ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **01 de fevereiro de 2017**

Exercício 1. Decida se os conjuntos abaixo são ou não compactos. Prove suas afirmativas sem utilizar o Teorema de Heine–Borel.

(a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A finito.

(b) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que B não contém ao menos um de seus pontos de acumulação.

Exercício 2. Seja K conjunto compacto, e seja $\epsilon > 0$. Mostre que existem $J \in \mathbb{N}$ e pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_J$ pertencentes a K tais que

$$K \subseteq \cup_{j=1}^{J} B_\epsilon(\mathbf{x}_j).$$

Exercício 3. Mostre, sem usar o Teorema de Heine–Borel, que se K é compacto e $F \subseteq K$ é fechado, então F é compacto.

Exercício 4. Sem usar a parte do Teorema de Heine-Borel que diz que todo fechado e limitado é compacto, mostre que a interseção arbitrária de compactos é compacta e que a união finita de compactos é compacta.

Exercício 5. Seja $(\mathbf{x}_k)$ sequência em $\mathbb{R}^n$ convergente para $\mathbf{x}$. Mostre que $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ é compacto.

Exercício 6. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e $A = \{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$