Prof. Alexandre Madureira

Data: **setembro de 2012**

Tempo de prova: **2 horas e 30 minutos**

(**Questão 1**) Julgue os itens abaixo:

0 Se A e B são dois conjuntos disjuntos, i.e., $A \cap B = \emptyset$, e $X = A \cup B$, então $A = X \backslash B$ e $B = X \backslash A$.

1 Sejam A e B dois conjuntos, e $C = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Então $C = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ e $C \cap A \cap B = \emptyset$.

2 Se $n \in \mathbb{N}$ é primo, então n é o único divisor inteiro de n^2.

3 Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 < 0\}$, então $A \cup B = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

4 Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 2\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| = 2\}$, então $A \cap B = \{(0, 2), (0, -2)\}$

(**Questão 2**) Julgue os itens abaixo:

0 A função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log x$ é bijetiva

1 A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = x^2$ é bijetiva mas não é sobrejetiva

2 Se $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ e $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$, onde $h(x) = 2^2$, e $r(x) = \sqrt{x}$ então $r(h(x)) = x$ para todo $x \in (0, 1)$.

3 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + 2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é constante.

4 Seja $A \subset \mathbb{Q}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{-x^2 + 1}\, f(x) \in \mathbb{R}$. Então $A \subset (-2, 2)$.

(**Questão 3**) Julgue os itens abaixo:

0) Seja r_1 reta dada por

$$r_1 = \{(1,2) + t(3,-1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Então a equação da reta que passa por $(1,1)$ e é paralela à r_1 é dada por $x = -3y + 4$.

1) A circunferância com centro em $(0,3)$ e raio $\sqrt{2}$ é tangente às retas $x = 3 + \sqrt{2}$ e $y = 3 + \sqrt{2}$.

2) As retas no espaço $-3y + 7x + z = 11$ e $2y - 13x + 3z = 35$ se interseptam no ponto $(2,-3,-12)$.

3) O vetor $(1,-3,2)$ é ortogonal ao plano dado por $-x + 3y - 2z + 4 = 0$.

4) Se $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{p}^3$ são três pontos distintos pertencentes a um plano P no espaço, então $(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^1) \times (\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^3)$ também pertence a este plano P.

(**Questão 4**) Seja A matriz real de dimensão $n \times n$. Julgue os itens abaixo:

0 Se A é positiva definida, então A é invertível.

1 Se A é invertível, então A^T é invertível.

2 Se $\det(AA^T) = 1$, então A é invertível.

3 Se A é simétrica, então é invertível

4 A única matriz que satisfaz $A^2 = A$ é a matriz identidade.

(**Questão 5**) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (3x - 2y + z, x + y)$, e seja A matriz que representa esta transformação na base canônica. Julgue os itens abaixo:

0. A tem três linhas e duas colunas.

1. A é invertível.

2. O núcleo de A tem dimensão dois e a imagem tem dimensão dois.

3. Os vetores $T(0, 0, 1)$ e $T(1, 1, 1)$ formam uma base para o espaço imagem de T

4. No caso da matriz A ser a representação da transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nas bases canônicas, se $m > n$ então a dimensão do núcleo de A é maior que zero.

(**Questão 6**) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Julgue os itens abaixo:

0. Como A não é invertível, então A não é diagonalizável.
1. Como A não tem três autovalores distintos, então não é diagonalizável
2. A matriz A só possui dois autovalores distinto, mas possui três autovetores LI
3. A é diagonalizável
4. Dois autovalores são complexos pois A não é simétrica

(**Questão 7**) Julgue os itens abaixo:

0. A série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolutamente se e somente se $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge.
1. A série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i/i$ converge.
2. A série $\sum_{i=1}^{\infty} x^i/i!$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. A série $\sum_{i=1}^{\infty} 3^i/i!$ converge, mas $\sum_{i=1}^{\infty} i^{10}/3^i$ não converge.
4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big[\log(n+1)\big]^{-n}$ converge condicionalmente.

(**Questão 8**) Julgue os itens abaixo:

0 A função $f(x) = \sinh x / \cot(\tanh x)$ é diferenciável mas não é contínua em $\mathbb{R}$

1 Se $f(x)$ é contínua em $(0, 1)$, então $f(x)/x$ é contínua em $(0, 1)$.

2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua tal que $(x - 2)f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$. Então f é diferenciável em toda a reta.

3 $\lim_{x\to 0^+} x^x = 0$

4 Para todo $x \in (-1, 1]$, a sequência x^n converge.

(**Questão 9**) Julgue os itens abaixo:

0 Se f é contínua em $x = 0$ e tal que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(0) = 0$.

1 Como $\log'(x) = 1/x = 0$ então $\log(x)$ é assíntota a uma reta horizontal.

2 A funçao $x/(x^2 + 1)$ não possui pontos extremos na reta.

3 $x^{2/3}$ possui mínimo mas não máximo em $\mathbb{R}$.

4 $x^{2/3}$ é côncava em $\mathbb{R}$.

(**Questão 10**) Julgue os itens abaixo:

(0) $\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\sin^2(xy)\,dxdy = 0.$

(1) Ache a área compreendida pela curva x^2 entre $x = 0$ e $x = 1$ é $1/3$

(2) $\int_1^\infty x^{-2}\,dx = 1$

(3) $\frac{d}{dx}\int_0^1 \sin(s)\,ds = \int_0^1 \cos(s)\,ds.$

(4) A área determinada pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0 \text{ e } 0 < y < \sqrt[3]{x}\}$ é $3/4$.

(**Questão 11**) Julgue os itens abaixo:

0. Seja $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$ em $p = (1,2)$. Se $g(1) = 1$ e g tem derivada positiva em toda a reta, então $\frac{d}{dx} f(g(x^2), g(x^2)+1) > 0$ em $x = 1$.

1. $\dfrac{x^5}{y^2} + \dfrac{z^{7/2}}{\sqrt{x}} \log \dfrac{x}{y}$ é homogênea de grau 3.

2. Seja $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2 - 1)$. Numa vizinhança de $(0,1)$, a variável y pode ser escrita como função de x tal que $(x, y(x)) \in \{(x,y) : f(x,y) = 1\}$.

3. Seja $f(x,y) = xy^2 + \log x$ e g tal que $g(0) = -1$. Então $\dfrac{d}{dt} f(g(t)+2, t+1) = 2g'(0) + 2$ quando $t = 0$.

4. Se $f(x,y) = g(x)g(y)$, e t_0 é ponto crítico de g então (t_0, y) e (x, t_0) são pontos críticos de f para todos x e y.

(**Questão 12**) Julgue os itens abaixo:

0 Seja $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$. Então $\exp(-2x) + 2\exp(x)$ é soluçao para os valores de contorno $y(0) = 3$ e $y(\ln 3) = 163/9$.

1 Seja $3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$. Então se $y(x)$ é soluçao não nula, $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$.

2 A solução da equação do ítem 2 tem um ponto de mínimo global na reta.

3 $f(x)\frac{d^2y}{dx^2} - 5y = x^3$ é linear.

4 Seja $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Então $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ para todas as condições iniciais.

(**Questão 13**) Julgue os itens abaixo:

0 $e = \sum_{i=0}^{\infty} (i!)^{-1}$.

1 Não e possível obter a série de Taylor para $\log x$ pois esta função não está definida em $x = 0$.

2 $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^8}{4!} - \dots$.

3 A série de Taylor de um polinômio somente é igual ao polinômio se a série é centrada em $x = 0$.

4 Seja f tal que $f(-x) = f(x)$ para todo x. Então a série de Taylor só contém termos de grau par.

(**Questão 14**) Calcule a norma do ponto do plano $x + 2y + 3z = 6$ que se situa mais próximo da origem.

(**Questão 15**) Seja y solução de

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{2} = 5x.$$

Se $y(0) = e + 10$, calcule $y(2)$.

Questão 1

Respostas

(0) Verdadeiro

(1) Verdadeiro

(2) Falso: n^2 também é divisor.

(3) Falso: $A \cup B = (-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

(4) Falso: $(-2, 0)$, $(2, 0) \in A \cap B$

Questão 2

Respostas

(0) Verdadeiro

(1) Falso

(2) Falso

(3) Falso. Tome $f = 1$ em $\mathbb{Q}$ e zero caso contrário.

(4) Falso. Tome $f \equiv 0$.

Questão 3

Respostas

(0) Verdadeiro

(1) Falso. $y = 3 + \sqrt{2}$ não é tangente.

(2) Falso. O ponto não pertence à segunda reta

(3) Verdadeiro.

(4) Falso.

Questão 4

Respostas

(0) Verdadeiro.

(1) Verdadeiro.

(2) Verdadeiro.

(3) Falso. Tome a matriz nula.

(4) Falso. Tome a matriz nula.

Questão 5

Respostas

(0) Falso.

(1) Falso.

(2) Falso.

(3) Verdadeiro.

(4) Verdadeiro.

Questão 6

Respostas

Note que os autovalores de A são 2, 2, e 0. e os autovetores são $(0,1,1)^T$, $(1,0,4)^T$ e $(0,0,1)^T$.

(0) Falso.

(1) Falso.

(2) Verdadeiro.

(3) Verdadeiro.

(4) Falso.

Questão 7

Respostas

(0) Verdadeiro. Esta é a definição.

(1) Verdadeiro.

(2) Verdadeiro. É a série da exponencial. Teste da razão prova convergência.

(3) Falso, ambas as séries convergem pelo teste da razão.

(4) Falso, converge absolutamente.

Questão 8

Respostas

(0) Falso. Toda função diferenciável é contínua.

(1) Vedadeiro. Divisão por função contínua.

(2) Vedadeiro. f é um polinômio.

(3) Falso. $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

(4) Verdadeiro.

Questão 9

Respostas

(0) Verdadeiro. f é ímpar.

(1) Falso.

(2) Falso. Possui extremos em ± 1.

(3) Verdadeiro. Possui mínimo em $x = 0$

(4) Falso. Note que ela é par e que apesar de ter segunda derivada negativa em $x \neq 0$, ela não é diferenciável no zero.

Questão 10

Respostas

(0) Falso. A função é não negativa.

(1) Verdadeiro.

(2) Verdadeiro.

(3) Falso. O resultado dá zero.

(4) Verdadeiro.

Questão 11

Respostas

(0) Falso. Tome f constante.

(1) Verdadeiro.

(2) Falso.

(3) Verdadeiro.

(4) Falso.

Questão 12

Respostas

(0) (ANPEC 2010). Falso.

(1) (ANPEC 2004). Falso.

(2) (ANPEC 2004). Falso.

(3) Verdadeiro.

(4) Verdadeiro.

Questão 13

Respostas

(0) Verdadeiro usando Taylor para $\exp x$ em $x = 1$.

(1) Falso.

(2) Verdadeiro. Basta usar a série para exp.

(3) Falso.

(4) Verdadeiro.

Questão 14

Respostas

O ponto é $(3, 6, 9)/7$. Ver Simmons Calculus..., pag 699. A norma é $3\sqrt{14}/7$.

Questão 15

Respostas

ANPEC(2002),#15. $y(2) = 11$.