ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Data de entrega: **04 de março de 2015**

Exercício 1. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais, convergentes para x e y respectivamente, onde $x < y$. Mostre que existe um número natural N tal que $x_n < y_n$ para todo n maior que N.

Exercício 2. Seja $a > 0$ e $x_1 > 0$. Mostre que a sequência dada por $x_{n+1} = (a + x_n)^{1/2}$ converge.

Exercício 3. Determine os pontos de continuidade da função $[x]$, que retorna para cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $[2] = 2$, $[2.5] = 2$, $[-2.5] = -3$.

Exercício 4. Mostre o seguinte lema.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e $\mathbf{x} \in \Omega$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes.

(1) $\boldsymbol{f}$ é contínua em $\mathbf{x}$.

(2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{y} \in \Omega, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon.$$

(3) Se $(\mathbf{x}_k)$ é sequência em Ω e $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, então $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_k) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$.

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) = 0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^m$.