ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **14 de fevereiro de 2019**

Exercício 1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) $\boldsymbol{f}$ é contínua em $\mathbf{x}$.

(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in \Omega, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon.$$

(3) Se $(\mathbf{x}_k)$ é sequência em Ω e $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, então $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_k) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$.

Exercício 2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Mostre que f é contínua em Ω se e somente se $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ são abertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ fechado e limitado, e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua em Ω. Sem usar Heine–Borel, mostre que $f(\Omega)$ é fechado e limitado.

Exercício 4. Sejam $a < b$ números reais e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Suponha que nenhum ponto interior é extremo local. Mostre que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Exercício 5. Sejam $a < b$ números reais, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que dado $\epsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que se x, $y \in [a_{i-1}, a_i]$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Exercício 6. Suponha $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua em Ω. Mostre que podemos definir $\bar{\mathbf{f}} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{\mathbf{f}}$ seja contínua em $\bar{\Omega}$, e $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Neste caso dizemos que $\bar{\mathbf{f}}$ é uma *extensão contínua* de $\mathbf{f}$.