ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **02 de fevereiro de 2024**

Exercício 1. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e $A = \{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$

Exercício 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes:

(1) Ω é aberto em $\mathbb{R}^n$.

(2) Seja $\mathbf{x} \in \Omega$ e $(\mathbf{x}_k)$ contida em $\mathbb{R}^n$ com $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$. Então existe K^* tal que

$$k \geq K^* \implies \mathbf{x}_k \in \Omega.$$

Exercício 3. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência convergente de pontos distintos em $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de $S = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dê um exemplo de uma sequência convergente cujo limite não é ponto de acumulação de S.

Exercício 4. Seja F um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$ não vazio, e seja $\mathbf{y} \notin F$. Mostre que existe $\mathbf{x}^* \in F$ tal que $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in F\}$.

Exercício 5. Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, provando suas afirmações. Em todos os casos, K_1 e K_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, e $A = \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in K_1, \mathbf{x}_2 \in K_2\}$.

(1) K_1 e K_2 fechados implica em A compacto.

(2) K_1 e K_2 fechados implica em A fechado.

(3) K_1 compacto e K_2 fechado implica em A fechado.

Exercício 6. Seja (x_k) sequência monótona em $\mathbb{R}$, e suponha que (x_k) contenha subsequência convergente. Mostre que (x_k) converge.