ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira
Monitor: Guilherme Cota
Data de entrega: **23 de fevereiro de 2024**

Exercício 1. Mostre que se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas, então $f + g$ é uniformemente contínua. Mostre que, mesmo que f seja limitada, a função fg não é necessariamente uniformemente contínua.

Exercício 2. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir δ tal que dados K subintervalos $(x_1, y_1), \dots, (x_K, y_K)$ contidos em I e disjuntos (i.e., $x_1 < y_1 < \cdots < x_K < y_K$), com $\sum_{i=1}^{K}(y_i - x_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^{K} |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Mostre que

(1) toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua
(2) toda função de Lipschitz é absolutamente contínua

Exercício 3. Suponha $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $(0, 1]$. Mostre que podemos definir $f(0)$ tal que f seja uniformemente contínua em $[0, 1]$.

Exercício 4. Seja K um compacto e $f : K \to K$ tal que $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in K$. Mostre que f é bijetora.

(Dica: mostre que f é injetora e contínua, e considere a sequência $\mathbf{x}_j = f(\mathbf{x}_{j-1})$ onde $\mathbf{x}_0 \notin f(K)$. Mostre que $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j+m}\| = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_m\|$, e obtenha contradição.)

Exercício 5. Sejam $a < b$, e $x_0, x_1, \dots, x_N$ pontos tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tem derivada contínua em $[a, b]$, então existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ independente de N tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M.$$

(Obs: dizemos neste caso que f tem *variação limitada*.)

Exercício 6. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável com a segunda derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq ch,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h.

Repita o exercício supondo agora que $f : I \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável com a terceira derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$, e que então

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \leq ch^2,$$

As duas formas acima são utilizadas para aproximar $f'(x)$ computacionalmente.