

**ANÁLISE I – FGV
PRIMEIRA LISTA**

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **18 de janeiro de 2017**

Exercício 1. Mostre que uma função tem inversa se e somente se ela é uma bijeção.

Exercício 2. Para $i \in \mathbb{N}$, seja A_i conjunto infinito enumerável. Mostre que o produto cartesiano infinito $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ não é enumerável.

Exercício 3. Usando indução, mostre que existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $j^2 - 10j > 0$ para todo inteiro $j > J$.

Exercício 4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e as funções $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sejam tais que os conjuntos $f(A)$ e $g(A)$ sejam limitados superiormente. Defina a função $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Mostre que $\sup(f + g)(A) \leq \sup f(A) + \sup g(A)$. Dê um exemplo em que a desigualdade é estrita.

Exercício 5. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de \mathbb{R} limitados superiormente, e seja o conjunto $C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ formado pela soma dos elementos de A com os elementos de B . Mostre que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Exercício 6. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}.$$

Mostre que f está bem definida. Construa entretanto um exemplo onde não exista $\mathbf{y} \in A$ tal que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.