ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **26 de fevereiro de 2019**

Exercício 1. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$, mas que f não é diferenciável no $(0,0)$.

Exercício 2. Seja $Q = (0,1) \times (0,1)$. Suponha que $f : Q \to \mathbb{R}$, e $g : Q \to \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q. Mostre que se $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{g}'(x)$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.

Exercício 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e com a seguinte propriedade: existe $\mathbf{x}_* \in \Omega$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, a reta $S_{\mathbf{x}} = \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_* : t \in [0,1]\}$ está contida em Ω, i.e., $S_{\mathbf{x}} \subset \Omega$ (dizemos que tal domínio tem *formato de estrela*. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função diferenciável em Ω e tal que todas as derivadas parciais de $f(\mathbf{x})$ são nulas, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Mostre que f é constante.

Exercício 4 (Mínimos Quadrados). Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$a\sum_{i=1}^n x_i^4 + b\sum_{i=1}^n x_i^3 + c\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^3 + b\sum_{i=1}^n x_i^2 + c\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercício 5. Mostre que $(0,0)$ é ponto de sela de $f(x,y) = x^2 - y^2$, e ponto de mínimo estrito local de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercício 6. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciável e tal que $\|\mathbf{f}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre então que $\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$. O vetor $\mathbf{f}'(t)$ é o *vetor tangente da curva* $\mathbf{f}$ *em* t.