ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **09 de março de 2017**

Exercício 1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é aberto. Mostre que f é contínua em Ω se e somente se $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ são abertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Mostre que se $s = \sup\{x \in [0,1] : f(x) < 0\}$, então $f(s) = 0$.

Exercício 3. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ fechado e limitado, e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua em Ω. Sem usar Heine–Borel, mostre que $f(\Omega)$ é fechado e limitado.

Exercício 4. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se para todo $\epsilon > 0$ existir δ tal que dados K subintervalos $(x_1, y_1), \dots, (x_K, y_K)$ contidos em I e disjuntos (i.e., $x_1 < y_1 < \cdots < x_K < y_K$), com $\sum_{i=1}^K (y_i - x_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^K |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. Mostre que

(1) toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua
(2) toda função de Lipschitz é absolutamente contínua

Exercício 5. Suponha $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua em Ω. Mostre que podemos definir $\bar{\mathbf{f}} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{\mathbf{f}}$ seja contínua em $\bar{\Omega}$, e $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Neste caso dizemos que $\bar{\mathbf{f}}$ é uma *extensão contínua* de $\mathbf{f}$.

Exercício 6. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^m$ limitado, e $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que $\boldsymbol{f}$ é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.