ($\Leftarrow$) Sejam x, $y \in \Omega$ e suponha que $f'' \geq 0$ em Ω. Sem perda de generalidade suponha $x < y$. Seja $0 < t < 1$. Definindo $x_0 = (1-t)x + ty$, pelo Teorema de Taylor existem $\xi_1 \in (x, x_0)$ e $x_0 \in (x_0, y)$ tais que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x - x_0)^2,$$
$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(y - x_0)^2.$$

Como $f''(\xi_1) \geq 0$ e $f''(\xi_1) \geq 0$ então

$$\begin{aligned}(1-t)&f(x) + tf(y)\\ &= f(x_0) + f'(x_0)[(1-t)x + ty - x_0] + \frac{(1-t)}{2}f''(\xi_1)(x - x_0)^2 + \frac{t}{2}f''(\xi_2)(y - x_0)^2\\ &\qquad = f(x_0) + \frac{(1-t)}{2}f''(\xi_1)(x - x_0)^2 + \frac{t}{2}f''(\xi_2)(y - x_0)^2 \geq f(x_0).\end{aligned}$$

Logo f é convexa.

($\Rightarrow$) Se f é convexa,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

e para $t \in (0,1]$ temos que

$$\frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t} \leq f(y)-f(x).$$

Tomando o limite $t \to 0$ obtemos $f'(x)(y-x) \leq f(y)-f(x)$. Seja $s = |x-y|$ e $h = (y-x)/s$. Usando agora a fórmula de Taylor obtemos que existe $\hat{s} \in (0,s)$ tal que

$$\frac{1}{2}f''(x+\hat{s}h)(sh)^2 = \frac{1}{2}f''(x+\hat{s}h)(y-x)^2 = f(y)-f(x)-f'(x)(y-x) \geq 0.$$

Portanto

$$f''(x+\hat{s}h) \geq 0.$$

para todo $h \in B_1(0)$. Tomando $y \to x$ temos $s \to 0$ e portanto $\hat{s} \to 0$. Usando a continuidade de f'' concluímos a demonstração. □

Observação. Note que no processo de demonstração do Teorema 5.1.4, mostramos também que uma função f ser convexa implica em $f'(x)(y-x) \leq f(y)-f(x)$ para todo x, y.

5.2. Exercícios

Exercício 5.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Calcule $f'(0)$.

Exercício 5.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Mostre então que $g(x) = |f(x)|$ é diferenciável em c se e somente se f é diferenciável em c e $f'(c) = 0$.

Exercício 5.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Note que f atinge seu mínimo em $x = 0$. Pode-se concluir então que $f'(0) = 0$? Por que?

Exercício 5.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de f. Mostre que é único.

Exercício 5.5. Dê exemplo de uma função uniformemente contínua em $[0,1]$ que seja diferenciável em $(0,1)$ mas cuja derivada não seja limitada em $(0,1)$. Mostre porque que o seu exemplo funciona.

Exercício 5.6. Seja $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[a,b]$. Mostre que se $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, então existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Exercício 5.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é injetiva.

Exercício 5.8. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que se f' é positiva em I, i.e., $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente.

Exercício 5.9. Mostre que se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável com derivada limitada em I, então f é de Lipschitz.

Exercício 5.10. Sejam $a < b$, e $x_0, x_1, \ldots, x_N$ pontos tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tem derivada contínua em $[a, b]$, então existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ independente de N tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M.$$

(Obs: dizemos neste caso que f tem *variação limitada*.)

Exercício 5.11. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é absolutamente contínua se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, dados $N \in \mathbb{N}$ e intervalos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ em [0,1], disjuntos e tais que

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k - x_k| < \delta,$$

tem-se que $\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon$. Mostre que f absolutamente contínua implica em f uniformemente contínua. Mostre que se f é diferenciável com derivada contínua em $[0, 1]$ então f é absolutamente contínua.

Exercício 5.12. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável com a segunda derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq ch,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h.

Repita o exercício supondo agora que $f : I \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável com a terceira derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$, e que então

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \leq ch^2,$$

As duas formas acima são utilizadas para aproximar $f'(x)$.

Exercício 5.13. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 5.14. Mostre que dados quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$ fixados, o resto da série de Taylor com n termos da função $\cos x$ centrada em x e calculada em y converge para zero quando $n \to +\infty$.

Exercício 5.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave, com mínimo local em $x = 0$, e suponha que este mínimo não seja global. Mostre que existe ponto crítico diferente de $x = 0$. Note [**5**] que este resultado não pode ser generalizado para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, por exemplo.

Exercício 5.16. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja suave, e possua ao menos dois mínimos locais. Mostre que f possui um ponto crítico entre estes dois mínimos. Novamente [**5**], este resultado não vale em geral para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercício 5.17. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em A, com a segunda derivada contínua, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto, e $x \in A$ ponto crítico de f tal que $f''(x) \neq 0$ (são chamados de *não degenerados*). Mostre que existe uma vizinhança aberta de x tal que x é o único ponto crítico.

Exercício 5.18. Sejam f e A como no exercício 5.17. Suponha que todo ponto crítico de A tem segunda derivada não nula. Mostre que cada compacto contido em A contém um número finito de pontos críticos não degenerados.

Exercício 5.19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave e tal que $f'(x_1) > 0$ e $f'(x_2) > 0$ para $x_1 < x_2$ raízes de f. Mostre que f possui ao menos uma raiz em (x_1, x_2).

Exercício 5.20. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

Exercício 5.21. Seja f e g funções de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diferenciáveis em $x \in \mathbb{R}^m$. Mostre usando a definição de derivadas que $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Seja $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ também diferenciável em $x \in \mathbb{R}^m$. Mostre usando a definição de derivadas que $(hg)'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$.

Exercício 5.22. Seja $Q = (0, 1) \times (0, 1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = g'(x)$ para todo $x \in Q$, então existe constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in Q$.

Exercício 5.23. Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq 1\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ função contínua em B, diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B. Mostre que f tem ponto crítico no interior de B.

Exercício 5.24 (Mínimos Quadrados). Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercício 5.25. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, e A° o conjunto dos pontos interiores de A. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas em A°, e f contínua em A. Suponha ainda que f se anule em toda a fronteira de A, e que f'' seja negativa definida para todo ponto em A°. Mostre que $f(x) > 0$ para todo $x \in A^\circ$.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Tom M. Apostol, *Mathematical analysis*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974. MR0344384 (49 #9123)

[2] Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear programming*, 3rd ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006. Theory and algorithms. MR2218478 (2006k:90001)

[3] Robert G. Bartle, *The elements of real analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1976. MR0393369 (52 #14179)

[4] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, *Introduction to real analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. MR1135107 (92i:26002)

[5] James Bisgard, *Mountain Passes and Saddle Points*, SIAM Rev. **57** (2015), no. 2, 275–292, DOI 10.1137/140963510. MR3345345

[6] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. MR832183 (87e:15001)

[7] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis*, Texts and Readings in Mathematics, vol. 28, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2004.

[8] Elon Lages Lima, *Curso de análise. Vol. 1*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976 (Portuguese). MR654861 (83h:26002a)

[9] ———, *Curso de análise. Vol. 2*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 13, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981 (Portuguese). MR654862 (83h:26002b)

[10] ———, *Espaços métricos*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 4, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977 (Portuguese). MR654506 (83d:54001)

[11] Paul R. Halmos, *Naive set theory*, Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the 1960 edition; Undergraduate Texts in Mathematics. MR0453532 (56 #11794)

[12] David G. Luenberger, *Introduction to linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.Zbl 0297.90044

[13] ———, *Optimization by vector space methods*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1969. MR0238472 (38 #6748)

[14] Giuseppe De Marco, *For every ϵ there continuously exists a δ*, Amer. Math. Monthly **108** (2001), no. 5, 443–444, DOI 10.2307/2695800. MR1837868

[15] *Prova de Matemática Extramuros*, `http://www.provaextramuros.org.br/`.

[16] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics. MR0385023 (52 #5893)

[17] I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture notes on elementary topology and geometry*, Springer-Verlag, New York, 1976. Reprint of the 1967 edition; Undergraduate Texts in Mathematics. MR0413152 (54 #1273)

[18] Terence Tao, *Analysis. I*, Texts and Readings in Mathematics, vol. 37, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006. MR2195040 (2006g:26002a)

[19] ———, *Analysis. II*, Texts and Readings in Mathematics, vol. 38, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006. MR2195041 (2006g:26002b)

[20] *Monkey saddle — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, Wikipedia (2009).

[21] Andrew Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 443–551, DOI 10.2307/2118559. MR1333035 (96d:11071)