ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira
Monitor João Lucas Thereze Ferreira
Data de entrega: **11 de março de 2015**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Mostre então que $g(x) = |f(x)|$ é diferenciável em c se e somente se f é diferenciável em c e $f'(c) = 0$.

Exercício 2. Seja $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[a, b]$. Mostre que se $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, então existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Exercício 3. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é absolutamente contínua se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, dados $N \in \mathbb{N}$ e intervalos $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ em [0,1], disjuntos e tais que

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k - x_k| < \delta,$$

tem-se que $\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon$. Mostre que f absolutamente contínua implica em f uniformemente contínua. Mostre que se f é diferenciável com derivada contínua em $[0, 1]$ então f é absolutamente contínua.

Exercício 4. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h. A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{para } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{para } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que a derivada direcional de f em $(0,0)$ com respeito a $\mathbf{u} = (a,b)$ existe e que

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \frac{b^2}{a}, \qquad \text{se } a \neq 0.$$

Mostre que f não é contínua e portanto não é diferenciável no $(0,0)$.

Exercício 6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e com a seguinte propriedade: existe $\mathbf{x}_* \in \Omega$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, a reta $S_{\mathbf{x}} = \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_* : t \in [0,1]\}$ está contida em Ω, i.e., $S_{\mathbf{x}} \subset \Omega$ (dizemos que tal domínio tem *formato de estrela*. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função diferenciável em Ω e tal que todas as derivadas parciais de $f(\mathbf{x})$ são nulas, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Mostre que f é constante.