ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **23 de fevereiro de 2019**

Exercício 1. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e $A = \{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$

Exercício 2. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência convergente de pontos distintos em $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de $S = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dê um exemplo de uma sequência convergente cujo limite não é ponto de acumulação de S.

Exercício 3. Sejam K_1 e K_2 dois conjuntos compactos, e $A = \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in K_1, \mathbf{x}_2 \in K_2\}$. Mostre que A é compacto.

Exercício 4. Seja $(\mathbf{x}_k)$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ convergente, e seja $\mathbf{x}$ seu limite. Mostre, sem usar Heine-Borel, que o conjunto

$$S = \{\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{x}_i : i \in \mathbb{N}\} = \{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots\}$$

é compacto.

Exercício 5 (Teorema da interseção de Cantor). Suponha que $\{K_j\}$ seja uma coleção de conjuntos não vazios, compactos, com $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$. Mostre que $\cap_{j=1}^{\infty} K_j$ é compacto e não vazio.

Exercício 6. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais, convergentes para x e y respectivamente, onde $x < y$. Mostre que existe um número natural N tal que $x_n < y_n$ para todo n maior que N.