ANÁLISE I – FGV
PRIMEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **18 de janeiro de 2019**

Exercício 1. Mostre que $2^n + 1$ é divisível por 3 para todo número ímpar n.

Exercício 2. Considere a afirmativa:

> Seja $n \in \mathbb{N}$ e $I_n = \{1, \dots, n\}$. Mostre que se $A \subseteq I_n$ e $f : I_n \to A$ é bijeção, então $A = I_n$.

Usando a afirmativa acima, mostre que

(1) se $\phi : I_n \to I_m$ for bijeção, então $m = n$.
(2) dado um conjunto X, se $\phi : I_n \to X$ e $\psi : I_m \to X$ forem bijeções, então $m = n$.
(3) seja X finito e $Y \subsetneq X$. Então não existe bijeção entre X e Y.

Exercício 3. Para $i \in \mathbb{N}$, seja $A_i = \{0, 1\}$. Mostre que o produto cartesiano infinito $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ não é enumerável.

Exercício 4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : A \to \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f + g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}.$$

Mostre que f está bem definida. Construa entretanto um exemplo onde não exista $\mathbf{y} \in A$ tal que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 6 (Densidade dos racionais nos reais). Mostre que dados x, $y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.