ANÁLISE I – FGV
OITAVA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Monitor João Lucas Thereze Ferreira

Data de entrega: **25 de março de 2015**

Exercício 1. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, e A° o conjunto dos pontos interiores de A. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas em A°, e f contínua em A. Suponha ainda que f se anule em toda a fronteira de A, e que f'' seja negativa definida para todo ponto em A°. Mostre que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in A^\circ$.

Exercício 2. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis, com as segundas derivadas contínuas. Suponha que o zero seja ponto de mínimo estrito de f e g, e que $f(0) = g(0) = 1$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$. O que podemos afirmar sobre a Hessiana de φ em $(0, 0)$ (nada pode ser afirmado, ela é indefinida, positiva definida, positiva semi-definida, negativa definida, etc)? O que podemos afirmar sobre o ponto $(0, 0)$ em relação à φ (nada pode ser afirmado, é ponto de máximo, de máximo estrito, de mínimo, de mínimo estrito, de sela, etc)? Justifique suas respostas.

Exercício 3. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega$. Seja $\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m)(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Supondo que $\mathbf{x}$ não é ponto crítico de f, mostre que a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ atinge seu máximo quando $\mathbf{u} = c \nabla f(\mathbf{x})$ para algum $c > 0$. O vetor ∇f é chamado de *vetor gradiente de* f, e dá a direção de "maior crescimento" da função f no ponto $\mathbf{x}$.

Exercício 4. Seja a sequência de funções (f_i), onde $f_i(x) = \sin(ix)/(1 + ix)$. Mostre que (f_i) converge pontualmente para todo $x \in [0, +\infty)$, uniformemente em $[a, +\infty)$ para $a > 0$, mas não converge uniformemente em $[0, +\infty)$.

Exercício 5. Suponha que $K \subset \mathbb{R}^m$ seja compacto, e defina as sequências de funções contínuas dadas por $f_j : K \to \mathbb{R}^n$ e $g_j : K \to \mathbb{R}^n$. Suponha que (f_j) convirja uniformemente para $f : K \to \mathbb{R}^n$ e (g_j) convirja uniformemente para $g : K \to \mathbb{R}^n$. Mostre que $(f_j g_j)$ converge uniformemente para fg. O que acontece se trocarmos K por um conjunto aberto qualquer? Mostre que o resultado continua válido ou apresente um contra-exemplo.

Exercício 6. Seja K conjunto compacto, $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, e (f_n) sequência de funções contínuas de K em $\mathbb{R}$. Prove ou apresente contra-exemplo para a seguinte afirmação:

Se (f_n) converge pontualmente para f em K, então (f_n) converge uniformemente para f em K.