ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **26 de janeiro de 2024**

Exercício 1. Mostre que um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de A se e somente se toda vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contém infinitos pontos de A.

Exercício 2. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $F \neq \emptyset$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, e $\inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in F\} = 0$, então $\mathbf{x} \in F$.

Exercício 3. Mostre sem usar o Teorema de Heine–Borel que $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ é compacto.

Exercício 4. Decida se os conjuntos abaixo são ou não compactos. Prove suas afirmativas sem utilizar o Teorema de Heine–Borel.

(a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A finito.

(b) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que B não contém ao menos um de seus pontos de acumulação.

Exercício 5. Mostre, sem usar o Teorema de Heine–Borel, que se K é compacto e $F \subseteq K$ é fechado, então F é compacto.

Exercício 6. Sem usar o Teorema de Bolzano–Weiertrass no $\mathbb{R}^n$, mostre que se K é compacto e $A \subseteq K$ é infinito, então existe pelo menos um ponto de acumulação de A. Obtenha como corolário o Teorema de Bolzano–Weiertrass. Este ponto de acumulação necessariamente pertence a A? Necessariamente pertence a K?